In[ ]:=
```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\Projects\\SL2Portfolio2"];
<< KnotTheory`;
<< "../Profile/Profile.m";
<< "Engine-Speedy.m";
<< "Objects.m";
<< "KT.m";
PP_w_ := Identity
HL[ℰ_] := Style[ℰ, Background → Green];
```

ParentDirectory: Argument File should be a positive machine-size integer, a nonempty string, or a File specification.

ParentDirectory: Argument File should be a positive machine-size integer, a nonempty string, or a File specification.

ToFileName: String or list of strings expected at position 1 in ToFileName[{File, WikiLink, mathematica}].

ToFileName: String or list of strings expected at position 1 in ToFileName[{File, QuantumGroups}].

```
Loading KnotTheory` version of January 20, 2015, 10:42:19.1122.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
```

```
This is Profile.m of http://www.drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/Profile/.
```

```
This version: June 2018. Original version: July 1994.
```

In[ ]:=
```
$k = 2; γ = 1;
```

Using Dror’s Objects and Speedy engine downloaded in August 2019 from http://drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/SL2Portfolio2/

Recall the double multiplication was defined as:

$$\text{Define}\Big[\, dm_{i,j\to k} = \Big(\big(s\Upsilon_{i\to 4,4,1,1} \,//\, a\Delta_{1\to 1,2} \,//\, a\Delta_{2\to 2,3} \,//\, \overline{aS}_3\big)\, \big(s\Upsilon_{j\to -1,-1,-4,-4} \,//\, b\Delta_{-1\to -1,-2} \,//\, b\Delta_{-2\to -2,-3}\big)\Big) \,//\, \big(P_{-1,3}\, P_{-3,1}\, am_{2,-4\to k}\, bm_{4,-2\to k}\big)\Big]$$

The essential bit that is hard to justify due to the cancellation of terms $\frac{1}{\hbar}$ is this:

In[∘]:= $\mathtt{EssentialBit} = a\Delta_{i\to l,2} \;/\!/\; a\Delta_{2\to k,3} \;/\!/\; \overline{aS}_3\, b\Delta_{j\to -1,-2} \;/\!/\; b\Delta_{-2\to l,-3} \;/\!/\; (P_{-1,3}\, P_{-3,1})$

Out[∘]=

$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k,l\}}\Big[a_k\,\alpha_i + b_l\,\beta_j,\ \frac{y_l\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + x_k\,\xi_i + \frac{(1-B_l)\,\eta_j\,\xi_i}{\hbar},$$

$$1 + \Big(-x_k\,\beta_j\,\xi_i + a_k\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{(1-3B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{1}{2}(1-3B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{(1-4B_l+3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\hbar}\Big)\,\epsilon +$$

$$\Big(\frac{1}{2}x_k\,\beta_j^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\hbar\,a_k^2\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} - \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{3\,\hbar\,a_k\,B_l\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{6\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{2}x_k^2\,\beta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{3}{2}\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{1}{4}(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} - a_k\,B_l\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 -$$

$$\frac{\hbar\,x_k^2\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}a_k^2\,B_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}a_k\,(2B_l-3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{8}(1-6B_l+5B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(5\,\hbar-21\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(-1+3B_l)\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{a_k\,(B_l-3B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(5-34B_l+41B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{12\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(1-6B_l+9B_l^2)\,y_l^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{8\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{6}(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}a_k\,(B_l-3B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{12}(5-34B_l+41B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(-1+4B_l-3B_l^2)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{4\,\hbar} + \frac{(5-39B_l+75B_l^2-41B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{36\,\hbar} + \frac{a_k\,(B_l-4B_l^2+3B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{4\,\hbar} +$$

$$\frac{(1-5B_l+6B_l^2)\,x_k\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,y_l\,\eta_j^4\,\xi_i^3}{8\,\hbar\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{8}(1-6B_l+9B_l^2)\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4 +$$

$$\frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,x_k\,\eta_j^3\,\xi_i^4}{8\,\hbar} + \frac{(1-8B_l+22B_l^2-24B_l^3+9B_l^4)\,\eta_j^4\,\xi_i^4}{32\,\hbar^2}\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

Rewriting it step by step using the definition of Δ to move all pairings to the left and all R-matrices to the right we see the essential bit is the dual of something simpler, let’s call that the core.

In[∘]:= $(R_{\$1,1}\,R_{\$2,2}) \;/\!/\; bm_{\$1,\$2\to\$3} \;/\!/\; P_{\$3,i} \;/\!/\; (R_{\$1,k}\,R_{\$2,3}) \;/\!/\; bm_{\$1,\$2\to\$3} \;/\!/\; P_{\$3,2} \;/\!/\; \overline{aS}_3\, b\Delta_{j\to -1,-2} \;/\!/\; b\Delta_{-2\to l,-3} \;/\!/\; (P_{-1,3}\,P_{-3,1})$

$(R_{b1,1}\,R_{bb1,k}\,R_{bb2,3}) \;/\!/\; bm_{bb1,bb2\to bb3} \;/\!/\; bm_{b1,bb3\to b3} \;/\!/\; P_{b3,i} \;/\!/\; \left(\overline{aS}_3\,R_{m1,a1}\,R_{l,aa1}\,R_{m3,aa2}\right) \;/\!/\; am_{aa1,aa2\to a2} \;/\!/\; am_{a1,a2\to a3} \;/\!/\; P_{j,a3} \;/\!/\; (P_{m1,3}\,P_{m3,1})$

$(R_{b1,1}\,R_{bb1,k}\,R_{bb2,3}\,R_{l,aa1}) \;/\!/\; bm_{bb1,bb2\to bb3} \;/\!/\; bm_{b1,bb3\to b3} \;/\!/\; (\overline{aS}_3) \;/\!/\; am_{aa1,1\to a2} \;/\!/\; am_{3,a2\to a3} \;/\!/\; P_{j,a3} \;/\!/\; P_{b3,i}$

$(R_{bb1,k}\,R_{l,aa1}) \;/\!/\; (R_{b1,1}\,R_{bb2,3}) \;/\!/\; bm_{bb1,bb2\to bb3} \;/\!/\; bm_{b1,bb3\to b3} \;/\!/\; (\overline{aS}_3) \;/\!/\; am_{aa1,1\to a2} \;/\!/\; am_{3,a2\to a3} \;/\!/\; (P_{j,a3}\,P_{b3,i})$

Out[∘]=

$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k,l\}}\Big[a_k\,\alpha_i + b_l\,\beta_j,\ \frac{y_l\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + x_k\,\xi_i + \frac{(1-B_l)\,\eta_j\,\xi_i}{\hbar},$$

$$1 + \Big(-x_k\,\beta_j\,\xi_i + a_k\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{(1-3\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{1}{2}\,(1-3\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{(1-4\,B_l+3\,B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\hbar}\Big)\,\epsilon +$$

$$\Big(\frac{1}{2}\,x_k\,\beta_j^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\,\hbar\,a_k^2\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} - \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{3\,\hbar\,a_k\,B_l\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{6\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{2}\,x_k^2\,\beta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{3}{2}\,\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{1}{4}\,(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} - a_k\,B_l\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}\,(-1+3\,B_l)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 -$$

$$\frac{\hbar\,x_k^2\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}\,a_k^2\,B_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}\,a_k\,(2\,B_l-3\,B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{8}\,(1-6\,B_l+5\,B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(5\,\hbar-21\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(-1+3\,B_l)\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{a_k\,(B_l-3\,B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(5-34\,B_l+41\,B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{12\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(1-6\,B_l+9\,B_l^2)\,y_l^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{8\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{6}\,(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}\,(-1+3\,B_l)\,x_k^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}\,a_k\,(B_l-3\,B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{12}\,(5-34\,B_l+41\,B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(-1+4\,B_l-3\,B_l^2)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{4\,\hbar} + \frac{(5-39\,B_l+75\,B_l^2-41\,B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{36\,\hbar} + \frac{a_k\,(B_l-4\,B_l^2+3\,B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{4\,\hbar} +$$

$$\frac{(1-5\,B_l+6\,B_l^2)\,x_k\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(1-7\,B_l+15\,B_l^2-9\,B_l^3)\,y_l\,\eta_j^4\,\xi_i^3}{8\,\hbar\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{8}\,(1-6\,B_l+9\,B_l^2)\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4 +$$

$$\frac{(1-7\,B_l+15\,B_l^2-9\,B_l^3)\,x_k\,\eta_j^3\,\xi_i^4}{8\,\hbar} + \frac{(1-8\,B_l+22\,B_l^2-24\,B_l^3+9\,B_l^4)\,\eta_j^4\,\xi_i^4}{32\,\hbar^2}\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

Out[•]=

$$
\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k,l\}}\Big[a_k\,\alpha_i + b_l\,\beta_j,\ \frac{y_l\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + x_k\,\xi_i + \frac{(1-B_l)\,\eta_j\,\xi_i}{\hbar},\\
&1 + \Big(-x_k\,\beta_j\,\xi_i + a_k\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{(1-3B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +\\
&\quad \frac{1}{2}(1-3B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{(1-4B_l+3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\hbar}\Big)\,\epsilon +\\
&\Big(\frac{1}{2}x_k\,\beta_j^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\hbar\,a_k^2\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} - \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{3\,\hbar\,a_k\,B_l\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +\\
&\quad \frac{(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{6\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{2}x_k^2\,\beta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{3}{2}\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 +\\
&\quad \frac{1}{4}(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} - a_k\,B_l\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 -\\
&\quad \frac{\hbar\,x_k^2\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}a_k^2\,B_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}a_k\,(2B_l-3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{8}(1-6B_l+5B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +\\
&\quad \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(5\,\hbar-21\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(-1+3B_l)\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} +\\
&\quad \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{a_k\,(B_l-3B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(5-34B_l+41B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{12\,\mathcal{A}_i} +\\
&\quad \frac{(1-6B_l+9B_l^2)\,y_l^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{8\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{6}(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^3 +\\
&\quad \frac{1}{2}a_k\,(B_l-3B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{12}(5-34B_l+41B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} +\\
&\quad \frac{(-1+4B_l-3B_l^2)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{4\,\hbar} + \frac{(5-39B_l+75B_l^2-41B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{36\,\hbar} + \frac{a_k\,(B_l-4B_l^2+3B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{4\,\hbar} +\\
&\quad \frac{(1-5B_l+6B_l^2)\,x_k\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,y_l\,\eta_j^4\,\xi_i^3}{8\,\hbar\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{8}(1-6B_l+9B_l^2)\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4 +\\
&\quad \frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,x_k\,\eta_j^3\,\xi_i^4}{8\,\hbar} + \frac{(1-8B_l+22B_l^2-24B_l^3+9B_l^4)\,\eta_j^4\,\xi_i^4}{32\,\hbar^2}\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]
\end{aligned}
$$

Out[ ]=

$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k,l\}}\Big[a_k\,\alpha_i + b_l\,\beta_j,\ \frac{y_l\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + x_k\,\xi_i + \frac{(1-B_l)\,\eta_j\,\xi_i}{\hbar},$$

$$1 + \Big(-x_k\,\beta_j\,\xi_i + a_k\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{(1-3B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}(1-3B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{(1-4B_l+3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\hbar}\Big)\,\epsilon +$$

$$\Big(\frac{1}{2}x_k\,\beta_j^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\hbar\,a_k^2\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} - \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{3\,\hbar\,a_k\,B_l\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{6\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{2}x_k^2\,\beta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{3}{2}\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{1}{4}(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} - a_k\,B_l\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 -$$

$$\frac{\hbar\,x_k^2\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}a_k^2\,B_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}a_k\,(2B_l-3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{8}(1-6B_l+5B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(5\,\hbar-21\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(-1+3B_l)\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{a_k\,(B_l-3B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(5-34B_l+41B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{12\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(1-6B_l+9B_l^2)\,y_l^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{8\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{6}(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}a_k\,(B_l-3B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{12}(5-34B_l+41B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(-1+4B_l-3B_l^2)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{4\,\hbar} + \frac{(5-39B_l+75B_l^2-41B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{36\,\hbar} + \frac{a_k\,(B_l-4B_l^2+3B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{4\,\hbar} +$$

$$\frac{(1-5B_l+6B_l^2)\,x_k\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,y_l\,\eta_j^4\,\xi_i^3}{8\,\hbar\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{8}(1-6B_l+9B_l^2)\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4 +$$

$$\frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,x_k\,\eta_j^3\,\xi_i^4}{8\,\hbar} + \frac{(1-8B_l+22B_l^2-24B_l^3+9B_l^4)\,\eta_j^4\,\xi_i^4}{32\,\hbar^2}\Big)\,\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

Out[∘]=

$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k,l\}}\Big[a_k\,\alpha_i + b_l\,\beta_j,\ \frac{y_l\,\eta_j}{\mathcal{A}_i} + x_k\,\xi_i + \frac{(1-B_l)\,\eta_j\,\xi_i}{\hbar},$$

$$1 + \left(-x_k\,\beta_j\,\xi_i + a_k\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{(1-3B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}(1-3B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{(1-4B_l+3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\hbar}\right)\epsilon +$$

$$\left(\frac{1}{2}x_k\,\beta_j^2\,\xi_i - \frac{1}{2}\hbar\,a_k^2\,B_l\,\eta_j\,\xi_i + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l\,\eta_j\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} - \frac{\hbar\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i}{\mathcal{A}_i} + \frac{\hbar^2\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{3\,\hbar\,a_k\,B_l\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{2\,\mathcal{A}_i} + \right.$$

$$\frac{(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i}{6\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{2}x_k^2\,\beta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{3}{2}\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{1}{4}(\hbar-5\,\hbar\,B_l)\,x_k\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l\,\eta_j\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} - a_k\,B_l\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2 -$$

$$\frac{\hbar\,x_k^2\,y_l\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{1}{2}a_k^2\,B_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{2}a_k\,(2B_l-3B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \frac{1}{8}(1-6B_l+5B_l^2)\,\eta_j^2\,\xi_i^2 +$$

$$\frac{\hbar^2\,x_k^2\,y_l^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{\hbar\,a_k\,B_l\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{\mathcal{A}_i} + \frac{(5\,\hbar-21\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{4\,\mathcal{A}_i} + \frac{(-1+3B_l)\,x_k\,y_l\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k\,y_l^2\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{a_k\,(B_l-3B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(5-34B_l+41B_l^2)\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^2}{12\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(1-6B_l+9B_l^2)\,y_l^2\,\eta_j^4\,\xi_i^2}{8\,\mathcal{A}_i^2} + \frac{1}{6}(\hbar-7\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,\eta_j\,\xi_i^3 + \frac{1}{2}(-1+3B_l)\,x_k^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i^3 +$$

$$\frac{1}{2}a_k\,(B_l-3B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{1}{12}(5-34B_l+41B_l^2)\,x_k\,\eta_j^2\,\xi_i^3 + \frac{(\hbar-3\,\hbar\,B_l)\,x_k^2\,y_l\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} +$$

$$\frac{(-1+4B_l-3B_l^2)\,x_k\,\beta_j\,\eta_j^2\,\xi_i^3}{4\,\hbar} + \frac{(5-39B_l+75B_l^2-41B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{36\,\hbar} + \frac{a_k\,(B_l-4B_l^2+3B_l^3)\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{4\,\hbar} +$$

$$\frac{(1-5B_l+6B_l^2)\,x_k\,y_l\,\eta_j^3\,\xi_i^3}{2\,\mathcal{A}_i} + \frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,y_l\,\eta_j^4\,\xi_i^3}{8\,\hbar\,\mathcal{A}_i} + \frac{1}{8}(1-6B_l+9B_l^2)\,x_k^2\,\eta_j^2\,\xi_i^4 +$$

$$\left.\frac{(1-7B_l+15B_l^2-9B_l^3)\,x_k\,\eta_j^3\,\xi_i^4}{8\,\hbar} + \frac{(1-8B_l+22B_l^2-24B_l^3+9B_l^4)\,\eta_j^4\,\xi_i^4}{32\,\hbar^2}\right)\epsilon^2 + O[\epsilon]^3\Big]$$

And the core is:

In[∘]:=
$$(R_{b1,1}\,R_{bb2,3})\ //\ bm_{bb1,bb2\to bb3}\ //\ bm_{b1,bb3\to b3}\ //\ (\overline{aS}_3)\ //\ am_{aa1,1\to a2}\ //\ am_{3,a2\to a3}$$

Out[∘]=
$$\mathbb{E}_{\{aa1,bb1\}\to\{a3,b3\}}\Big[a_{a3}\,\alpha_{aa1}+b_{b3}\,\beta_{bb1},$$
$$\frac{x_{a3}\,y_{b3}\,(-\hbar+\hbar\,\mathcal{A}_{aa1})}{\mathcal{A}_{aa1}}+y_{b3}\,\eta_{bb1}+B_{b3}\,x_{a3}\,\xi_{aa1},\ 1+\Big(\frac{x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,(\hbar^3-\hbar^3\,\mathcal{A}_{aa1}^2)}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^2}+\frac{\hbar\,x_{a3}\,y_{b3}\,\beta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}}-$$
$$\hbar\,a_{a3}\,y_{b3}\,\eta_{bb1}-\frac{\hbar^2\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}}-\frac{\hbar^2\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\hbar\,B_{b3}\,x_{a3}\,y_{b3}\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}\Big)\,\epsilon+$$
$$\Big(\frac{x_{a3}^3\,y_{b3}^3\,(-\hbar^5+\hbar^5\,\mathcal{A}_{aa1}^3)}{9\,\mathcal{A}_{aa1}^3}+\frac{x_{a3}^4\,y_{b3}^4\,(\hbar^6-2\,\hbar^6\,\mathcal{A}_{aa1}^2+\hbar^6\,\mathcal{A}_{aa1}^4)}{32\,\mathcal{A}_{aa1}^4}-\frac{\hbar^3\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}}{2\,\mathcal{A}_{aa1}^2}+$$
$$\frac{x_{a3}^3\,y_{b3}^3\,(\hbar^4-\hbar^4\,\mathcal{A}_{aa1}^2)\,\beta_{bb1}}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^3}+\frac{\hbar^2\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}^2}-\frac{\hbar\,x_{a3}\,y_{b3}\,\beta_{bb1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_{a3}^2\,y_{b3}\,\eta_{bb1}+$$
$$\frac{\hbar^4\,x_{a3}^2\,y_{b3}^3\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}^2}-\frac{\hbar^3\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}}{2\,\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{\hbar^3\,a_{a3}\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{a_{a3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}^3\,(-\hbar^4+\hbar^4\,\mathcal{A}_{aa1}^2)\,\eta_{bb1}}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^2}+$$
$$\frac{x_{a3}^3\,y_{b3}^4\,(-\hbar^5+\hbar^5\,\mathcal{A}_{aa1}^2)\,\eta_{bb1}}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^3}-\frac{\hbar^3\,x_{a3}^2\,y_{b3}^3\,\beta_{bb1}\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}^2}+\frac{\hbar^2\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}}-$$
$$\frac{\hbar^2\,a_{a3}\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}\,\eta_{bb1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{1}{2}\,\hbar^2\,a_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}^2+\frac{\hbar^4\,x_{a3}^2\,y_{b3}^4\,\eta_{bb1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}^2}-\frac{\hbar^3\,x_{a3}\,y_{b3}^3\,\eta_{bb1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{\hbar^3\,a_{a3}\,x_{a3}\,y_{b3}^3\,\eta_{bb1}^2}{\mathcal{A}_{aa1}}+$$
$$\frac{\hbar^4\,B_{b3}\,x_{a3}^3\,y_{b3}^2\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}^2}-\frac{\hbar^3\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}\,\xi_{aa1}}{2\,\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{x_{a3}^4\,y_{b3}^3\,(-\hbar^5\,B_{b3}+\hbar^5\,B_{b3}\,\mathcal{A}_{aa1}^2)\,\xi_{aa1}}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^3}-$$
$$\frac{\hbar^3\,B_{b3}\,x_{a3}^3\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}^2}+\frac{\hbar^2\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}\,\beta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{1}{2}\,\hbar^2\,B_{b3}\,x_{a3}\,y_{b3}\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}-$$
$$\hbar^2\,a_{a3}\,B_{b3}\,x_{a3}\,y_{b3}\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}-\frac{3\,\hbar^3\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{\hbar^3\,a_{a3}\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+$$
$$\frac{x_{a3}^3\,y_{b3}^3\,(5\,\hbar^4\,B_{b3}-\hbar^4\,B_{b3}\,\mathcal{A}_{aa1}^2)\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{4\,\mathcal{A}_{aa1}^2}+\frac{\hbar^2\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\beta_{bb1}\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{1}{2}\,\hbar^2\,B_{b3}\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}^2\,\xi_{aa1}-$$
$$\hbar^2\,a_{a3}\,B_{b3}\,x_{a3}\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}^2\,\xi_{aa1}-\frac{\hbar^3\,B_{b3}\,x_{a3}^2\,y_{b3}^3\,\eta_{bb1}^2\,\xi_{aa1}}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{\hbar^4\,B_{b3}^2\,x_{a3}^4\,y_{b3}^2\,\xi_{aa1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}^2}-\frac{\hbar^3\,B_{b3}^2\,x_{a3}^3\,y_{b3}\,\xi_{aa1}^2}{2\,\mathcal{A}_{aa1}}+$$
$$\frac{1}{2}\,\hbar^2\,B_{b3}^2\,x_{a3}^2\,y_{b3}\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}^2-\frac{\hbar^3\,B_{b3}^2\,x_{a3}^3\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}\,\xi_{aa1}^2}{\mathcal{A}_{aa1}}+\frac{1}{2}\,\hbar^2\,B_{b3}^2\,x_{a3}^2\,y_{b3}^2\,\eta_{bb1}^2\,\xi_{aa1}^2\Big)\,\epsilon^2+O[\epsilon]^3\Big]$$

As the pairing is technically inaccessible we prefer to compute the dual of the core using the Fake Pairing FP

In[∘]:=
$$\text{Define}[FP_{i,j}=P_{i,j}\ /.\ U2l\ /.\ \{\alpha_j\to\hbar\,\alpha_j,\ \xi_j\to\hbar\,\xi_j\}\ /.\ l2U]$$

In[∘]:=
$$R_{3,2}\ //\ FP_{1,2}$$

Out[∘]=
$$\mathbb{E}_{\{1\}\to\{3\}}\big[\hbar\,b_3\,\beta_1,\ \hbar\,y_3\,\eta_1,\ 1+O[\epsilon]^3\big]$$

In[∘]:=
$$FP_{i,j}$$

Out[∘]=
$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{\}}\Big[\alpha_j\,\beta_i,\ \eta_i\,\xi_j,$$
$$1+\frac{1}{4}\,\hbar\,\eta_i^2\,\xi_j^2\,\epsilon+\Big(\frac{1}{8}\,\hbar^2\,\eta_i^2\,\xi_j^2+\frac{1}{4}\,\hbar^2\,\eta_i^3\,\xi_j^3+\frac{1}{16}\,\hbar^2\,\eta_i^4\,\xi_j^4+\frac{-32\,\hbar^4\,\eta_i^3\,\xi_j^3-9\,\hbar^4\,\eta_i^4\,\xi_j^4}{288\,\hbar^2}\Big)\,\epsilon^2+O[\epsilon]^3\Big]$$

Faking the essential bit:

In[◦]:=
```
(((( R_{bb1,k} R_{1,aa1}) // (R_{b1,1} R_{bb2,3}) // bm_{bb1,bb2→bb3} // bm_{b1,bb3→b3} // (aS̄_3) // am_{aa1,1→a2} // am_{3,a2→a3} //
      (FP_{j,a3} FP_{b3,i})) /. U2l /.
    {α_i → ħ^-1 α_i, ξ_i → ħ^-1 ξ_i, β_j → ħ^-1 β_j, η_j → ħ^-1 η_j} /. l2U) //. l2U) ≡ EssentialBit
```

Out[◦]= True

With hindsight the operations aΔ,bΔ, aS, $\overline{\text{aS}}$,bS, $\overline{\text{bS}}$ can all be computed using a similar argument with the Fake Pairing FP.

In[◦]:=