

```

In[*]:= $k = 1;
SetAlgebra[gl4,ε];
$PBWRule
MatrixForm@Table[{b1, b2} → B[b1, b2], {b1, $Basis}, {b2, $Basis}]
MatrixForm@
Table[{b1, b2} → (DefRep[b1].DefRep[b2] - DefRep[b2].DefRep[b1] == DefRep[B[b1, b2]]),
{b1, $Basis}, {b2, $Basis}]

Out[*]=
{y1,2 → 1, y1,3 → 2, y2,3 → 3, y1,4 → 4, y2,4 → 5, y3,4 → 6, x1,1 → 7, x1,2 → 8,
x2,2 → 9, x1,3 → 10, x2,3 → 11, x3,3 → 12, x1,4 → 13, x2,4 → 14, x3,4 → 15, x4,4 → 16}

Out[*]//MatrixForm=


|                                                                              |                                                                              |                                                                              |                                                           |
|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → -y <sub>1,3</sub>                   | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → y <sub>1,3</sub>                    | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → y <sub>1,4</sub>                    | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → y <sub>1,4</sub>                    | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → y <sub>2,4</sub>                    | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,2</sub> } → -y <sub>1,2</sub>                   | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,3</sub> } → -y <sub>1,3</sub>                   | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → x <sub>1,1</sub> - x <sub>2,2</sub> | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → -y <sub>2,3</sub>                   | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → y <sub>1,2</sub>                    | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → -y <sub>2,3</sub>                   | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → -x <sub>2,3</sub>                   | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → x <sub>1,1</sub> - x <sub>3,3</sub> | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → x <sub>1,2</sub>                    | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → y <sub>1,2</sub>                    | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → x <sub>2,2</sub> - x <sub>3,3</sub> | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → y <sub>1,3</sub>                    | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → y <sub>2,3</sub>                    | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → -x <sub>2,4</sub>                   | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → -x <sub>3,4</sub>                   | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → x <sub>1,2</sub> |
| {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → -x <sub>3,4</sub>                   | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |
| {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → 0                                   | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → 0                                   | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,4</sub>                      |



Out[*]//MatrixForm=


|                                               |                                               |                                               |                                               |                                               |   |
|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|-----------------------------------------------|---|
| {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>1,2</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>1,3</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>2,3</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>1,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>2,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {y <sub>3,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>1,1</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>1,2</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>2,2</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>1,3</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>2,3</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>3,3</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>1,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>2,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>3,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |
| {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,2</sub> } → True | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,3</sub> } → True | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>2,3</sub> } → True | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>1,4</sub> } → True | {x <sub>4,4</sub> , y <sub>2,4</sub> } → True | { |


```

```

In[*]:= SBasis = SortBy[$Basis, If[#[[1]] == x, {0, #[[3]] - #[[2]]}, {1, #[[2]] - #[[3]]}] &];
sol[-1] = Table[If[SSQ[bb], ((bb /. x → ξ1) + (bb /. x → ξ2)), 0], {bb, $Basis}];
Do[
  Block[{ $k = k },
    s0 = Thread[$Basis → sol[k - 1]];
    lhs = λTangent[
      Join[Table[If[NilQ[bb], λ, 1] bb (bb /. {x → ξ1, y → η1}), {bb, $Basis}],
        Table[If[NilQ[bb], λ, 1] bb (bb /. {x → ξ2, y → η2}), {bb, $Basis}]]];
    rhs = λTangent[
      $Basis ($Basis /. {xαβ → (xαβ /. s0) + ek fαβ[λ], yαβ → (yαβ /. s0) + ek gαβ[λ]})];
    eqns = Transpose@{
      (Coefficient[CF[lhs - rhs], #] == 0) & /@ SBasis,
      SBasis /. {xαβ → fαβ[0] == 0, yαβ → gαβ[0] == 0}];
    unknowns = SBasis /. {xαβ → fαβ[λ], yαβ → gαβ[λ]};
    s = TriangularDSolve[eqns, unknowns, λ];
    sol[k] = CF[sol[k - 1] + ek ($Basis /. {xαβ → fαβ[λ], yαβ → gαβ[λ]} /. s)];
  {k, 0, $k}
];
cm[i_, j_ → k_] := Δ2E{i,j}→{k}[sol[$k].$Basis /. {xαβ → xαβ[k], yαβ → yαβ[k],
  ξ1αβ → ξαβ[i], η1αβ → ηαβ[i], ξ2αβ → ξαβ[j], η2αβ → ηαβ[j], λ → 1}];
cm[i, j → k]

```

$\gg \{f_{1,1}[\lambda] \rightarrow 0\}$
 $\gg \{f_{2,2}[\lambda] \rightarrow 0\}$
 $\gg \{f_{3,3}[\lambda] \rightarrow 0\}$
 $\gg \{f_{4,4}[\lambda] \rightarrow 0\}$
 $\gg \{f_{1,2}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,1}} \lambda \xi_{1,2} + e^{-\xi_{1,2}} \lambda \xi_{2,1}\}$
 $\gg \{f_{2,3}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,2}} \lambda \xi_{1,3} + e^{-\xi_{1,3}} \lambda \xi_{2,3}\}$
 $\gg \{f_{3,4}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,3}} \lambda \xi_{1,4} + e^{-\xi_{1,4}} \lambda \xi_{2,4}\}$
 $\gg \{f_{1,3}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,1}} \lambda \xi_{1,3} - \lambda^2 \xi_{1,2} \xi_{2,1} + e^{-\xi_{1,3}} \lambda \xi_{2,1}\}$
 $\gg \{f_{2,4}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,2}} \lambda \xi_{1,4} - \lambda^2 \xi_{1,3} \xi_{2,3} + e^{-\xi_{1,4}} \lambda \xi_{2,4}\}$
 $\gg \{f_{1,4}[\lambda] \rightarrow e^{-\xi_{2,1}} \lambda \xi_{1,4} - \lambda^2 \xi_{1,2} \xi_{2,1} - \lambda^2 \xi_{1,3} \xi_{2,3} + e^{-\xi_{1,4}} \lambda \xi_{2,1}\}$
 $\gg \{g_{1,4}[\lambda] \rightarrow \lambda \eta_{1,4} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,4}} \lambda \eta_{2,4}\}$
 $\gg \{g_{1,3}[\lambda] \rightarrow \lambda \eta_{1,3} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,3}} \lambda \eta_{2,3} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,3} + \xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,3}\}$
 $\gg \{g_{2,4}[\lambda] \rightarrow \lambda \eta_{1,4} + e^{-\xi_{1,2} + \xi_{1,4}} \lambda \eta_{2,4} - e^{\xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,2}\}$
 $\gg \{g_{1,2}[\lambda] \rightarrow \lambda \eta_{1,2} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,2}} \lambda \eta_{2,2} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,2} + \xi_{1,3}} \lambda^2 \eta_{2,3} \xi_{1,2} +$
 $\quad e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,2} + \xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,2} + e^{-\xi_{1,1} + \xi_{1,2} + \xi_{1,3} + \xi_{1,4}} \lambda^3 \eta_{2,4} \xi_{1,2} \xi_{1,3}\}$
 $\gg \{g_{2,3}[\lambda] \rightarrow$
 $\quad \lambda \eta_{1,3} + e^{-\xi_{1,2} + \xi_{1,3}} \lambda \eta_{2,3} - e^{\xi_{1,3}} \lambda^2 \eta_{2,3} \xi_{1,2} + e^{-\xi_{1,2} + \xi_{1,3} + \xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,3} - e^{\xi_{1,3} + \xi_{1,4}} \lambda^3 \eta_{2,4} \xi_{1,2} \xi_{1,3}\}$
 $\gg \{g_{3,4}[\lambda] \rightarrow \lambda \eta_{1,4} + e^{-\xi_{1,3} + \xi_{1,4}} \lambda \eta_{2,4} - e^{\xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,3} - e^{\xi_{1,4}} \lambda^2 \eta_{2,4} \xi_{1,2}\}$

In[*]:= (cm[1, 2 → 2] // cm[2, 3 → 1]) ≡ (cm[2, 3 → 2] // cm[1, 2 → 1])

Out[*]=

True