

In “ T before H ” conventions.

```
Simp[ $\gamma$ _] := Expand[ $\gamma$ ];
CF[ $\gamma$ _] :=  $\gamma$  /. ( $\lambda_\beta$  |  $\lambda_a$ ) => MapAt[Simp,  $\lambda$ , 1];
AutoCollecting[ $\lambda$ _] := ( $\lambda$  /:  $\lambda$ [0, ___] = 0;
 $\lambda$  /:  $\lambda$ [ $f$ _,  $r$ ___] +  $\lambda$ [ $g$ _,  $r$ ___] :=  $\lambda$ [Simp[ $f+g$ ],  $r$ ];
 $\lambda$  /:  $g$ * $\lambda$ [ $f$ _,  $r$ ___] :=  $\lambda$ [Simp[ $gf$ ],  $r$ ];
AutoCollecting /@ { $\beta$ ,  $a$ };
UU /: UU[ $x$ _] + UU[ $y$ _] := UU[ $x+y$ ];
UU /:  $a$ *UU[ $x$ _] := UU[Expand[ $a x$ ]];
UU /: D[ $u$  UU,  $vs$ _] :=
  CF[u /. ( $\lambda_\beta$  |  $\lambda_a$ ) => MapAt[D[#,  $vs$ ] &,  $\lambda$ , 1]];
UU /: Coefficient[ $u$  UU,  $\lambda$ [ $js$ ___]] :=
  Total[Cases[u,  $\lambda$ [ $f$ _,  $js$ ] =>  $f$ ,  $\infty$ ]];
K $\delta$  /: K $\delta$ [ $is$ _] := KroneckerDelta[1, Length[Union[{ $is$ }]]];
```

Generalities.

```
UU[ $\gamma$ _] // tm[ $x$ _,  $y$ _,  $z$ _] := CF[UU[
  Expand[ $\gamma$  /.  $a$ [ $f$ _,  $x$  |  $y$ _,  $j$ _] =>  $a$ [ $f$ _,  $z$ _,  $j$ ] /.  $b_{x|y} \rightarrow b_z$ ]]];
```

Definition of tm .

```
UU[ $\gamma$ _] // hm[ $x$ _,  $y$ _,  $z$ _] :=
  CF[UU[Expand[ $\gamma$  /.  $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $x$  |  $y$ ] =>  $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $z$ ]]]]];
```

Definition of hm .

```
UU[ $\gamma$ _] // hts[ $y$ _,  $x$ _] := CF[UU[Expand[ $\gamma$  /.
   $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $j$ _] =>  $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $j$ ] - K $\delta$ [ $i_x$ ] K $\delta$ [ $j_y$ ]  $\beta$ [ $f$   $b_x$ ]]]]];
```

Definition of hts .

```
dm[ $x$ _,  $y$ _,  $z$ _][ $\gamma$ _] :=
 $\gamma$  // hts[ $x$ _,  $y$ _] // tm[ $x$ _,  $y$ _,  $z$ ] // hm[ $x$ _,  $y$ _,  $z$ ]
```

Definition of dm .

Renaming operations.

```
t $\sigma$ [ $x$ _List,  $y$ _List][ $\gamma$ _] := (rr = Replace[Thread[ $x \rightarrow y$ ]];
  CF[ $\gamma$  /.  $b_{i_} \rightarrow b_{rr@i_}$  /.  $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $j$ _] =>  $a$ [ $f$ _, rr@ $i$ _,  $j$ ]]];
t $\sigma$ [ $x$ _,  $y$ _][ $\gamma$ _] := t $\sigma$ [{ $x$ }, { $y$ }][ $\gamma$ ];
h $\sigma$ [ $x$ _List,  $y$ _List][ $\gamma$ _] :=
  CF[
 $\gamma$  /.  $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $j$ _] =>  $a$ [ $f$ _,  $i$ _, Replace[Thread[ $x \rightarrow y$ ]]@ $j$ ]];
h $\sigma$ [ $x$ _,  $y$ _][ $\gamma$ _] := h $\sigma$ [{ $x$ }, { $y$ }][ $\gamma$ ];
d $\sigma$ [ $x$ _,  $y$ _][ $\gamma$ _] :=  $\gamma$  // t $\sigma$ [ $x$ _,  $y$ _] // h $\sigma$ [ $x$ _,  $y$ _];
```

Definition of tb .

```
thb[ $x$ _,  $y$ _][UU[ $L$ _], UU[ $R$ _]] :=
```

Definition of thb .

```
CF[UU[Expand[Distribute[pp[ $L$ ,  $R$ ]] /. {
  pp[0, _]  $\rightarrow$  0, pp[_ , 0]  $\rightarrow$  0, pp[_ $\beta$  , _]  $\rightarrow$  0,
  pp[_ ,  $\beta$ ]  $\rightarrow$  0,
  pp[ $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $j$ ],  $a$ [ $g$ _,  $k$ _,  $l$ ]] =>
  K $\delta$ [ $y_l$ ] K $\delta$ [ $x_i$ ] (- $a$ [ $b_k$   $f$   $g$ ,  $i$ _,  $j$ ] +  $a$ [ $b_i$   $f$   $g$ ,  $k$ _,  $j$ ])
}]]];
```

```
htb[ $x$ _,  $y$ _][ $L$  UU,  $R$  UU] := -thb[ $y$ _,  $x$ ][ $R$ ,  $L$ ];
```

```
hb[ $y$ _][UU[ $L$ _], UU[ $R$ _]] :=
```

Definition of hb .

```
CF[UU[Expand[Distribute[pp[ $L$ ,  $R$ ]] /. {
  pp[0, _]  $\rightarrow$  0, pp[_ , 0]  $\rightarrow$  0,
  pp[_ $\beta$  , _]  $\rightarrow$  0, pp[_ ,  $\beta$ ]  $\rightarrow$  0
} /. {
  pp[ $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $y$ ],  $u$ ] =>
  ( $u$  /.  $a$ [ $g$ _,  $j$ _,  $k$ ] =>
  K $\delta$ [ $y_k$ ] ( $a$ [ $b_j$   $f$   $g$ ,  $i$ _,  $y$ ] -  $a$ [ $b_i$   $f$   $g$ ,  $j$ _,  $k$ ]))),
  _pp  $\rightarrow$  0
}]]];
```

Definition of db .

```
Using  $h_1 h_2 t_1 t_2 \rightarrow h_1 h_2 t_1 t_2 \rightarrow h_1 h_2 t_2 t_1 \rightarrow h_2 h_1 t_2 t_1 \rightarrow h_2 h_1 t_2 t_1$ :
db[ $x$ _][ $u$  UU,  $v$  UU] := Module[{ $t$ ,  $h$ }, Plus[
  htb[ $x$ _,  $x$ ][ $u$  // t $\sigma$ [ $x$ _,  $t$ ],  $v$  // h $\sigma$ [ $x$ _,  $h$ ]] // tm[ $t$ _,  $x$ _,  $x$ ] //
  hm[ $x$ _,  $h$ _,  $x$ ],
  tb[ $x$ ][ $u$ ,  $v$  // h $\sigma$ [ $x$ _,  $h$ ]] // hm[ $x$ _,  $h$ _,  $x$ ],
  hb[ $x$ ][ $u$ ,  $v$  // t $\sigma$ [ $x$ _,  $t$ ]] // tm[ $t$ _,  $x$ _,  $x$ ],
  thb[ $x$ _,  $x$ ][ $u$  // h $\sigma$ [ $x$ _,  $h$ ],  $v$  // t $\sigma$ [ $x$ _,  $t$ ]] //
  tm[ $t$ _,  $x$ _,  $x$ ] // hm[ $x$ _,  $h$ _,  $x$ ]]];
```

```
bb[ $S$ _List] := Module[{ $w$ ,  $bar$ ,  $t$ ,  $n$  = 0,  $i$ ,  $k$ },
```

The bracket.

```
 $w$  = #2 // d $\sigma$ [ $S$ _,  $bar$  /@  $S$ ];
Sum[ $t$  = db[ $S$ [[ $k$ ]]][#1,  $w$  // d $\sigma$ [ $bar$ [ $S$ [[ $k$ ]],  $S$ [[ $k$ ]]]];
Do[ $t$  =  $t$  // dm[ $bar$ [ $S$ [[ $i$ ]],  $S$ [[ $i$ ]],  $S$ [[ $i$ ]], { $i$ , 1,  $k$  - 1}];
Do[ $t$  =  $t$  // dm[ $S$ [[ $i$ ],  $bar$ [ $S$ [[ $i$ ]],  $S$ [[ $i$ ]],
  { $i$ ,  $k$  + 1, Length@ $S$ ]];
 $t$ , { $k$ , Length@ $S$ }}] &
bb[ $S$ ___] := bb[{ $S$ }]
```

```
ct[ $s$ _] := ct[ $s$ _,  $s$ ]; ct[] = ct[0, 0];
```

Definition of ct .

```
ct[ $h$ _,  $t$ _][UU[ $L$ _], UU[ $R$ _]] :=
  UU[Distribute[pp[ $L$ ,  $R$ ]] /. {
  pp[_ $\beta$  , _]  $\rightarrow$  0,
  pp[ $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $h$ ],  $\beta$ [ $g$ _]] =>  $\beta$ [ $f$   $b_i$   $g$  /  $b_t$ ],
  pp[ $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $h$ ],  $a$ [ $g$ _,  $t$ _,  $j$ ]] =>  $a$ [ $f$   $g$ _,  $i$ _,  $j$ ],
  pp[ $a$ [ $f$ _,  $i$ _,  $h$ ],  $a$ [ $g$ _,  $j$ _,  $k$ ]] =>  $a$ [ $f$   $b_i$   $g$  /  $b_t$ _,  $j$ _,  $k$ ],
  pp[ $a$ [_ , _]  $\rightarrow$  0]}] // CF;
```

(TSD for “Tail Scattering Data”) **Global Generalities.**

```
TSD[ $\lambda$ _][ $j$ _] := Lookup[ $\lambda$ _,  $j$ _, UU@a[1,  $j$ _, h $\infty$ ]];
UU[ $u$ _] //  $\gamma$ _TSD := CF[ $u$  /.  $\lambda_a \rightarrow \gamma@a$ ];
TSD /: ( $\gamma$ _TSD) $^{-1}$  := Module[{ $S$  = Keys@ $\gamma$ _,  $m$ },
   $m$  = Table[Coefficient[ $\gamma_i$ _,  $a$ [ $j$ _, h $\infty$ ]], { $i$ ,  $S$ }, { $j$ ,  $S$ }] //
  Inverse;
  TSD@<|Table[ $S$ [[ $\alpha$ ]]  $\rightarrow$ 
  CF@UU@Sum[ $a$ [ $m$ [[ $\alpha$ ],  $\beta$ ]],  $S$ [[ $\beta$ ]], h $\infty$ ], { $\beta$ , Length@ $S$ }},
  { $\alpha$ , Length@ $S$ }}]>
];
```

```
 $a$ [ $f$ _,  $j$ _,  $k$ _] //  $\gamma$ _TSD := Module[{ $S$  = Keys@ $\gamma$ _,  $\gamma_i$ },
  Switch[{MemberQ[ $S$ _,  $j$ ], MemberQ[ $S$ _,  $k$ ]},
  {False, False}, UU@a[ $f$ _,  $j$ _,  $k$ ],
  {True, False},  $\gamma_j$  /.  $a$ [ $g$ _,  $i$ _, h $\infty$ ] =>  $a$ [ $f$   $g$ _,  $i$ _,  $k$ ],
  {False, True}, ( $\gamma_i = \gamma^{-1}$ );
  CF@Sum[
 $\gamma$ [bb[ $S$  U { $j$ }]][ $\gamma_i$ _, UU@a[ $f$ _,  $j$ _,  $k$ ]] /. {
   $a$ [_ ,  $i$ _, h $\infty$ ]  $\rightarrow$  0,  $a$ [ $g$ _,  $l$ _, h $\infty$ ]  $\rightarrow$   $a$ [ $g$  /  $b_i$ _,  $l$ _,  $i$ ]],
  { $i$ ,  $S$ }},
  {True, True}, ct[h $\infty$ _, t $\infty$ ][ $\gamma@a$ [ $f$ _,  $j$ _, h $\infty$ ],
   $\gamma@a$ [1, t $\infty$ _,  $k$ ]]
];
```

Exponentiating an arrow.

```
Ea[ $t$ _,  $j$ _,  $k$ _] := TSD[<|
   $j \rightarrow$  CF@UU[ $a$ [1,  $j$ _, h $\infty$ ]],
   $k \rightarrow$  CF@UU[ $a$ [ $e^{tb_j}$ _,  $k$ _, h $\infty$ ] +  $a$ [ $-\frac{(-1 + e^{tb_j}) b_k}{b_j}$ _,  $j$ _, h $\infty$ ]]>];
R[ $j$ _,  $k$ _] := Ea[1,  $j$ _,  $k$ ]
```