

Pensieve header: An attempt on a better rank 2 ($\mathcal{S}l_3$) Gassner representation.

```

In[*]:= Gi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
    ej  $\Rightarrow$   $e^{t_j} e_j + (1 - e^{t_j}) e_i$ 
}]];
bas = {e1, e2, e3};
lhs = bas // G1,2 // G1,3 // G2,3;
rhs = bas // G2,3 // G1,3 // G1,2
Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=
{e1, e1 -  $e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2$ , e1 -  $e^{t_1} e_1 + e^{t_1} e_2 - e^{t_1+t_2} e_2 + e^{t_1+t_2} e_3$ }

Out[*]=
True

In[*]:= R2Bi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
    ej  $\Rightarrow$  T ej + (1 - T) ei,
    fj  $\Rightarrow$  S fj + (1 - S) fi,
    gj  $\Rightarrow$  T S gj + (1 - T S) gi + c1 ei fi + c2 ei fj + c3 ej fi + c4 ej fj,
    gi  $\Rightarrow$  gi + c5 ei fi + c6 ei fj + c7 ej fi + c8 ej fj
}]];
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2B1,2 // R2B1,3 // R2B2,3;
rhs = bas // R2B2,3 // R2B1,3 // R2B1,2;
rhs - lhs

Out[*]=
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -c7 e2 f1 + T c7 e2 f1 + c7 e3 f1 -
T c7 e3 f1 - c6 e1 f2 + S c6 e1 f2 - c8 e2 f2 + S c8 e2 f2 + T c8 e2 f2 - S T c8 e2 f2 - T c8 e3 f2 +
S T c8 e3 f2 + c6 e1 f3 - S c6 e1 f3 - S c8 e2 f3 + S T c8 e2 f3 + c8 e3 f3 - S T c8 e3 f3,
-S c5 e1 f1 - T c5 e1 f1 + 2 S T c5 e1 f1 + c6 e1 f1 - S c6 e1 f1 - T c6 e1 f1 + S T c6 e1 f1 +
c7 e1 f1 - S c7 e1 f1 - T c7 e1 f1 + S T c7 e1 f1 + c8 e1 f1 - S c8 e1 f1 - T c8 e1 f1 + S T c8 e1 f1 +
T c5 e2 f1 - S T c5 e2 f1 + T c6 e2 f1 - S T c6 e2 f1 - c7 e2 f1 + T c7 e2 f1 + S T c7 e2 f1 -
S T2 c7 e2 f1 - S T c7 e3 f1 + S T2 c7 e3 f1 + T c8 e3 f1 - S T c8 e3 f1 + S c5 e1 f2 - S T c5 e1 f2 -
c6 e1 f2 + S c6 e1 f2 + S T c6 e1 f2 - S2 T c6 e1 f2 + S c7 e1 f2 - S T c7 e1 f2 - c8 e2 f2 +
S c8 e2 f2 + T c8 e2 f2 - S2 T c8 e2 f2 - S T2 c8 e2 f2 + S2 T2 c8 e2 f2 - T c8 e3 f2 + S T c8 e3 f2 +
S T2 c8 e3 f2 - S2 T2 c8 e3 f2 - S T c6 e1 f3 + S2 T c6 e1 f3 + S c8 e1 f3 - S T c8 e1 f3 -
S c8 e2 f3 + S T c8 e2 f3 + S2 T c8 e2 f3 - S2 T2 c8 e2 f3 - S T c8 e3 f3 + S2 T2 c8 e3 f3,
c1 e1 f1 - S c1 e1 f1 - T c1 e1 f1 + S T c1 e1 f1 + c2 e1 f1 - S c2 e1 f1 - T c2 e1 f1 + S T c2 e1 f1 +
c3 e1 f1 - S c3 e1 f1 - T c3 e1 f1 + S T c3 e1 f1 + c4 e1 f1 - S c4 e1 f1 - T c4 e1 f1 + S T c4 e1 f1 +
S T c5 e1 f1 - S2 T2 c5 e1 f1 + T c1 e2 f1 - S T c1 e2 f1 + T c2 e2 f1 - S T c2 e2 f1 + T c3 e2 f1 - S T c3 e2 f1 +
S T c7 e2 f1 - S2 T2 c7 e2 f1 + T c4 e3 f1 - S T c4 e3 f1 + S c1 e1 f2 - S T c1 e1 f2 + S c2 e1 f2 - S T c2 e1 f2 +
S c3 e1 f2 - S T c3 e1 f2 + S T c6 e1 f2 - S2 T2 c6 e1 f2 + S c4 e2 f2 + T c4 e2 f2 - 2 S T c4 e2 f2 +
S T c8 e2 f2 - S2 T2 c8 e2 f2 - T c4 e3 f2 + S T c4 e3 f2 + S c4 e1 f3 - S T c4 e1 f3 - S c4 e2 f3 + S T c4 e2 f3}


```

```
In[*]:= eqs = Union @@ Table[CoefficientRules[eq, {e1, e2, e3, f1, f2, f3, g1, g2, g3}] /.
  (_ -> c_) -> (c == 0), {eq, lhs - rhs}]
```

```
Out[*]=
```

$$\left\{ \begin{aligned} &S c_4 - S T c_4 == 0, T c_4 - S T c_4 == 0, -S c_4 + S T c_4 == 0, -T c_4 + S T c_4 == 0, \\ &-c_1 + S c_1 + T c_1 - S T c_1 - c_2 + S c_2 + T c_2 - S T c_2 - c_3 + S c_3 + T c_3 - S T c_3 - \\ &\quad c_4 + S c_4 + T c_4 - S T c_4 - S T c_5 + S^2 T^2 c_5 == 0, c_6 - S c_6 == 0, -c_6 + S c_6 == 0, \\ &-S c_1 + S T c_1 - S c_2 + S T c_2 - S c_3 + S T c_3 - S T c_6 + S^2 T^2 c_6 == 0, c_7 - T c_7 == 0, \\ &-c_7 + T c_7 == 0, -S c_5 + S T c_5 + c_6 - S c_6 - S T c_6 + S^2 T c_6 - S c_7 + S T c_7 == 0, \\ &-T c_5 + S T c_5 - T c_6 + S T c_6 + c_7 - T c_7 - S T c_7 + S T^2 c_7 == 0, \\ &-T c_1 + S T c_1 - T c_2 + S T c_2 - T c_3 + S T c_3 - S T c_7 + S^2 T^2 c_7 == 0, S c_8 - S T c_8 == 0, T c_8 - S T c_8 == 0, \\ &S c_5 + T c_5 - 2 S T c_5 - c_6 + S c_6 + T c_6 - S T c_6 - c_7 + S c_7 + T c_7 - S T c_7 - c_8 + S c_8 + T c_8 - S T c_8 == 0, \\ &-c_8 + S T c_8 == 0, S T c_6 - S^2 T c_6 - S c_8 + S T c_8 == 0, \\ &S T c_7 - S T^2 c_7 - T c_8 + S T c_8 == 0, c_8 - S c_8 - T c_8 + S T c_8 == 0, S T c_8 - S^2 T^2 c_8 == 0, \\ &c_8 - S c_8 - T c_8 + S^2 T c_8 + S T^2 c_8 - S^2 T^2 c_8 == 0, -S c_4 - T c_4 + 2 S T c_4 - S T c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0, \\ &S c_8 - S T c_8 - S^2 T c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0, T c_8 - S T c_8 - S T^2 c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0 \end{aligned} \right\}$$

```
In[*]:= {sol} = Solve[eqs, {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8}]
```

 **Solve:** Equations may not give solutions for all "solve" variables.

```
Out[*]=
```

$$\left\{ \left\{ c_3 \rightarrow -c_1 - c_2, c_4 \rightarrow 0, c_5 \rightarrow 0, c_6 \rightarrow 0, c_7 \rightarrow 0, c_8 \rightarrow 0 \right\} \right\}$$

```
In[*]:= sol /. Rule -> Set
```

```
Out[*]=
```

$$\{-c_1 - c_2, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

```
In[*]:= {g1, g2} // R2B1,2
```

```
Out[*]=
```

$$\{g_1, c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + c_2 e_1 f_2 + g_1 - S T g_1 + S T g_2\}$$

```
In[*]:= bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2B1,2 // R2B1,3 // R2B2,3;
rhs = bas // R2B2,3 // R2B1,3 // R2B1,2
lhs == rhs
```

```
Out[*]=
```

$$\{e_1, e_1 - T e_1 + T e_2, e_1 - T e_1 + T e_2 - T^2 e_2 + T^2 e_3, f_1, f_1 - S f_1 + S f_2, f_1 - S f_1 + S f_2 - S^2 f_2 + S^2 f_3, \\ e_1 f_1, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_2, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 + S^2 e_1 f_3, e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_2 f_1, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_2 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 - \\ S T e_1 f_2 + S^2 T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S^2 T e_2 f_2 + S^2 e_1 f_3 - S^2 T e_1 f_3 + S^2 T e_2 f_3, \\ e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1, e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 - \\ T^2 e_2 f_1 + S T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1 - S T^2 e_3 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S T^2 e_2 f_2 + S T^2 e_3 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 - T^2 e_2 f_1 + S T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1 - \\ S T^2 e_3 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S^2 T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S^2 T e_2 f_2 - S T^2 e_2 f_2 + \\ S^2 T^2 e_2 f_2 + S T^2 e_3 f_2 - S^2 T^2 e_3 f_2 + S^2 e_1 f_3 - S^2 T e_1 f_3 + S^2 T e_2 f_3 - S^2 T^2 e_2 f_3 + S^2 T^2 e_3 f_3, \\ g_1, c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + c_2 e_1 f_2 + g_1 - S T g_1 + S T g_2, \\ c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 + T c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + T c_2 e_2 f_1 - T c_1 e_3 f_1 - T c_2 e_3 f_1 + c_2 e_1 f_2 - S c_2 e_1 f_2 + \\ S T c_1 e_2 f_2 - S T c_1 e_3 f_2 - S T c_2 e_3 f_2 + S c_2 e_1 f_3 + S T c_2 e_2 f_3 + g_1 - S T g_1 + S T g_2 - S^2 T^2 g_2 + S^2 T^2 g_3\}$$

```
Out[*]=
```

True

```
In[*]:= lhs = bas // R2B1,2 // R2B1,3;
rhs = bas // R2B1,3 // R2B1,2
lhs == rhs
```

```
Out[*]=
```

$$\{e_1, e_1 - T e_1 + T e_2, e_1 - T e_1 + T e_3, f_1, f_1 - S f_1 + S f_2, f_1 - S f_1 + S f_3, \\ e_1 f_1, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_2, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_3, e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_2 f_1, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_2 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_3 - S T e_1 f_3 + S T e_2 f_3, \\ e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_3 f_1, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_3 f_1 - S T e_3 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_3 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_3 f_1 - S T e_3 f_1 + S e_1 f_3 - S T e_1 f_3 + S T e_3 f_3, g_1, \\ c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + c_2 e_1 f_2 + g_1 - S T g_1 + S T g_2, \\ c_1 e_1 f_1 - c_1 e_3 f_1 - c_2 e_3 f_1 + c_2 e_1 f_3 + g_1 - S T g_1 + S T g_3\}$$

```
Out[*]=
```

True

```
In[*]:= FullSimplify[c1 e1 f1 - c1 e2 f1 - c2 e2 f1 + c2 e1 f2]
```

```
Out[*]=
```

$$c_1 (e_1 - e_2) f_1 + c_2 (-e_2 f_1 + e_1 f_2)$$

```

In[*]:= LR2Bi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ei  $\Rightarrow$  T ei + (1 - T) ej,
  fi  $\Rightarrow$  S fi + (1 - S) fj,
  gi  $\Rightarrow$  T S gi + (1 - T S) gj
  + c1 (ei - ej) fj + c2 (ei fj - ej fi)
}];
 $\overline{\text{LR2B}}$ i,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ei  $\Rightarrow$  T-1 ei + (1 - T-1) ej,
  fi  $\Rightarrow$  S-1 fi + (1 - S-1) fj,
  gi  $\Rightarrow$  T-1 S-1 gi + (1 - T-1 S-1) gj
  + d1 ei fi + d2 ei fj + d3 ej fi + d4 ej fj
}];
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
{eqn} = DeleteCases[(bas // LR2B1,2 //  $\overline{\text{LR2B}}$ 1,2) - bas, 0]

Out[*]=
{S T d1 e1 f1 -  $\frac{c_2 e_2 f_1}{S}$  + S T d3 e2 f1 +  $\frac{c_1 e_1 f_2}{T}$  +
 $\frac{c_2 e_1 f_2}{T}$  + S T d2 e1 f2 -  $\frac{c_1 e_2 f_2}{T}$  +  $\frac{c_2 e_2 f_2}{S}$  -  $\frac{c_2 e_2 f_2}{T}$  + S T d4 e2 f2}}

In[*]:= eqs = Union@CoefficientRules[eqn, {e1, e2, e3, f1, f2, f3, g1, g2, g3}] /. (_  $\rightarrow$  c_)  $\Rightarrow$  (c == 0)

Out[*]=
{- $\frac{c_1}{T}$  +  $\frac{c_2}{S}$  -  $\frac{c_2}{T}$  + S T d4 == 0, - $\frac{c_2}{S}$  + S T d3 == 0,  $\frac{c_1}{T}$  +  $\frac{c_2}{T}$  + S T d2 == 0, S T d1 == 0}

In[*]:= {sol} = Solve[eqs, {d1, d2, d3, d4}]

Out[*]=
{{d1  $\rightarrow$  0, d2  $\rightarrow$   $\frac{-c_1 - c_2}{S T^2}$ , d3  $\rightarrow$   $\frac{c_2}{S^2 T}$ , d4  $\rightarrow$   $\frac{S c_1 + S c_2 - T c_2}{S^2 T^2}$ }}

```

```

In[*]:= LR2Bi,j[ $\mathcal{E}$ ] := Expand[ $\mathcal{E}$  /. {
  ei  $\Rightarrow$  T ei + (1 - T) ej,
  fi  $\Rightarrow$  S fi + (1 - S) fj,
  gi  $\Rightarrow$  T S gi + (1 - T S) gj
  + c1 (ei - ej) fj + c2 (ei fj - ej fi)
}];

 $\overline{\text{LR2B}}_{i,j}[\mathcal{E}] := \text{Expand}[\mathcal{E} /. \{$ 
  ei  $\Rightarrow$  T-1 ei + (1 - T-1) ej,
  fi  $\Rightarrow$  S-1 fi + (1 - S-1) fj,
  gi  $\Rightarrow$  T-1 S-1 gi + (1 - T-1 S-1) gj
  +  $\frac{-c_1 - c_2}{S T^2}$  ei fj +  $\frac{c_2}{S^2 T}$  ej fi +  $\frac{S c_1 + S c_2 - T c_2}{S^2 T^2}$  ej fj
 $\}];$ 

bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
(bas // LR2B1,2 //  $\overline{\text{LR2B}}_{1,2}$ ) == bas
Simplify@Thread[(bas //  $\overline{\text{LR2B}}_{1,2}$  // LR2B1,2) == bas]
Simplify@Thread[(bas // LR2B3,2 //  $\overline{\text{LR2B}}_{3,2}$ ) == bas]
lhs = bas // LR2B1,2 // LR2B1,3 // LR2B2,3;
rhs = bas // LR2B2,3 // LR2B1,3 // LR2B1,2;
Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=
True

Out[*]=
True

Out[*]=
True

Out[*]=
True

```