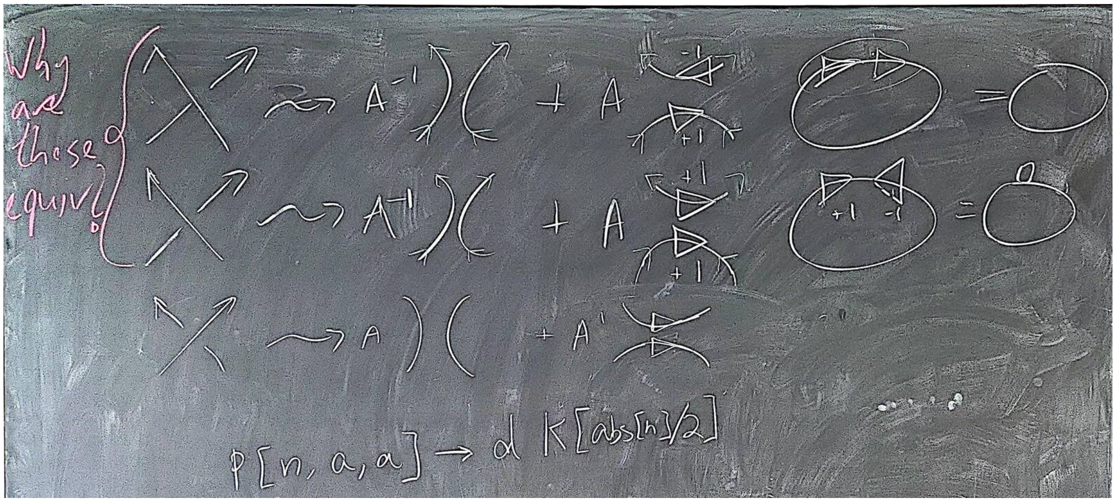
Pensieve Header: Finding the smoothings that occur while computing the Arrow Polynomial.

https://drorbn.net/bbs/show?shot=SantosK-250717-132117.jpg :



In[∘]:=

```
<< KnotTheory`
```

```
Loading KnotTheory` version of October 29, 2024, 10:29:52.1301.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
```

In[∘]:=

```
pd = PD[Knot[3, 1]]
```

KnotTheory: Loading precomputed data in PD4Knots`.

Out[∘]=

PD[X[1, 4, 2, 5], X[3, 6, 4, 1], X[5, 2, 6, 3]]

In[∘]:=

```
κ = 0;
pd /. x : X[i_, j_, k_, l_] :> (++κ;
   If[PositiveQ[x],
    OS_κ A P_0[i, j] P_0[l, k] + US_κ A^-1 P_1[l, i] P_-1[j, k],
    OS_κ A^-1 P_0[i, l] P_0[j, k] + US_κ A P_1[i, j] P_-1[k, l]
   ])
```

Out[∘]=

$$\mathrm{PD}\left[\frac{OS_1\, P_0[1,5]\, P_0[4,2]}{A} + A\, US_1\, P_{-1}[2,5]\, P_1[1,4],\ \frac{OS_2\, P_0[3,1]\, P_0[6,4]}{A} + A\, US_2\, P_{-1}[4,1]\, P_1[3,6],\ \frac{OS_3\, P_0[2,6]\, P_0[5,3]}{A} + A\, US_3\, P_{-1}[6,3]\, P_1[5,2]\right]$$

In[∘]:=

```
κ = 0;
Expand[Times @@ pd /. x : X[i_, j_, k_, l_] :→ (++κ;
    If[PositiveQ[x],
     OSκ A P0[i, j] P0[l, k] + USκ A^-1 P1[l, i] P-1[j, k],
     OSκ A^-1 P0[i, l] P0[j, k] + USκ A P1[i, j] P-1[k, l]
    ])]
```

Out[∘]=

$$\frac{OS_1\,OS_2\,OS_3\,P_0[1,5]\,P_0[2,6]\,P_0[3,1]\,P_0[4,2]\,P_0[5,3]\,P_0[6,4]}{A^3}+$$
$$\frac{OS_2\,OS_3\,US_1\,P_{-1}[2,5]\,P_0[2,6]\,P_0[3,1]\,P_0[5,3]\,P_0[6,4]\,P_1[1,4]}{A}+$$
$$\frac{OS_1\,OS_3\,US_2\,P_{-1}[4,1]\,P_0[1,5]\,P_0[2,6]\,P_0[4,2]\,P_0[5,3]\,P_1[3,6]}{A}+$$
$$A\,OS_3\,US_1\,US_2\,P_{-1}[2,5]\,P_{-1}[4,1]\,P_0[2,6]\,P_0[5,3]\,P_1[1,4]\,P_1[3,6]+$$
$$\frac{OS_1\,OS_2\,US_3\,P_{-1}[6,3]\,P_0[1,5]\,P_0[3,1]\,P_0[4,2]\,P_0[6,4]\,P_1[5,2]}{A}+$$
$$A\,OS_2\,US_1\,US_3\,P_{-1}[2,5]\,P_{-1}[6,3]\,P_0[3,1]\,P_0[6,4]\,P_1[1,4]\,P_1[5,2]+$$
$$A\,OS_1\,US_2\,US_3\,P_{-1}[4,1]\,P_{-1}[6,3]\,P_0[1,5]\,P_0[4,2]\,P_1[3,6]\,P_1[5,2]+$$
$$A^3\,US_1\,US_2\,US_3\,P_{-1}[2,5]\,P_{-1}[4,1]\,P_{-1}[6,3]\,P_1[1,4]\,P_1[3,6]\,P_1[5,2]$$

In[∘]:=

```
κ = 0;
Expand[Times @@ pd /. x : X[i_, j_, k_, l_] :→ (++κ;
     If[PositiveQ[x],
      OSκ A P0[i, j] P0[l, k] + USκ A^-1 P1[l, i] P-1[j, k],
      OSκ A^-1 P0[i, l] P0[j, k] + USκ A P1[i, j] P-1[k, l]
     ])] //. {
  Pα_[i_, j_] Pβ_[j_, k_] :→ Pα+β[i, k],
  Pα_[i_, j_] Pβ_[k_, j_] :→ Pα-β[i, k],
  Pα_[j_, i_] Pβ_[j_, k_] :→ P-α+β[i, k]
 }
```

Out[∘]=

$$\frac{OS_2\,OS_3\,US_1\,P_0[2,4]^2}{A}+A\,OS_3\,US_1\,US_2\,P_0[2,6]^2\,P_0[4,4]+\frac{OS_1\,OS_2\,OS_3\,P_0[3,3]\,P_0[4,4]}{A^3}+$$
$$\frac{OS_1\,OS_3\,US_2\,P_0[4,6]^2}{A}+\frac{OS_1\,OS_2\,US_3\,P_0[6,2]^2}{A}+A\,OS_2\,US_1\,US_3\,P_0[2,2]\,P_0[6,4]^2+$$
$$A\,OS_1\,US_2\,US_3\,P_0[4,2]^2\,P_0[6,6]+A^3\,US_1\,US_2\,US_3\,P_0[2,2]\,P_0[4,4]\,P_0[6,6]$$

```
In[∘]:= AP[K_] := Module[{t},
   t = Expand[Times @@ PD[K] /. x : X[i_, j_, k_, l_] :> If[PositiveQ[x],
          A P0[i, j] P0[l, k] + A^-1 P1[l, i] P-1[j, k], A^-1 P0[i, l] P0[j, k] + A P1[i, j] P-1[k, l]
         ]] //. {
       Pα_[i_, j_] Pβ_[j_, k_] :> Pα+β[i, k],
       Pα_[i_, j_] Pβ_[k_, j_] :> Pα-β[i, k], Pα_[j_, i_] Pβ_[j_, k_] :> P-α+β[i, k]
      } /. {
      Pα_[k_, k_] :> (-A^2 - A^-2) VAbs@α/2, P_[_, _]^2 → (-A^2 - A^-2) V0
     } /. {V0 → 1, Pα_[i_, j_] /; i > j :> P-α[j, i]};
   Factor[t / (-A^2 - A^-2)]
  ]
```

The Pre-Arrow-Polynomial:

```
In[∘]:= PAP[K_] := Module[{t, κ = 0},
   t = Expand[Times @@ PD[K] /. x : X[i_, j_, k_, l_] :> (++κ;
          If[PositiveQ[x],
           OSκ A P0[i, j] P0[l, k] + USκ A^-1 P1[l, i] P-1[j, k],
           OSκ A^-1 P0[i, l] P0[j, k] + USκ A P1[i, j] P-1[k, l]
          ])] //. {
       Pα_[i_, j_] Pβ_[j_, k_] :> Pα+β[i, k],
       Pα_[i_, j_] Pβ_[k_, j_] :> Pα-β[i, k], Pα_[j_, i_] Pβ_[j_, k_] :> P-α+β[i, k]
      } /. {
      Pα_[k_, k_] :> (-A^2 - A^-2) VAbs@α/2, P_[_, _]^2 → (-A^2 - A^-2) V0
     } /. {V0 → 1, Pα_[i_, j_] /; i > j :> P-α[j, i]};
   Factor[t / (-A^2 - A^-2)]
  ]
```

```
In[∘]:= PAP[Knot[3, 1]]
```

Out[∘]=

$$\frac{1}{A^5}\left(-OS_1\,OS_2\,OS_3 - A^4\,OS_1\,OS_2\,OS_3 + A^4\,OS_2\,OS_3\,US_1 + A^4\,OS_1\,OS_3\,US_2 - A^4\,OS_3\,US_1\,US_2 - A^8\,OS_3\,US_1\,US_2 + A^4\,OS_1\,OS_2\,US_3 - A^4\,OS_2\,US_1\,US_3 - A^8\,OS_2\,US_1\,US_3 - A^4\,OS_1\,US_2\,US_3 - A^8\,OS_1\,US_2\,US_3 + A^4\,US_1\,US_2\,US_3 + 2\,A^8\,US_1\,US_2\,US_3 + A^{12}\,US_1\,US_2\,US_3\right)$$

```
In[∘]:= PAP[Knot[4, 1]]
```

Out[∘]=

$$\frac{1}{A^8}\left(A^4\,OS_1\,OS_2\,OS_3\,OS_4 + 2\,A^8\,OS_1\,OS_2\,OS_3\,OS_4 + A^{12}\,OS_1\,OS_2\,OS_3\,OS_4 - A^8\,OS_2\,OS_3\,OS_4\,US_1 - A^{12}\,OS_2\,OS_3\,OS_4\,US_1 - A^4\,OS_1\,OS_3\,OS_4\,US_2 - A^8\,OS_1\,OS_3\,OS_4\,US_2 + A^8\,OS_3\,OS_4\,US_1\,US_2 - A^8\,OS_1\,OS_2\,OS_4\,US_3 - A^{12}\,OS_1\,OS_2\,OS_4\,US_3 + A^8\,OS_2\,OS_4\,US_1\,US_3 + 2\,A^{12}\,OS_2\,OS_4\,US_1\,US_3 + A^{16}\,OS_2\,OS_4\,US_1\,US_3 + A^8\,OS_1\,OS_4\,US_2\,US_3 - A^8\,OS_4\,US_1\,US_2\,US_3 - A^{12}\,OS_4\,US_1\,US_2\,US_3 - A^4\,OS_1\,OS_2\,OS_3\,US_4 - A^8\,OS_1\,OS_2\,OS_3\,US_4 + A^8\,OS_2\,OS_3\,US_1\,US_4 + OS_1\,OS_3\,US_2\,US_4 + 2\,A^4\,OS_1\,OS_3\,US_2\,US_4 + A^8\,OS_1\,OS_3\,US_2\,US_4 - A^4\,OS_3\,US_1\,US_2\,US_4 - A^8\,OS_3\,US_1\,US_2\,US_4 + A^8\,OS_1\,OS_2\,US_3\,US_4 - A^8\,OS_2\,US_1\,US_3\,US_4 - A^{12}\,OS_2\,US_1\,US_3\,US_4 - A^4\,OS_1\,US_2\,US_3\,US_4 - A^8\,OS_1\,US_2\,US_3\,US_4 + A^8\,US_1\,US_2\,US_3\,US_4\right)$$

```
PAP /@ AllKnots[{3, 7}]
```

Out[∘]=

```
In[∘]:= FreeQ[PAP /@ AllKnots[{3, 9}], V]
```

Out[∘]=

True

```
In[∘]:= Monitor[
 Table[
  r = FreeQ[PAP[K], V];
  If[! r, Echo@r, r],
  {K, AllKnots[{3, 8}]}],
 {r, K}
]
```

Out[∘]=

{True, True}

```
In[∘]:= PAP[PD[X[2, 4, 3, 1], X[3, 1, 4, 2]]]
```

Out[∘]=

$$-\frac{-OS_1\,OS_2 - A^2\,OS_2\,US_1\,V_1 - A^2\,OS_1\,US_2\,V_1 + A^2\,US_1\,US_2\,V_1 + A^6\,US_1\,US_2\,V_1}{A^2}$$

```
In[∘]:= FreeQ[PAP[PD[X[2, 4, 3, 1], X[3, 1, 4, 2]]], V]
```

Out[∘]=

False

```
In[∘]:= AP[PD[X[2, 4, 3, 1], X[3, 1, 4, 2]]]
```

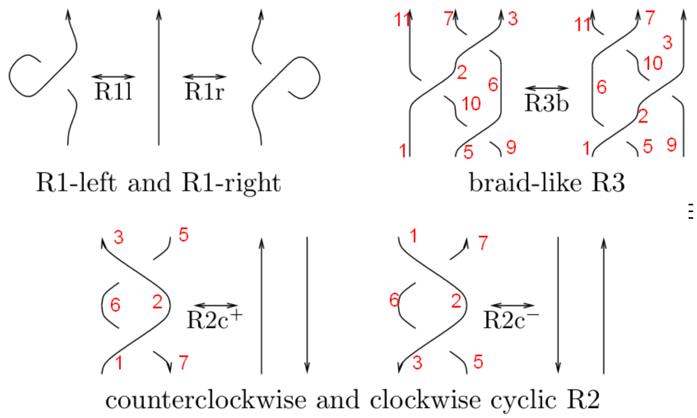
Out[∘]=

$$-\frac{-1 - A^2\,V_1 + A^6\,V_1}{A^2}$$

```
In[∘]:= AP@PD[X[2, 6, 3, 1], X[4, 1, 5, 2], X[5, 4, 6, 3]]
```

Out[∘]=

$$-\frac{V_1^2 + A^4\,V_1^2 - A^4\,V_2}{A^3}$$



In[∘]:=
```
AP@PD[X[5, 3, 6, 2], X[6, 1, 7, 2]]
```
Out[∘]=

$$-\frac{A^2 P_0[1,3]\,P_0[5,7]}{1+A^4}$$

In[∘]:=
```
AP@PD[X[5, 2, 6, 3], X[6, 2, 7, 1]]
```
Out[∘]=

$$-\frac{A^2 P_0[1,3]\,P_0[5,7]}{1+A^4}$$

In[∘]:=
```
lhs = AP@PD[X[9, 6, 10, 5], X[10, 2, 11, 1], X[6, 3, 7, 2]]
```
Out[∘]=

$$-\frac{1}{1+A^4}A\left(A^4 P_0[1,11]\,P_0[3,9]\,P_0[5,7]+P_{-2}[9,11]\,P_{-1}[3,7]\,P_1[1,5]+A^2 P_{-1}[7,11]\,P_0[3,9]\,P_1[1,5]+A^2 P_{-1}[3,7]\,P_0[1,11]\,P_1[5,9]+P_{-1}[7,11]\,P_1[5,9]\,P_2[1,3]\right)$$

In[∘]:=
```
rhs = AP@PD[X[5, 2, 6, 1], X[9, 3, 10, 2], X[10, 7, 11, 6]]
```
Out[∘]=

$$-\frac{1}{1+A^4}A\left(A^4 P_0[1,11]\,P_0[3,9]\,P_0[5,7]+P_{-2}[9,11]\,P_{-1}[3,7]\,P_1[1,5]+A^2 P_{-1}[7,11]\,P_0[3,9]\,P_1[1,5]+A^2 P_{-1}[3,7]\,P_0[1,11]\,P_1[5,9]+P_{-1}[7,11]\,P_1[5,9]\,P_2[1,3]\right)$$

In[∘]:=
```
lhs == rhs
```
Out[∘]=

True