

Pensive header: checking the local error in Runge-Kutta.

eqn = y' [x] - f[x, y[x]]

-f[x, y[x]] + y'[x]

Series[eqn, {x, 0, 1}]

(-f[0, y[0]] + y'[0]) + (y''[0] - y'[0] f^(0,1)[0, y[0]] - f^(1,0)[0, y[0]]) x + O[x]²

(# == 0) & /@ CoefficientList[Series[eqn, {x, 0, 1}], x] /. y[0] → 0

{-f[0, 0] + y'[0] == 0, y''[0] - y'[0] f^(0,1)[0, 0] - f^(1,0)[0, 0] == 0}

n = 3;

Solve[

(# == 0) & /@ CoefficientList[Series[eqn, {x, 0, n}], x] /. y[0] → 0,

Table[Derivative[k][y][0], {k, 1, n+1}]

]

{y'[0] → f[0, 0], y''[0] → f[0, 0] f^(0,1)[0, 0] + f^(1,0)[0, 0],
y⁽³⁾[0] → f[0, 0] f^(0,1)[0, 0]² + f[0, 0]² f^(0,2)[0, 0] +
f^(0,1)[0, 0] f^(1,0)[0, 0] + 2 f[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + f^(2,0)[0, 0],
y⁽⁴⁾[0] → f[0, 0] f^(0,1)[0, 0]³ + 4 f[0, 0]² f^(0,1)[0, 0] f^(0,2)[0, 0] +
f[0, 0]³ f^(0,3)[0, 0] + f^(0,1)[0, 0]² f^(1,0)[0, 0] + 3 f[0, 0] f^(0,2)[0, 0] f^(1,0)[0, 0] +
5 f[0, 0] f^(0,1)[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + 3 f^(1,0)[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + 3 f[0, 0]² f^(1,2)[0, 0] +
f^(0,1)[0, 0] f^(2,0)[0, 0] + 3 f[0, 0] f^(2,1)[0, 0] + f^(3,0)[0, 0]}

k₁ = h f[0, 0];

k₂ = h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ k₁];

k₃ = h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ k₂];

k₄ = h f[h, k₃];

y = $\frac{1}{6}$ (k₁ + 2 k₂ + 2 k₃ + k₄)

$\frac{1}{6}$ (h f[0, 0] + 2 h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ h f[0, 0]] +

2 h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ h f[0, 0]]) + h f[h, h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ h f[$\frac{h}{2}$, $\frac{1}{2}$ h f[0, 0]]])

Series[y, {h, 0, 4}]

f[0, 0] h + $\frac{1}{2}$ (f[0, 0] f^(0,1)[0, 0] + f^(1,0)[0, 0]) h² +

$\frac{1}{6}$ (f[0, 0] f^(0,1)[0, 0]² + f[0, 0]² f^(0,2)[0, 0] +

f^(0,1)[0, 0] f^(1,0)[0, 0] + 2 f[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + f^(2,0)[0, 0]) h³ +

$\frac{1}{24}$ (f[0, 0] f^(0,1)[0, 0]³ + 4 f[0, 0]² f^(0,1)[0, 0] f^(0,2)[0, 0] + f[0, 0]³ f^(0,3)[0, 0] +

f^(0,1)[0, 0]² f^(1,0)[0, 0] + 3 f[0, 0] f^(0,2)[0, 0] f^(1,0)[0, 0] +

5 f[0, 0] f^(0,1)[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + 3 f^(1,0)[0, 0] f^(1,1)[0, 0] + 3 f[0, 0]² f^(1,2)[0, 0] +

f^(0,1)[0, 0] f^(2,0)[0, 0] + 3 f[0, 0] f^(2,1)[0, 0] + f^(3,0)[0, 0]) h⁴ + O[h]⁵

$$\begin{aligned}
& f[0, 0] f^{(0,1)}[0, 0]^3 + 4 f[0, 0]^2 f^{(0,1)}[0, 0] f^{(0,2)}[0, 0] + \\
& f[0, 0]^3 f^{(0,3)}[0, 0] + f^{(0,1)}[0, 0]^2 f^{(1,0)}[0, 0] + 3 f[0, 0] f^{(0,2)}[0, 0] f^{(1,0)}[0, 0] + \\
& 5 f[0, 0] f^{(0,1)}[0, 0] f^{(1,1)}[0, 0] + 3 f^{(1,0)}[0, 0] f^{(1,1)}[0, 0] + 3 f[0, 0]^2 f^{(1,2)}[0, 0] + \\
& f^{(0,1)}[0, 0] f^{(2,0)}[0, 0] + 3 f[0, 0] f^{(2,1)}[0, 0] + f^{(3,0)}[0, 0] == \\
& f[0, 0] f^{(0,1)}[0, 0]^3 + 4 f[0, 0]^2 f^{(0,1)}[0, 0] f^{(0,2)}[0, 0] + f[0, 0]^3 f^{(0,3)}[0, 0] + \\
& f^{(0,1)}[0, 0]^2 f^{(1,0)}[0, 0] + 3 f[0, 0] f^{(0,2)}[0, 0] f^{(1,0)}[0, 0] + \\
& 5 f[0, 0] f^{(0,1)}[0, 0] f^{(1,1)}[0, 0] + 3 f^{(1,0)}[0, 0] f^{(1,1)}[0, 0] + \\
& 3 f[0, 0]^2 f^{(1,2)}[0, 0] + f^{(0,1)}[0, 0] f^{(2,0)}[0, 0] + 3 f[0, 0] f^{(2,1)}[0, 0] + f^{(3,0)}[0, 0]
\end{aligned}$$

True