Pensieve header: Normally Ordered Exponentials at 1-Co.

"NO" for “Normal Order”.

```
ϵ /: ϵ^2 := 0;
Λ[b_, c_, u_, w_, α_, β_, δ_, ν_] :=
  2 c w α δ ν + 2 c u β δ ν + 2 c u w δ^2 ν + u w^2 α δ^2 ν^3 - 1/2 b u^2 w^2 δ^4 ν^3 + 1/2 w^2 α^2 δ (2 + b δ) ν^3 -
   u^2 w β δ^2 (1 + 2 b δ) ν^3 - 1/2 u^2 β^2 δ (2 + 3 b δ) ν^3 + 2 c (δ + α β ν) - 2 b u w δ^2 ν^2 (δ + α β ν) +
   w α ν^2 (2 δ + α β ν) - u β (1 + 2 b δ) ν^2 (2 δ + α β ν) - 1/2 b ν (2 δ^2 + 4 α β δ ν + α^2 β^2 ν^2);

Simp[P_ . 𝔼[Q_]] := Together[P] 𝔼[Together[Q]];
P1_ . 𝔼[Q1_] ≡ P2_ . 𝔼[Q2_] := Simplify[P1 == P2 ⋀ Q1 == Q2];

𝔼 /: 𝔼[Q1_] 𝔼[Q2_] := Simp@𝔼[Q1 + Q2]

NO[u_i_, c_j_, k_][P_ . 𝔼[Q_]] := Simp@Module[{α = ∂_{c_j} Q, β = ∂_{u_i} Q, Θ = Q /. c_j | u_i → 0},
    (P /. {c_j → -ℯ^-α β u_k + c_k, u_i → ℯ^-α u_k}) 𝔼[ℯ^-α β u_k + α c_k + Θ]
   ];
NO[w_i_, c_j_, k_][P_ . 𝔼[Q_]] := Simp@Module[{α = ∂_{c_j} Q, β = ∂_{w_i} Q, Θ = Q /. c_j | w_i → 0},
    (P /. {c_j → ℯ^α β u_k + c_k, w_i → ℯ^α w_k}) 𝔼[ℯ^α β w_k + α c_k + Θ]
   ];
NO[w_i_, u_j_, k_][P_ . 𝔼[Q_]] :=
  Simp@Module[{α = ∂_{w_i} Q /. u_j → 0, β = ∂_{u_j} Q /. w_i → 0, δ = ∂_{w_i,u_j} Q, Θ = Q /. w_i | u_j → 0, ν},
    ν = (1 + b_k δ)^-1;
    Expand[(P /. {w_i -> -b_k ν β + ν w_k, u_j -> -b_k ν α + ν u_k}) ν
        (1 + ϵ ν Λ[b_k, c_k, u_k, w_k, α, β, δ, ν])] 𝔼[-b_k ν α β + ν β u_k + ν δ u_k w_k + ν α w_k + Θ]
   ];

m[i_, j_, kk_][Z_] := Simp@Module[{x, y},
   Z // ReplaceAll[b_{i|j} → b_kk] // NO[w_i, c_j, x] // NO[w_x, u_j, y] //
     ReplaceAll[{c_{x|y} → c_x, w_j → w_y}] // NO[u_i, c_x, x] //
    ReplaceAll[{c_{i|x} → c_kk, u_{x|y} → u_kk, w_y → w_kk, b_{x|y} → b_kk}]
  ]

Rp[i_, j_] := 𝔼[b_i c_j + (ℯ^b_i - 1)/b_i u_i w_j];
Rm[i_, j_] := 𝔼[-b_i c_j + (ℯ^-b_i - 1)/b_i u_i w_j];

NO[u_1, c_1, 1][𝔼[b_2 c_1 + w_2 u_1 + u_3 w_4]]
𝔼[ℯ^-b_2 (ℯ^b_2 b_2 c_1 + u_1 w_2 + ℯ^b_2 u_3 w_4)]

Q0 = 𝔼[Sum[β_i c_i, {i, 3}] + Sum[α_{i,j} u_i w_j, {i, 3}, {j, 3}]]
𝔼[c_1 β_1 + c_2 β_2 + c_3 β_3 + u_1 w_1 α_{1,1} + u_1 w_2 α_{1,2} + u_1 w_3 α_{1,3} +
  u_2 w_1 α_{2,1} + u_2 w_2 α_{2,2} + u_2 w_3 α_{2,3} + u_3 w_1 α_{3,1} + u_3 w_2 α_{3,2} + u_3 w_3 α_{3,3}]
```

```
Q0 = 𝔼[0 Sum[RandomInteger[{-2, 2}] c_i, {i, 3}] +
    Sum[RandomInteger[{-2, 2}] u_i w_j, {i, 3}, {j, 3}]]
```

$$\mathbb{E}[-2\,u_1\,w_1 - u_2\,w_1 - 2\,u_3\,w_1 - 2\,u_2\,w_2 + u_3\,w_2 + 2\,u_1\,w_3 - 2\,u_3\,w_3]$$

```
Q0 = 𝔼[ u_2 w_1 + u_3 w_3];
t1 = Q0 // m[1, 2, 4] // m[4, 3, 5]
t2 = Q0 // m[2, 3, 4] // m[1, 4, 5]
t1 ≡ t2
t1 ≡ t2 // Simplify
```

$$\frac{1}{(1+b_5)^5}\left(1 + 4\,b_5 - \epsilon\,b_5 + 6\,b_5^2 - 2\,\epsilon\,b_5^2 + 4\,b_5^3 - \epsilon\,b_5^3 + b_5^4 + 2\,\epsilon\,c_5 + 6\,\epsilon\,b_5\,c_5 + 6\,\epsilon\,b_5^2\,c_5 + 2\,\epsilon\,b_5^3\,c_5 - 2\,\epsilon\,b_5\,u_5\,w_5 + 2\,\epsilon\,b_5^3\,u_5\,w_5 + 4\,\epsilon\,c_5\,u_5\,w_5 + 8\,\epsilon\,b_5\,c_5\,u_5\,w_5 + 4\,\epsilon\,b_5^2\,c_5\,u_5\,w_5 - 2\,\epsilon\,u_5^2\,w_5^2 - 4\,\epsilon\,b_5\,u_5^2\,w_5^2\right)\mathbb{E}\left[\frac{2\,u_5\,w_5}{1+b_5}\right]$$

$$\frac{1}{(1+b_5)^5}\left(1 + 4\,b_5 - \epsilon\,b_5 + 6\,b_5^2 - 2\,\epsilon\,b_5^2 + 4\,b_5^3 - \epsilon\,b_5^3 + b_5^4 + 2\,\epsilon\,c_5 + 6\,\epsilon\,b_5\,c_5 + 6\,\epsilon\,b_5^2\,c_5 + 2\,\epsilon\,b_5^3\,c_5 - 2\,\epsilon\,u_5\,w_5 - 8\,\epsilon\,b_5\,u_5\,w_5 - 6\,\epsilon\,b_5^2\,u_5\,w_5 + 4\,\epsilon\,c_5\,u_5\,w_5 + 8\,\epsilon\,b_5\,c_5\,u_5\,w_5 + 4\,\epsilon\,b_5^2\,c_5\,u_5\,w_5 - 2\,\epsilon\,u_5^2\,w_5^2 - 4\,\epsilon\,b_5\,u_5^2\,w_5^2\right)\mathbb{E}\left[\frac{2\,u_5\,w_5}{1+b_5}\right]$$

$$\frac{\epsilon\,u_5\,w_5}{1+b_5} == 0$$

$$\frac{\epsilon\,u_5\,w_5}{1+b_5} == 0$$

```
t1 = Q0 // m[1, 2, 1]
```

$$\frac{1}{2\,(1+b_1)^5}\left(2 + 8\,b_1 - 2\,\epsilon\,b_1 + 12\,b_1^2 - 4\,\epsilon\,b_1^2 + 8\,b_1^3 - 2\,\epsilon\,b_1^3 + 2\,b_1^4 + 4\,\epsilon\,c_1 + 12\,\epsilon\,b_1\,c_1 + 12\,\epsilon\,b_1^2\,c_1 + 4\,\epsilon\,b_1^3\,c_1 - 4\,\epsilon\,b_1\,u_1\,w_1 - 4\,\epsilon\,b_1^2\,u_1\,w_1 + 4\,\epsilon\,c_1\,u_1\,w_1 + 8\,\epsilon\,b_1\,c_1\,u_1\,w_1 + 4\,\epsilon\,b_1^2\,c_1\,u_1\,w_1 - \epsilon\,b_1\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[\frac{u_1\,w_1 + u_3\,w_3 + b_1\,u_3\,w_3}{1+b_1}\right]$$

```
(1 + b_5)^4 // Expand
```

$$1 + 4\,b_5 + 6\,b_5^2 + 4\,b_5^3 + b_5^4$$

```
t1 = Q0 // m[1, 2, 1] // m[1, 3, 1]
```

$$\frac{1}{4\,(-1+b_1)^2\left(-1+2\,b_1+5\,b_1^2\right)^8}$$

$$\left(2-14\,b_1-2\in b_1+6\,b_1^2-12\in b_1^2+110\,b_1^3+42\in b_1^3-74\,b_1^4+280\in b_1^4-330\,b_1^5-150\in b_1^5+50\,b_1^6-1500\in b_1^6+250\,b_1^7-1250\in b_1^7-4\in c_1+4\in b_1\,c_1+132\in b_1^2\,c_1-148\in b_1^3\,c_1-1100\in b_1^4\,c_1+300\in b_1^5\,c_1+3500\in b_1^6\,c_1+2500\in b_1^7\,c_1+24\in b_1\,u_1\,w_1+276\in b_1^2\,u_1\,w_1+744\in b_1^3\,u_1\,w_1-1824\in b_1^4\,u_1\,w_1-11\,400\in b_1^5\,u_1\,w_1-17\,700\in b_1^6\,u_1\,w_1-9000\in b_1^7\,u_1\,w_1+72\in c_1\,u_1\,w_1-108\in b_1\,c_1\,u_1\,w_1-1044\in b_1^2\,c_1\,u_1\,w_1-72\in b_1^3\,c_1\,u_1\,w_1+4752\in b_1^4\,c_1\,u_1\,w_1+6660\in b_1^5\,c_1\,u_1\,w_1+2700\in b_1^6\,c_1\,u_1\,w_1+108\in u_1^2\,w_1^2+810\in b_1\,u_1^2\,w_1^2-702\in b_1^2\,u_1^2\,w_1^2-13\,203\in b_1^3\,u_1^2\,w_1^2-30\,996\in b_1^4\,u_1^2\,w_1^2-28\,917\in b_1^5\,u_1^2\,w_1^2-9720\in b_1^6\,u_1^2\,w_1^2\right)$$

$$\left(2-18\,b_1-2\in b_1+24\,b_1^2+16\in b_1^2+168\,b_1^3-8\in b_1^3-324\,b_1^4-176\in b_1^4-732\,b_1^5+148\in b_1^5+1080\,b_1^6+880\in b_1^6+1800\,b_1^7-200\in b_1^7-750\,b_1^8-2000\in b_1^8-1250\,b_1^9-1250\in b_1^9-4\in c_1+36\in b_1\,c_1-48\in b_1^2\,c_1-336\in b_1^3\,c_1+648\in b_1^4\,c_1+1464\in b_1^5\,c_1-2160\in b_1^6\,c_1-3600\in b_1^7\,c_1+1500\in b_1^8\,c_1+2500\in b_1^9\,c_1+8\in u_1\,w_1+20\in b_1\,u_1\,w_1+8\in b_1^2\,u_1\,w_1-916\in b_1^3\,u_1\,w_1-1768\in b_1^4\,u_1\,w_1+5492\in b_1^5\,u_1\,w_1+15\,416\in b_1^6\,u_1\,w_1+4340\in b_1^7\,u_1\,w_1-13\,600\in b_1^8\,u_1\,w_1-9000\in b_1^9\,u_1\,w_1+60\in c_1\,u_1\,w_1-156\in b_1\,c_1\,u_1\,w_1-876\in b_1^2\,c_1\,u_1\,w_1+1284\in b_1^3\,c_1\,u_1\,w_1+4956\in b_1^4\,c_1\,u_1\,w_1-1380\in b_1^5\,c_1\,u_1\,w_1-8148\in b_1^6\,c_1\,u_1\,w_1+60\in b_1^7\,c_1\,u_1\,w_1+4200\in b_1^8\,c_1\,u_1\,w_1-60\in u_1^2\,w_1^2+51\in b_1\,u_1^2\,w_1^2-1476\in b_1^2\,u_1^2\,w_1^2-9726\in b_1^3\,u_1^2\,w_1^2-9948\in b_1^4\,u_1^2\,w_1^2+17\,487\in b_1^5\,u_1^2\,w_1^2+26\,148\in b_1^6\,u_1^2\,w_1^2-7356\in b_1^7\,u_1^2\,w_1^2-15\,120\in b_1^8\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[\frac{3\left(2\,u_1\,w_1+7\,b_1\,u_1\,w_1+6\,b_1^2\,u_1\,w_1\right)}{-1+2\,b_1+5\,b_1^2}\right]$$

```
t2 = Q0 // m[2, 3, 2] // m[1, 2, 1]
```

$$\frac{1}{4\,(1+b_1)^2\,\left(-1+2\,b_1+5\,b_1^2\right)^8}$$
$$\left(2-10\,b_1-18\,\epsilon\,b_1-18\,b_1^2+12\,\epsilon\,b_1^2+98\,b_1^3+298\,\epsilon\,b_1^3+134\,b_1^4+200\,\epsilon\,b_1^4-270\,b_1^5-1350\,\epsilon\,b_1^5-\right.$$
$$550\,b_1^6-2500\,\epsilon\,b_1^6-250\,b_1^7-1250\,\epsilon\,b_1^7-12\,\epsilon\,c_1+52\,\epsilon\,b_1\,c_1+156\,\epsilon\,b_1^2\,c_1-564\,\epsilon\,b_1^3\,c_1-$$
$$1220\,\epsilon\,b_1^4\,c_1+1500\,\epsilon\,b_1^5\,c_1+4500\,\epsilon\,b_1^6\,c_1+2500\,\epsilon\,b_1^7\,c_1-12\,\epsilon\,u_1\,w_1+220\,\epsilon\,b_1\,u_1\,w_1+$$
$$1252\,\epsilon\,b_1^2\,u_1\,w_1-80\,\epsilon\,b_1^3\,u_1\,w_1-11\,596\,\epsilon\,b_1^4\,u_1\,w_1-27\,460\,\epsilon\,b_1^5\,u_1\,w_1-25\,900\,\epsilon\,b_1^6\,u_1\,w_1-$$
$$9000\,\epsilon\,b_1^7\,u_1\,w_1+120\,\epsilon\,c_1\,u_1\,w_1-132\,\epsilon\,b_1\,c_1\,u_1\,w_1-1860\,\epsilon\,b_1^2\,c_1\,u_1\,w_1-696\,\epsilon\,b_1^3\,c_1\,u_1\,w_1+$$
$$8448\,\epsilon\,b_1^4\,c_1\,u_1\,w_1+13\,740\,\epsilon\,b_1^5\,c_1\,u_1\,w_1+6300\,\epsilon\,b_1^6\,c_1\,u_1\,w_1+60\,\epsilon\,u_1^2\,w_1^2+714\,\epsilon\,b_1\,u_1^2\,w_1^2-$$
$$\left.2178\,\epsilon\,b_1^2\,u_1^2\,w_1^2-24\,099\,\epsilon\,b_1^3\,u_1^2\,w_1^2-59\,556\,\epsilon\,b_1^4\,u_1^2\,w_1^2-60\,741\,\epsilon\,b_1^5\,u_1^2\,w_1^2-22\,680\,\epsilon\,b_1^6\,u_1^2\,w_1^2\right)$$
$$\left(2-14\,b_1-2\,\epsilon\,b_1-8\,b_1^2+16\,\epsilon\,b_1^2+184\,b_1^3-8\,\epsilon\,b_1^3+28\,b_1^4-176\,\epsilon\,b_1^4-1028\,b_1^5+148\,\epsilon\,b_1^5-\right.$$
$$680\,b_1^6+880\,\epsilon\,b_1^6+2200\,b_1^7-200\,\epsilon\,b_1^7+3250\,b_1^8-2000\,\epsilon\,b_1^8+1250\,b_1^9-1250\,\epsilon\,b_1^9+4\,\epsilon\,c_1-$$
$$28\,\epsilon\,b_1\,c_1-16\,\epsilon\,b_1^2\,c_1+368\,\epsilon\,b_1^3\,c_1+56\,\epsilon\,b_1^4\,c_1-2056\,\epsilon\,b_1^5\,c_1-1360\,\epsilon\,b_1^6\,c_1+4400\,\epsilon\,b_1^7\,c_1+$$
$$6500\,\epsilon\,b_1^8\,c_1+2500\,\epsilon\,b_1^9\,c_1-20\,\epsilon\,u_1^2+72\,\epsilon\,b_1\,u_1^2+320\,\epsilon\,b_1^2\,u_1^2-728\,\epsilon\,b_1^3\,u_1^2-2712\,\epsilon\,b_1^4\,u_1^2+$$
$$824\,\epsilon\,b_1^5\,u_1^2+9280\,\epsilon\,b_1^6\,u_1^2+10\,200\,\epsilon\,b_1^7\,u_1^2+3500\,\epsilon\,b_1^8\,u_1^2+20\,\epsilon\,u_1\,w_1+84\,\epsilon\,b_1\,u_1\,w_1-$$
$$500\,\epsilon\,b_1^2\,u_1\,w_1-1852\,\epsilon\,b_1^3\,u_1\,w_1+2124\,\epsilon\,b_1^4\,u_1\,w_1+12\,868\,\epsilon\,b_1^5\,u_1\,w_1+8996\,\epsilon\,b_1^6\,u_1\,w_1-$$
$$15\,060\,\epsilon\,b_1^7\,u_1\,w_1-23\,600\,\epsilon\,b_1^8\,u_1\,w_1-9000\,\epsilon\,b_1^9\,u_1\,w_1+12\,\epsilon\,c_1\,u_1\,w_1+12\,\epsilon\,b_1\,c_1\,u_1\,w_1-$$
$$204\,\epsilon\,b_1^2\,c_1\,u_1\,w_1-468\,\epsilon\,b_1^3\,c_1\,u_1\,w_1+540\,\epsilon\,b_1^4\,c_1\,u_1\,w_1+3060\,\epsilon\,b_1^5\,c_1\,u_1\,w_1+4236\,\epsilon\,b_1^6\,c_1\,u_1\,w_1+$$
$$2580\,\epsilon\,b_1^7\,c_1\,u_1\,w_1+600\,\epsilon\,b_1^8\,c_1\,u_1\,w_1-60\,\epsilon\,u_1^3\,w_1-264\,\epsilon\,b_1\,u_1^3\,w_1+108\,\epsilon\,b_1^2\,u_1^3\,w_1+$$
$$2664\,\epsilon\,b_1^3\,u_1^3\,w_1+6444\,\epsilon\,b_1^4\,u_1^3\,w_1+7128\,\epsilon\,b_1^5\,u_1^3\,w_1+3876\,\epsilon\,b_1^6\,u_1^3\,w_1+840\,\epsilon\,b_1^7\,u_1^3\,w_1+$$
$$48\,\epsilon\,u_1^2\,w_1^2+627\,\epsilon\,b_1\,u_1^2\,w_1^2+2700\,\epsilon\,b_1^2\,u_1^2\,w_1^2+4554\,\epsilon\,b_1^3\,u_1^2\,w_1^2+72\,\epsilon\,b_1^4\,u_1^2\,w_1^2-10\,665\,\epsilon\,b_1^5\,u_1^2\,w_1^2-$$
$$\left.15\,564\,\epsilon\,b_1^6\,u_1^2\,w_1^2-9420\,\epsilon\,b_1^7\,u_1^2\,w_1^2-2160\,\epsilon\,b_1^8\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[\frac{3\,\left(2\,u_1\,w_1+7\,b_1\,u_1\,w_1+6\,b_1^2\,u_1\,w_1\right)}{-1+2\,b_1+5\,b_1^2}\right]$$

```
t1 ≡ t2 // Simplify
```

$$\epsilon\left(-1+2\,b_1+5\,b_1^2\right)\left(1000\,b_1^{10}\,(-5+10\,c_1-36\,u_1\,w_1)-10\,u_1^2\left(1+3\,u_1\,w_1-3\,w_1^2\right)+\right.$$
$$2\,b_1^7\left(2410-12\,083\,u_1\,w_1-759\,u_1^3\,w_1+48\,c_1\,(-65+321\,u_1\,w_1)+u_1^2\left(230-106\,821\,w_1^2\right)\right)+$$
$$b_1^6\left(2832+31\,670\,u_1\,w_1-1626\,u_1^3\,w_1-24\,c_1\,(196+337\,u_1\,w_1)+u_1^2\left(4228-66\,501\,w_1^2\right)\right)-$$
$$2\,b_1\left(4-67\,u_1\,w_1+51\,u_1^3\,w_1+c_1\,(-4+54\,u_1\,w_1)-u_1^2\left(23+105\,w_1^2\right)\right)+$$
$$b_1^2\left(40-118\,u_1\,w_1+186\,u_1^3\,w_1+24\,c_1\,(-2+9\,u_1\,w_1)+u_1^2\left(124+633\,w_1^2\right)\right)+$$
$$2\,b_1^3\left(54-1325\,u_1\,w_1+639\,u_1^3\,w_1+48\,c_1\,(-1+20\,u_1\,w_1)+u_1^2\left(-262+3090\,w_1^2\right)\right)+$$
$$10\,b_1^9\left(-1050-10\,840\,u_1\,w_1+30\,c_1\,(70+67\,u_1\,w_1)-u_1^2\left(175+7236\,w_1^2\right)\right)+$$
$$2\,b_1^5\left(-442+9253\,u_1\,w_1+171\,u_1^3\,w_1+c_1\,(408-6876\,u_1\,w_1)+2\,u_1^2\left(442+7881\,w_1^2\right)\right)+$$
$$b_1^4\left(-568-1366\,u_1\,w_1+1890\,u_1^3\,w_1-24\,c_1\,(-32+51\,u_1\,w_1)+u_1^2\left(-992+27\,483\,w_1^2\right)\right)+$$
$$\left.b_1^8\left(-3800-110\,890\,u_1\,w_1-420\,u_1^3\,w_1+120\,c_1\,(80+399\,u_1\,w_1)-u_1^2\left(3350+209\,277\,w_1^2\right)\right)\right)==0$$

```
t1 ≡ t2 /. ϵ → 0
```

True

```
(Q0 // m[1, 2, 4]) /. x_4 :> x_1
```

$$\frac{1}{2}\left(2+4\,\epsilon\,c_1\,u_1\,w_3-2\,\epsilon\,u_1^2\,w_1\,w_3-2\,\epsilon\,u_1^2\,w_3^2+3\,\epsilon\,b_1\,u_1^2\,w_3^2\right)\mathbb{E}\left[u_1\,w_1+u_1\,w_3-b_1\,u_1\,w_3\right]$$

```
Q0 // m[1, 2, 1] // m[1, 3, 9]
```

$$\frac{1}{2}\left(2+4\in c_9\,u_9\,w_9-4\in u_9^2\,w_9^2+3\in b_9\,u_9^2\,w_9^2\right)\mathbb{E}\left[-u_9\,\left(-2\,w_9+b_9\,w_9\right)\right]$$

```
Q0 // m[1, 2, 1] // m[1, 3, 1]
```

$$\frac{1}{2}\left(2+4\in c_1\,u_1\,w_1-12\in u_1^2\,w_1^2+7\in b_1\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[-u_1\,\left(-2\,w_1+b_1\,w_1\right)\right]$$

```
t1 = Q0 // m[1, 2, 4] // m[4, 3, 1]
```

$$\frac{1}{2}\left(2+4\in c_1\,u_1\,w_1-4\in u_1^2\,w_1^2+3\in b_1\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[-u_1\,\left(-2\,w_1+b_1\,w_1\right)\right]$$

```
t2 = Q0 // m[2, 3, 4] // m[1, 4, 1]
```

$$\frac{1}{2}\left(2+4\in c_1\,u_1\,w_1-4\in u_1^2\,w_1^2+3\in b_1\,u_1^2\,w_1^2\right)\mathbb{E}\left[2\,u_1\,w_1-b_1\,u_1\,w_1\right]$$

```
t1 ≡ t2
```

```
True
```

```
Rp[1, 2] Rm[4, 3]
```

$$\mathbb{E}\left[b_1\,c_2-b_4\,c_3+\frac{\left(-1+e^{b_1}\right)\,u_1\,w_2}{b_1}+\frac{\left(-1+e^{-b_4}\right)\,u_4\,w_3}{b_4}\right]$$

```
Rp[1, 2] Rm[4, 3] // m[1, 4, 1] // m[2, 3, 2]
```

$$\mathbb{E}[0]$$

```
Rm[1, 2] Rp[4, 3] // m[4, 1, 4] // m[2, 3, 2]
```

$$\mathbb{E}[0]$$

```
t1 = Rp[1, 2] Rp[3, 4] Rp[5, 6] // m[3, 5, a] // m[1, 6, b] // m[2, 4, c]
```

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{b_a\,b_b}\left(b_a^2\,b_b\,\left(c_b+c_c\right)+\left(-1+e^{b_a}\right)\,b_b\,u_a\,\left(w_b+w_c\right)+b_a\,\left(b_b^2\,c_c+\left(-1+e^{b_b}\right)\,u_b\,w_c\right)\right)\right]$$

```
t2 = Rp[1, 2] Rp[3, 4] Rp[5, 6] // m[1, 3, a] // m[2, 5, b] // m[4, 6, c]
```

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{b_a\,b_b}\left(b_a^2\,b_b\,\left(c_b+c_c\right)+\left(-1+e^{b_a}\right)\,b_b\,u_a\,\left(w_b+w_c\right)+b_a\,\left(b_b^2\,c_c+\left(-1+e^{b_b}\right)\,u_b\,w_c\right)\right)\right]$$

```
t1 ≡ t2
```

```
True
```

```
t3 = Rm[12, 1] Rm[2, 7] Rm[8, 3] Rm[4, 11] Rp[16, 5] Rp[6, 13] Rp[14, 9] Rp[10, 15]
```

$$\mathbb{E}\left[-b_{12}\,c_1-b_8\,c_3+b_{16}\,c_5-b_2\,c_7+b_{14}\,c_9-b_4\,c_{11}+b_6\,c_{13}+b_{10}\,c_{15}+\right.$$
$$\frac{\left(-1+e^{-b_{12}}\right)\,u_{12}\,w_1}{b_{12}}+\frac{\left(-1+e^{-b_8}\right)\,u_8\,w_3}{b_8}+\frac{\left(-1+e^{b_{16}}\right)\,u_{16}\,w_5}{b_{16}}+\frac{\left(-1+e^{-b_2}\right)\,u_2\,w_7}{b_2}+$$
$$\left.\frac{\left(-1+e^{b_{14}}\right)\,u_{14}\,w_9}{b_{14}}+\frac{\left(-1+e^{-b_4}\right)\,u_4\,w_{11}}{b_4}+\frac{\left(-1+e^{b_6}\right)\,u_6\,w_{13}}{b_6}+\frac{\left(-1+e^{b_{10}}\right)\,u_{10}\,w_{15}}{b_{10}}\right]$$

```
t3 // m[1, 2, 1]
```

$$\mathbb{E}\Big[-b_{12}\,c_1-b_8\,c_3+b_{16}\,c_5-b_1\,c_7+b_{14}\,c_9-b_4\,c_{11}+b_6\,c_{13}+b_{10}\,c_{15}+\frac{\left(-1+e^{-b_{12}}\right)\,u_{12}\,w_1}{b_{12}}+\frac{\left(-1+e^{-b_8}\right)\,u_8\,w_3}{b_8}+\frac{\left(-1+e^{b_{16}}\right)\,u_{16}\,w_5}{b_{16}}+\frac{\left(-1+e^{-b_1}\right)\,u_1\,w_7}{b_1}-\frac{\left(-1+e^{-b_1}\right)\,\left(-1+e^{-b_{12}}\right)\,u_{12}\,w_7}{b_{12}}+\frac{\left(-1+e^{b_{14}}\right)\,u_{14}\,w_9}{b_{14}}+\frac{\left(-1+e^{-b_4}\right)\,u_4\,w_{11}}{b_4}+\frac{\left(-1+e^{b_6}\right)\,u_6\,w_{13}}{b_6}+\frac{\left(-1+e^{b_{10}}\right)\,u_{10}\,w_{15}}{b_{10}}\Big]$$

```
t3 // m[1, 2, 1] // m[1, 3, 1]
```

$$\mathbb{E}\Big[-b_8\,c_1-b_{12}\,c_1+b_{16}\,c_5-b_1\,c_7+b_{14}\,c_9-b_4\,c_{11}+b_6\,c_{13}+b_{10}\,c_{15}+\frac{\left(-1+e^{-b_8}\right)\,u_8\,w_1}{b_8}+\frac{e^{-b_8}\,\left(-1+e^{-b_{12}}\right)\,u_{12}\,w_1}{b_{12}}+\frac{\left(-1+e^{b_{16}}\right)\,u_{16}\,w_5}{b_{16}}+\frac{e^{b_8}\,\left(-1+e^{-b_1}\right)\,u_1\,w_7}{b_1}-\frac{\left(-1+e^{-b_1}\right)\,\left(-1+e^{-b_{12}}\right)\,u_{12}\,w_7}{b_{12}}+\frac{\left(-1+e^{b_{14}}\right)\,u_{14}\,w_9}{b_{14}}+\frac{\left(-1+e^{-b_4}\right)\,u_4\,w_{11}}{b_4}+\frac{\left(-1+e^{b_6}\right)\,u_6\,w_{13}}{b_6}+\frac{\left(-1+e^{b_{10}}\right)\,u_{10}\,w_{15}}{b_{10}}\Big]$$

```
Do[t3 = t3 // m[1, kk, 1], {kk, 2, 16}]; t3
```

$$-\left(\left(e^{3\,b_1}\,\mathbb{E}[0]\right)\Big/\left(1-4\,e^{b_1}+8\,e^{2\,b_1}-11\,e^{3\,b_1}+8\,e^{4\,b_1}-4\,e^{5\,b_1}+e^{6\,b_1}\right)\right)$$

```
Rp[1, 2] Rp[3, 4] Rp[5, 6] // m[1, 4, 4] // m[4, 5, 5] // m[5, 2, 2] // m[2, 3, 3] //
  m[3, 6, 6] // m[6, 1, 1]
```

$$\frac{\mathbb{E}\left[3\,b_1\,c_1+\frac{\left(1-e^{-3\,b_1}\right)\,u_1\,w_1}{b_1}\right]}{1+e^{b_1}\,\left(-1+e^{b_1}\right)}$$