Startup

In[ ]:=
```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\Projects\\SL2Portfolio2"];
<< KnotTheory`;
<< "../Profile/Profile.m";
<< "Engine-Speedy.m";
<< "Objects.m";
<< "KT.m";
BeginProfile[];
PopupWindow[Button["Show Profile Monitor"],
 Dynamic[PrintProfile[], UpdateInterval → 3, TrackedSymbols → {}]]
```

ParentDirectory: Argument File should be a positive machine-size integer, a nonempty string, or a File specification.

ParentDirectory: Argument File should be a positive machine-size integer, a nonempty string, or a File specification.

ToFileName: String or list of strings expected at position 1 in ToFileName[{File, WikiLink, mathematica}].

ToFileName: String or list of strings expected at position 1 in ToFileName[{File, QuantumGroups}].

```
Loading KnotTheory` version of January 20, 2015, 10:42:19.1122.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
This is Profile.m of http://www.drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/Profile/.
This version: June 2018. Original version: July 1994.
```

Out[ ]= Show Profile Monitor

In[ ]:=
```
$k = 2; (*ℏ=γ=1;*)
```

In[ ]:=
```
HL[ℰ_] := Style[ℰ, Background → If[TrueQ@ℰ, ■, ■]];
```

The q ops

In[ ]:= $\text{Define}[q\sigma_{i\to j} = \mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}[\alpha_i a_j + \eta_i y_j + \xi_i x_j]];\ q\sigma_{i\to j}$

Out[ ]= $\mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}[a_j \alpha_i, y_j \eta_i + x_j \xi_i, 1]$

In[ ]:= $\text{Define}[\text{det}_i = \mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}[\alpha_i a_i + \eta_i y_i + \xi_i x_i]];\ \text{det}_i$

Out[ ]= $\mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}[a_i \alpha_i, y_i \eta_i + x_i \xi_i, 1]$

In[ ]:= $\text{Define}[q\epsilon_i = d\epsilon_i \text{ // } \text{b2t}_i \text{ // } \text{det}_i];\ q\epsilon_i$
$\text{Define}[q\eta_i = \text{det}_i \text{ // } \text{t2b}_i \text{ // } d\eta_i];\ q\eta_i$

Out[ ]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i\}}\left[0, 0, 1 + O[\epsilon]^3\right]$

Out[ ]= $\mathbb{E}_{\{i\}\to\{\}}\left[0, 0, 1 + O[\epsilon]^3\right]$

In[∘]:=
$$\text{Define}\left[\text{qm}_{i,j\to k} = \left(\text{det}_i\ \text{det}_j\right)\ //\ \left(\text{t2b}_i\ \text{t2b}_j\right)\ //\ \text{dm}_{i,j\to k}\ //\ \text{b2t}_k\ //\ \text{det}_k\right];\ \text{qm}_{i,j\to k}$$

Out[∘]=
$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k\}}\Big[a_k\,\alpha_i + a_k\,\alpha_j,\ y_k\,\eta_i + \frac{y_k\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + \frac{x_k\,\xi_i}{\mathcal{A}_j} + x_k\,\xi_j,$$
$$1 + \left(2\,a_k\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\gamma\,\hbar\,x_k\,y_k\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j} - \frac{\gamma\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} - \frac{\gamma\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_j}\right)\epsilon +$$
$$\Bigg(-2\,\hbar\,a_k^2\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\gamma^2\,\hbar^2\,x_k\,y_k\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j} - \frac{\gamma^2\,\hbar\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{3\,\gamma\,\hbar\,a_k\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\gamma^2\,\hbar^2\,x_k\,y_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j} -$$
$$\frac{\gamma^2\,\hbar\,y_k^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{\mathcal{A}_i^2} + \frac{\gamma^2\,\hbar^2\,x_k^2\,y_k\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2} - \frac{\gamma^2\,\hbar\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_j} + \frac{3\,\gamma\,\hbar\,a_k\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_j} - \gamma\,a_k\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +$$
$$2\,a_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{\gamma^2\,\hbar^2\,x_k^2\,y_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2} - \frac{4\,\gamma^2\,\hbar\,x_k\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j} + \frac{2\,\gamma\,\hbar\,a_k\,x_k\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j} + \frac{\gamma^2\,y_k\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} -$$
$$\frac{2\,\gamma\,a_k\,y_k\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} - \frac{\gamma^2\,\hbar\,x_k\,y_k^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j} + \frac{\gamma^2\,y_k^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} - \frac{\gamma^2\,\hbar\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3}{\mathcal{A}_j^2} - \frac{\gamma^2\,\hbar\,x_k^2\,y_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2} +$$
$$\frac{\gamma^2\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{\mathcal{A}_j} - \frac{2\,\gamma\,a_k\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{\mathcal{A}_j} + \frac{\gamma^2\,x_k\,y_k\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j} + \frac{\gamma^2\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4}{2\,\mathcal{A}_j^2}\Bigg)\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

In[∘]:=
$$\text{Define}\left[\text{q}\Delta_{i\to j,k} = \text{det}_i\ //\ \text{t2b}_i\ //\ \text{d}\Delta_{i\to j,k}\ //\ \left(\text{b2t}_j\ \text{b2t}_k\right)\ //\ \left(\text{det}_j\ \text{det}_k\right)\right];\ \text{q}\Delta_{i\to j,k}$$

Out[∘]=
$$\mathbb{E}_{\{i\}\to\{j,k\}}\Big[a_j\,\alpha_i + a_k\,\alpha_i,\ y_j\,\eta_i + y_k\,\eta_i + x_j\,\xi_i + x_k\,\xi_i,$$
$$1 + \left(-\hbar\,a_j\,y_k\,\eta_i + \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar\,y_j\,y_k\,\eta_i^2 - \hbar\,a_j\,x_k\,\xi_i + \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar\,x_j\,x_k\,\xi_i^2\right)\epsilon +$$
$$\Bigg(\frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_j^2\,y_k\,\eta_i + \frac{1}{4}\,\gamma^2\,\hbar^2\,y_j\,y_k\,\eta_i^2 - \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,y_j\,y_k\,\eta_i^2 + \frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_j^2\,y_k^2\,\eta_i^2 + \frac{1}{6}\,\gamma^2\,\hbar^2\,y_j^2\,y_k\,\eta_i^3 + \frac{1}{6}\,\gamma^2\,\hbar^2\,y_j\,y_k^2\,\eta_i^3 -$$
$$\frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,y_j\,y_k^2\,\eta_i^3 + \frac{1}{8}\,\gamma^2\,\hbar^2\,y_j^2\,y_k^2\,\eta_i^4 + \frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_j^2\,x_k\,\xi_i + \hbar^2\,a_j^2\,x_k\,y_k\,\eta_i\,\xi_i - \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,x_k\,y_j\,y_k\,\eta_i^2\,\xi_i +$$
$$\frac{1}{4}\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_j\,x_k\,\xi_i^2 - \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,x_j\,x_k\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_j^2\,x_k^2\,\xi_i^2 - \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,x_j\,x_k\,y_k\,\eta_i\,\xi_i^2 + \frac{1}{4}\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_j\,x_k\,y_j\,y_k$$
$$\eta_i^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{6}\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_j^2\,x_k\,\xi_i^3 + \frac{1}{6}\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_j\,x_k^2\,\xi_i^3 - \frac{1}{2}\,\gamma\,\hbar^2\,a_j\,x_j\,x_k^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{8}\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_j^2\,x_k^2\,\xi_i^4\Bigg)\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

In[∘]:=
$$\text{Define}\left[\text{qS}_i = \text{det}_i\ //\ \text{t2b}_i\ //\ \text{dS}_i\ //\ \text{b2t}_i\ //\ \text{det}_i\right];\ \text{qS}_i$$
$$\text{Define}\left[\overline{\text{qS}}_i = \text{det}_i\ //\ \text{t2b}_i\ //\ \overline{\text{dS}}_i\ //\ \text{b2t}_i\ //\ \text{det}_i\right];\ \overline{\text{qS}}_i$$

Out[•]=
$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}\Big[-a_i\,\alpha_i,\ -y_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i - x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i,\\
&1+\Big(\gamma\hbar\, y_i\mathcal{A}_i\eta_i - \hbar\, a_i y_i\mathcal{A}_i\eta_i - \frac{1}{2}\gamma\hbar\, y_i^2\mathcal{A}_i^2\eta_i^2 - \hbar\, a_i x_i\mathcal{A}_i\xi_i + 2\, a_i\mathcal{A}_i\eta_i\xi_i -\\
&\quad \gamma\hbar\, x_i y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i + \gamma\, y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i - \frac{1}{2}\gamma\hbar\, x_i^2\mathcal{A}_i^2\xi_i^2 + \gamma\, x_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i^2\Big)\,\epsilon +\\
&\Big(-\frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2 y_i\mathcal{A}_i\eta_i + \gamma\hbar^2 a_i y_i\mathcal{A}_i\eta_i - \frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2 y_i\mathcal{A}_i\eta_i + \frac{7}{4}\gamma^2\hbar^2 y_i^2\mathcal{A}_i^2\eta_i^2 - 2\gamma\hbar^2 a_i y_i^2\mathcal{A}_i^2\eta_i^2 +\\
&\quad \frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2 y_i^2\mathcal{A}_i^2\eta_i^2 - \gamma^2\hbar^2 y_i^3\mathcal{A}_i^3\eta_i^3 + \frac{1}{2}\gamma\hbar^2 a_i y_i^3\mathcal{A}_i^3\eta_i^3 + \frac{1}{8}\gamma^2\hbar^2 y_i^4\mathcal{A}_i^4\eta_i^4 - \frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2 x_i\mathcal{A}_i\xi_i -\\
&\quad 2\gamma\hbar\, a_i\mathcal{A}_i\eta_i\xi_i + 2\hbar\, a_i^2\mathcal{A}_i\eta_i\xi_i + \frac{3}{2}\gamma^2\hbar^2 x_i y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i - 3\gamma\hbar^2 a_i x_i y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i +\\
&\quad \hbar^2 a_i^2 x_i y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i - 3\gamma^2\hbar\, y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i + 6\gamma\hbar\, a_i y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i - 2\hbar\, a_i^2 y_i\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i -\\
&\quad \frac{5}{2}\gamma^2\hbar^2 x_i y_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i + \frac{3}{2}\gamma\hbar^2 a_i x_i y_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i + 3\gamma^2\hbar\, y_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i^3\xi_i - 2\gamma\hbar\, a_i y_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i^3\xi_i +\\
&\quad \frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2 x_i y_i^3\mathcal{A}_i^4\eta_i^3\xi_i - \frac{1}{2}\gamma^2\hbar\, y_i^3\mathcal{A}_i^4\eta_i^4\xi_i + \frac{1}{4}\gamma^2\hbar^2 x_i^2\mathcal{A}_i^2\xi_i^2 - \gamma\hbar^2 a_i x_i^2\mathcal{A}_i^2\xi_i^2 + \frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2 x_i^2\mathcal{A}_i^2\xi_i^2 -\\
&\quad 2\gamma^2\hbar\, x_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i^2 + 4\gamma\hbar\, a_i x_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i^2 - 2\hbar\, a_i^2 x_i\mathcal{A}_i^2\eta_i\xi_i^2 - 2\gamma^2\hbar^2 x_i^2 y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i\xi_i^2 +\\
&\quad \frac{3}{2}\gamma\hbar^2 a_i x_i^2 y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i\xi_i^2 - \gamma\, a_i\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i^2 + 2\, a_i^2\mathcal{A}_i^2\eta_i^2\xi_i^2 + 5\gamma^2\hbar\, x_i y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i^2 - 4\gamma\hbar\, a_i x_i y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i^2 +\\
&\quad \frac{3}{4}\gamma^2\hbar^2 x_i^2 y_i^2\mathcal{A}_i^4\eta_i^2\xi_i^2 - \gamma^2 y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^3\xi_i^2 + 2\gamma\, a_i y_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^3\xi_i^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\hbar\, x_i y_i^2\mathcal{A}_i^4\eta_i^3\xi_i^2 +\\
&\quad \frac{1}{2}\gamma^2 y_i^2\mathcal{A}_i^4\eta_i^4\xi_i^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2 x_i^3\mathcal{A}_i^3\xi_i^3 + \frac{1}{2}\gamma\hbar^2 a_i x_i^3\mathcal{A}_i^3\xi_i^3 + 2\gamma^2\hbar\, x_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i\xi_i^3 - 2\gamma\hbar\, a_i x_i^2\mathcal{A}_i^3\eta_i\xi_i^3 +\\
&\quad \frac{1}{2}\gamma^2\hbar^2 x_i^3 y_i\mathcal{A}_i^4\eta_i\xi_i^3 - \gamma^2 x_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i^3 + 2\gamma\, a_i x_i\mathcal{A}_i^3\eta_i^2\xi_i^3 - \frac{3}{2}\gamma^2\hbar\, x_i^2 y_i\mathcal{A}_i^4\eta_i^2\xi_i^3 +\\
&\quad \gamma^2 x_i y_i\mathcal{A}_i^4\eta_i^3\xi_i^3 + \frac{1}{8}\gamma^2\hbar^2 x_i^4\mathcal{A}_i^4\xi_i^4 - \frac{1}{2}\gamma^2\hbar\, x_i^3\mathcal{A}_i^4\eta_i\xi_i^4 + \frac{1}{2}\gamma^2 x_i^2\mathcal{A}_i^4\eta_i^2\xi_i^4\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]
\end{aligned}
$$

Out[ ]=

$$\mathbb{E}_{\{i\}\to\{i\}}\Big[-a_i\,\alpha_i,\ -y_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i - x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i,$$

$$1 + \Big(-\hbar\,a_i\,y_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i - \frac{1}{2}\gamma\,\hbar\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2 + \gamma\,\hbar\,x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i - \hbar\,a_i\,x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i + 2\,a_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i\,\xi_i -$$

$$\gamma\,\hbar\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i + \gamma\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\gamma\,\hbar\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\xi_i^2 + \gamma\,x_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i^2\Big)\,\epsilon +$$

$$\Big(-\frac{1}{2}\hbar^2\,a_i^2\,y_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i + \frac{1}{4}\gamma^2\,\hbar^2\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2 - \gamma\,\hbar^2\,a_i\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2 + \frac{1}{2}\hbar^2\,a_i^2\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2 - \frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,y_i^3\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}\gamma\,\hbar^2\,a_i\,y_i^3\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3 + \frac{1}{8}\gamma^2\,\hbar^2\,y_i^4\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^4 - \frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i + \gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i - \frac{1}{2}\hbar^2\,a_i^2\,x_i\,\mathcal{A}_i\,\xi_i -$$

$$2\,\gamma\,\hbar\,a_i\,\mathcal{A}_i\,\eta_i\,\xi_i + 2\,\hbar\,a_i^2\,\mathcal{A}_i\,\eta_i\,\xi_i + \frac{3}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i - 3\,\gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i +$$

$$\hbar^2\,a_i^2\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i - 2\,\gamma^2\,\hbar\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i + 4\,\gamma\,\hbar\,a_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i - 2\,\hbar\,a_i^2\,y_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i -$$

$$2\,\gamma^2\,\hbar^2\,x_i\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i + \frac{3}{2}\gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i + 2\,\gamma^2\,\hbar\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3\,\xi_i - 2\,\gamma\,\hbar\,a_i\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3\,\xi_i +$$

$$\frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i\,y_i^3\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^3\,\xi_i - \frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar\,y_i^3\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^4\,\xi_i + \frac{7}{4}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\xi_i^2 - 2\,\gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}\hbar^2\,a_i^2\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\xi_i^2 -$$

$$3\,\gamma^2\,\hbar\,x_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i^2 + 6\,\gamma\,\hbar\,a_i\,x_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i^2 - 2\,\hbar\,a_i^2\,x_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i\,\xi_i^2 - \frac{5}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i^2\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{3}{2}\gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i^2\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i\,\xi_i^2 - \gamma\,a_i\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i^2 + 2\,a_i^2\,\mathcal{A}_i^2\,\eta_i^2\,\xi_i^2 + 5\,\gamma^2\,\hbar\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i^2 - 4\,\gamma\,\hbar\,a_i\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{3}{4}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i^2\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^2\,\xi_i^2 - \gamma^2\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3\,\xi_i^2 + 2\,\gamma\,a_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^3\,\xi_i^2 - \frac{3}{2}\gamma^2\,\hbar\,x_i\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^3\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{1}{2}\gamma^2\,y_i^2\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^4\,\xi_i^2 - \gamma^2\,\hbar^2\,x_i^3\,\mathcal{A}_i^3\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}\gamma\,\hbar^2\,a_i\,x_i^3\,\mathcal{A}_i^3\,\xi_i^3 + 3\,\gamma^2\,\hbar\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i\,\xi_i^3 - 2\,\gamma\,\hbar\,a_i\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i\,\xi_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i^3\,y_i\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i\,\xi_i^3 - \gamma^2\,x_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i^3 + 2\,\gamma\,a_i\,x_i\,\mathcal{A}_i^3\,\eta_i^2\,\xi_i^3 - \frac{3}{2}\gamma^2\,\hbar\,x_i^2\,y_i\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^2\,\xi_i^3 +$$

$$\gamma^2\,x_i\,y_i\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^3\,\xi_i^3 + \frac{1}{8}\gamma^2\,\hbar^2\,x_i^4\,\mathcal{A}_i^4\,\xi_i^4 - \frac{1}{2}\gamma^2\,\hbar\,x_i^3\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i\,\xi_i^4 + \frac{1}{2}\gamma^2\,x_i^2\,\mathcal{A}_i^4\,\eta_i^2\,\xi_i^4\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

In[•]:=
```
Define[qR_{i,j} = R_{i,j} // (b2t_i b2t_j) // (det_i det_j)]; qR_{i,j}
Define[q\bar{R}_{i,j} = \bar{R}_{i,j} // (b2t_i b2t_j) // (det_i det_j)]; q\bar{R}_{i,j}
Define[qC_i = C_i // b2t_i // det_i]; qC_i
Define[q\bar{C}_i = \bar{C}_i // b2t_i // det_i]; q\bar{C}_i
Define[qKink_i = Kink_i // b2t_i // det_i]; qKink_i
Define[q\overline{Kink}_i = \overline{Kink}_i // b2t_i // det_i]; q\overline{Kink}_i
```

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i,j\}}\left[0,\ \hbar x_j y_i,\ 1+\left(\frac{\hbar a_i a_j}{\gamma}-\frac{1}{4}\gamma\hbar^3 x_j^2 y_i^2\right)\epsilon+\left(\frac{\hbar^2 a_i^2 a_j^2}{2\gamma^2}-\frac{1}{4}\hbar^4 a_i a_j x_j^2 y_i^2+\frac{1}{9}\gamma^2\hbar^5 x_j^3 y_i^3+\frac{1}{32}\gamma^2\hbar^6 x_j^4 y_i^4\right)\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i,j\}}\left[0,\ -\hbar x_j y_i,\ 1+\left(-\frac{\hbar a_i a_j}{\gamma}-\hbar^2 a_i x_j y_i-\hbar^2 a_j x_j y_i-\frac{3}{4}\gamma\hbar^3 x_j^2 y_i^2\right)\epsilon+\left(\frac{\hbar^2 a_i^2 a_j^2}{2\gamma^2}-\frac{1}{2}\hbar^3 a_i^2 x_j y_i-\hbar^3 a_i a_j x_j y_i+\frac{\hbar^3 a_i^2 a_j x_j y_i}{\gamma}-\frac{1}{2}\hbar^3 a_j^2 x_j y_i+\frac{\hbar^3 a_i a_j^2 x_j y_i}{\gamma}+\frac{1}{2}\gamma^2\hbar^4 x_j^2 y_i^2-\frac{3}{2}\gamma\hbar^4 a_i x_j^2 y_i^2+\frac{1}{2}\hbar^4 a_i^2 x_j^2 y_i^2-\frac{3}{2}\gamma\hbar^4 a_j x_j^2 y_i^2+\frac{7}{4}\hbar^4 a_i a_j x_j^2 y_i^2+\frac{1}{2}\hbar^4 a_j^2 x_j^2 y_i^2-\frac{10}{9}\gamma^2\hbar^5 x_j^3 y_i^3+\frac{3}{4}\gamma\hbar^5 a_i x_j^3 y_i^3+\frac{3}{4}\gamma\hbar^5 a_j x_j^3 y_i^3+\frac{9}{32}\gamma^2\hbar^6 x_j^4 y_i^4\right)\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i\}}\left[0,\ 0,\ 1-\hbar a_i\epsilon+\frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i\}}\left[0,\ 0,\ 1+\hbar a_i\epsilon+\frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i\}}\left[0,\ \hbar x_i y_i,\ 1+\left(\hbar a_i+\frac{\hbar a_i^2}{\gamma}-\frac{1}{4}\gamma\hbar^3 x_i^2 y_i^2\right)\epsilon+\left(\frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2+\frac{\hbar^2 a_i^3}{\gamma}+\frac{\hbar^2 a_i^4}{2\gamma^2}-\frac{1}{4}\gamma\hbar^4 a_i x_i^2 y_i^2-\frac{1}{4}\hbar^4 a_i^2 x_i^2 y_i^2+\frac{1}{9}\gamma^2\hbar^5 x_i^3 y_i^3+\frac{1}{32}\gamma^2\hbar^6 x_i^4 y_i^4\right)\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{i\}}\left[0,\ -\hbar x_i y_i,\ 1+\left(-\hbar a_i-\frac{\hbar a_i^2}{\gamma}-2\hbar^2 a_i x_i y_i-\frac{3}{4}\gamma\hbar^3 x_i^2 y_i^2\right)\epsilon+\left(\frac{1}{2}\hbar^2 a_i^2+\frac{\hbar^2 a_i^3}{\gamma}+\frac{\hbar^2 a_i^4}{2\gamma^2}+\frac{2\hbar^3 a_i^3 x_i y_i}{\gamma}+\frac{1}{2}\gamma^2\hbar^4 x_i^2 y_i^2-\frac{9}{4}\gamma\hbar^4 a_i x_i^2 y_i^2+\frac{11}{4}\hbar^4 a_i^2 x_i^2 y_i^2-\frac{10}{9}\gamma^2\hbar^5 x_i^3 y_i^3+\frac{3}{2}\gamma\hbar^5 a_i x_i^3 y_i^3+\frac{9}{32}\gamma^2\hbar^6 x_i^4 y_i^4\right)\epsilon^2+O[\epsilon]^3\right]$

Testing

(co)-associativity

In[•]:=
```
Timing[
 HL /@ {(qΔ_{1→1,2} // qΔ_{2→2,3}) ≡ (qΔ_{1→1,3} // qΔ_{1→1,2}), (qm_{1,2→1} // qm_{1,3→1}) ≡ (qm_{2,3→2} // qm_{1,2->1})}]
```

Out[•]= {1.10938, {True, True}}

Δ is an algebra morphism

```
In[∘]:= Timing@HL[(qm_{1,2→1} // qΔ_{1→1,2}) ≡ ((qΔ_{1→1,3} qΔ_{2→2,4}) // (qm_{3,4→2} qm_{1,2→1}))]
Out[∘]= {1.3125, True}
```

qS and $\overline{\text{qS}}$ are inverses:

```
In[∘]:= Timing@HL[(\overline{qS}_1 // qS_1) ≡ qσ_{1→1}]
Out[∘]= {0.28125, True}
```

S_2 inverts R, but not S_1:

```
In[∘]:= Timing@{(qR_{1,2} // qS_1) ≡ \overline{qR}_{1,2}, HL[(qR_{1,2} // qS_2) ≡ \overline{qR}_{1,2}]}
Out[∘]= {0.1875,
```

$$\left\{\frac{1}{4}\left(4\gamma\epsilon\hbar^2 x_2 y_1 - 2\gamma^2\epsilon^2\hbar^3 x_2 y_1 + 4\gamma\epsilon^2\hbar^3 a_1 x_2 y_1 + 4\gamma\epsilon^2\hbar^3 a_2 x_2 y_1 - 4\epsilon^2\hbar^3 a_1 a_2 x_2 y_1 + 8\gamma^2\epsilon^2\hbar^4 x_2^2 y_1^2 - 4\gamma\epsilon^2\hbar^4 a_1 x_2^2 y_1^2 - 4\gamma\epsilon^2\hbar^4 a_2 x_2^2 y_1^2 - 3\gamma^2\epsilon^2\hbar^5 x_2^3 y_1^3\right) == 0, \text{True}\right\}\}$$

qS is convolution inverse of id

```
In[∘]:= Timing[HL[# ≡ qϵ_1 qη_1] & /@ {(qΔ_{1→1,2} // qS_1) // qm_{1,2→1}, (qΔ_{1→1,2} // qS_2) // qm_{1,2→1}}]
Out[∘]= {1.17188, {True, True}}
```

qS is a (co)-algebra anti-morphism

```
In[∘]:= Timing[HL /@
          Expand /@ {(qm_{1,2→1} // qS_1) ≡ ((qS_1 qS_2) // qm_{2,1→1}), (qS_1 // qΔ_{1→1,2}) ≡ (qΔ_{1→2,1} // (qS_1 qS_2))}]
Out[∘]= {2.04688, {True, True}}
```

Quasi-triangular axiom 1:

```
In[∘]:= Timing@HL[(qR_{1,2} // qΔ_{1→1,3}) ≡ ((qR_{1,4} qR_{3,2}) // qm_{2,4→2})]
Out[∘]= {0.171875, True}
```

```
In[∘]:= Timing@Block[{$k = 2}, HL /@ {((qC_i \overline{qC}_j) // qm_{i,j→i}) ≡ qϵ_i, ((\overline{qC}_i \overline{qC}_j) // qm_{i,j→i}) ≡
          (((qR_{1,2} // qS_1 // qm_{2,1→i}) // qS_i) (qR_{1,2} // qS_2 // qS_2 // qm_{2,1→j}) // qm_{i,j→i})}]
Out[∘]= {1.03125, {True, True}}
```

The Trefoil

In[∘]:=
```
Timing@Block[{$k = 4},
  Z31 = qR1,5 qR6,2 qR3,7 OverBar[qC4] OverBar[qKink8] OverBar[qKink9] OverBar[qKink10];
  Do[Z31 = Z31 // qm1,r→1, {r, 2, 10}];
  {Simplify /@ Z31}]
```

Out[∘]=

$$\Big\{433.609,\ \Big\{\mathbb{E}_{\{\}\to\{1\}}\Big[0,\,0,\,1-4\left(\gamma\,\hbar^2\,x_1\,y_1\right)\in+\hbar^2\left(-4\,a_1^2+\gamma^2\,\hbar\,x_1\,y_1\left(8+15\,\hbar\,x_1\,y_1\right)-4\,a_1\left(\gamma+\gamma\,\hbar\,x_1\,y_1\right)\right)\in^2-\frac{1}{3}\Big(\gamma\,\hbar^3\Big(-12\,a_1^2\left(2+7\,\hbar\,x_1\,y_1\right)-6\,\gamma\,a_1\left(4+4\,\hbar\,x_1\,y_1+15\,\hbar^2\,x_1^2\,y_1^2\right)+\gamma^2\,\hbar\,x_1\,y_1\left(62+279\,\hbar\,x_1\,y_1+168\,\hbar^2\,x_1^2\,y_1^2\right)\Big)\Big)\in^3+\frac{1}{12}\,\hbar^4\Big(176\,a_1^4+352\,a_1^3\left(\gamma+\gamma\,\hbar\,x_1\,y_1\right)-24\,\gamma^2\,a_1^2\left(3+76\,\hbar\,x_1\,y_1+69\,\hbar^2\,x_1^2\,y_1^2\right)-8\,\gamma^3\,a_1\left(31+31\,\hbar\,x_1\,y_1+27\,\hbar^2\,x_1^2\,y_1^2+252\,\hbar^3\,x_1^3\,y_1^3\right)+\gamma^4\,\hbar\,x_1\,y_1\left(800+4197\,\hbar\,x_1\,y_1+8448\,\hbar^2\,x_1^2\,y_1^2+2508\,\hbar^3\,x_1^3\,y_1^3\right)\Big)\in^4+O[\in]^5\Big]\Big\}\Big\}$$