

Pensieve header: An attempt on a better rank 2 ($\mathcal{S}l_3$) Gassner representation.

```

In[*]:= Gi_,j_[ $\mathcal{E}_-$ ] := Expand[ $\mathcal{E} / .$  {
  ej  $\Rightarrow$  eti ej + (1 - eti) ei
}]];
bas = {e1, e2, e3};
lhs = bas // G1,2 // G1,3 // G2,3;
rhs = bas // G2,3 // G1,3 // G1,2;
Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=
{e1, e1 - et1 e1 + et1 e2, e1 - et1 e1 + et1 e2 - et1+t2 e2 + et1+t2 e3}

Out[*]=
True

In[*]:= R2Bi_,j_[ $\mathcal{E}_-$ ] := Expand[ $\mathcal{E} / .$  {
  ej  $\Rightarrow$  T ej + (1 - T) ei,
  fj  $\Rightarrow$  S fj + (1 - S) fi,
  gj  $\Rightarrow$  T S gj + (1 - T S) gi + c1 ei fi + c2 ei fj + c3 ej fi + c4 ej fj,
  gi  $\Rightarrow$  gi + c5 ei fi + c6 ei fj + c7 ej fi + c8 ej fj
}]];
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2B1,2 // R2B1,3 // R2B2,3;
rhs = bas // R2B2,3 // R2B1,3 // R2B1,2;
rhs - lhs

Out[*]=
{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, -c7 e2 f1 + T c7 e2 f1 + c7 e3 f1 -
T c7 e3 f1 - c6 e1 f2 + S c6 e1 f2 - c8 e2 f2 + S c8 e2 f2 + T c8 e2 f2 - S T c8 e2 f2 - T c8 e3 f2 +
S T c8 e3 f2 + c6 e1 f3 - S c6 e1 f3 - S c8 e2 f3 + S T c8 e2 f3 + c8 e3 f3 - S T c8 e3 f3,
-S c5 e1 f1 - T c5 e1 f1 + 2 S T c5 e1 f1 + c6 e1 f1 - S c6 e1 f1 - T c6 e1 f1 + S T c6 e1 f1 +
c7 e1 f1 - S c7 e1 f1 - T c7 e1 f1 + S T c7 e1 f1 + c8 e1 f1 - S c8 e1 f1 - T c8 e1 f1 + S T c8 e1 f1 +
T c5 e2 f1 - S T c5 e2 f1 + T c6 e2 f1 - S T c6 e2 f1 - c7 e2 f1 + T c7 e2 f1 + S T c7 e2 f1 -
S T2 c7 e2 f1 - S T c7 e3 f1 + S T2 c7 e3 f1 + T c8 e3 f1 - S T c8 e3 f1 + S c5 e1 f2 - S T c5 e1 f2 -
c6 e1 f2 + S c6 e1 f2 + S T c6 e1 f2 - S2 T c6 e1 f2 + S c7 e1 f2 - S T c7 e1 f2 - c8 e2 f2 +
S c8 e2 f2 + T c8 e2 f2 - S2 T c8 e2 f2 - S T2 c8 e2 f2 + S2 T2 c8 e2 f2 - T c8 e3 f2 + S T c8 e3 f2 +
S T2 c8 e3 f2 - S2 T2 c8 e3 f2 - S T c6 e1 f3 + S2 T c6 e1 f3 + S c8 e1 f3 - S T c8 e1 f3 -
S c8 e2 f3 + S T c8 e2 f3 + S2 T c8 e2 f3 - S2 T2 c8 e2 f3 - S T c8 e3 f3 + S2 T2 c8 e3 f3,
c1 e1 f1 - S c1 e1 f1 - T c1 e1 f1 + S T c1 e1 f1 + c2 e1 f1 - S c2 e1 f1 - T c2 e1 f1 + S T c2 e1 f1 +
c3 e1 f1 - S c3 e1 f1 - T c3 e1 f1 + S T c3 e1 f1 + c4 e1 f1 - S c4 e1 f1 - T c4 e1 f1 + S T c4 e1 f1 +
S T c5 e1 f1 - S2 T2 c5 e1 f1 + T c1 e2 f1 - S T c1 e2 f1 + T c2 e2 f1 - S T c2 e2 f1 + T c3 e2 f1 - S T c3 e2 f1 +
S T c7 e2 f1 - S2 T2 c7 e2 f1 + T c4 e3 f1 - S T c4 e3 f1 + S c1 e1 f2 - S T c1 e1 f2 + S c2 e1 f2 - S T c2 e1 f2 +
S c3 e1 f2 - S T c3 e1 f2 + S T c6 e1 f2 - S2 T2 c6 e1 f2 + S c4 e2 f2 + T c4 e2 f2 - 2 S T c4 e2 f2 +
S T c8 e2 f2 - S2 T2 c8 e2 f2 - T c4 e3 f2 + S T c4 e3 f2 + S c4 e1 f3 - S T c4 e1 f3 - S c4 e2 f3 + S T c4 e2 f3}


```

```
In[*]:= eqs = Union @@ Table[CoefficientRules[eq, {e1, e2, e3, f1, f2, f3, g1, g2, g3}] /.
  (_ -> c_) :-> (c == 0), {eq, lhs - rhs}] /.
```

```
Out[*]=
```

$$\left\{ \begin{aligned} &S c_4 - S T c_4 == 0, T c_4 - S T c_4 == 0, -S c_4 + S T c_4 == 0, -T c_4 + S T c_4 == 0, \\ &-c_1 + S c_1 + T c_1 - S T c_1 - c_2 + S c_2 + T c_2 - S T c_2 - c_3 + S c_3 + T c_3 - S T c_3 - \\ &\quad c_4 + S c_4 + T c_4 - S T c_4 - S T c_5 + S^2 T^2 c_5 == 0, c_6 - S c_6 == 0, -c_6 + S c_6 == 0, \\ &-S c_1 + S T c_1 - S c_2 + S T c_2 - S c_3 + S T c_3 - S T c_6 + S^2 T^2 c_6 == 0, c_7 - T c_7 == 0, \\ &-c_7 + T c_7 == 0, -S c_5 + S T c_5 + c_6 - S c_6 - S T c_6 + S^2 T c_6 - S c_7 + S T c_7 == 0, \\ &-T c_5 + S T c_5 - T c_6 + S T c_6 + c_7 - T c_7 - S T c_7 + S T^2 c_7 == 0, \\ &-T c_1 + S T c_1 - T c_2 + S T c_2 - T c_3 + S T c_3 - S T c_7 + S^2 T^2 c_7 == 0, S c_8 - S T c_8 == 0, T c_8 - S T c_8 == 0, \\ &S c_5 + T c_5 - 2 S T c_5 - c_6 + S c_6 + T c_6 - S T c_6 - c_7 + S c_7 + T c_7 - S T c_7 - c_8 + S c_8 + T c_8 - S T c_8 == 0, \\ &-c_8 + S T c_8 == 0, S T c_6 - S^2 T c_6 - S c_8 + S T c_8 == 0, \\ &S T c_7 - S T^2 c_7 - T c_8 + S T c_8 == 0, c_8 - S c_8 - T c_8 + S T c_8 == 0, S T c_8 - S^2 T^2 c_8 == 0, \\ &c_8 - S c_8 - T c_8 + S^2 T c_8 + S T^2 c_8 - S^2 T^2 c_8 == 0, -S c_4 - T c_4 + 2 S T c_4 - S T c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0, \\ &S c_8 - S T c_8 - S^2 T c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0, T c_8 - S T c_8 - S T^2 c_8 + S^2 T^2 c_8 == 0 \end{aligned} \right\}$$

```
In[*]:= {sol} = Solve[eqs, {c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7, c8}]
```

 **Solve:** Equations may not give solutions for all "solve" variables. 

```
Out[*]=
```

$$\left\{ \left\{ c_3 \rightarrow -c_1 - c_2, c_4 \rightarrow 0, c_5 \rightarrow 0, c_6 \rightarrow 0, c_7 \rightarrow 0, c_8 \rightarrow 0 \right\} \right\}$$

```
In[*]:= sol /. Rule -> Set
```

```
Out[*]=
```

$$\{-c_1 - c_2, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

```
In[*]:= {g1, g2} // R2B1,2
```

```
Out[*]=
```

$$\{g_1, c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + c_2 e_1 f_2 + g_1 - S T g_1 + S T g_2\}$$

```
In[*]:= bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
lhs = bas // R2B1,2 // R2B1,3 // R2B2,3;
rhs = bas // R2B2,3 // R2B1,3 // R2B1,2
lhs == rhs
```

```
Out[*]=
```

$$\{e_1, e_1 - T e_1 + T e_2, e_1 - T e_1 + T e_2 - T^2 e_2 + T^2 e_3, f_1, f_1 - S f_1 + S f_2, f_1 - S f_1 + S f_2 - S^2 f_2 + S^2 f_3, \\ e_1 f_1, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_2, e_1 f_1 - S e_1 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 + S^2 e_1 f_3, e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_2 f_1, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_2 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 - \\ S T e_1 f_2 + S^2 T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S^2 T e_2 f_2 + S^2 e_1 f_3 - S^2 T e_1 f_3 + S^2 T e_2 f_3, \\ e_1 f_1 - T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1, e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 - \\ T^2 e_2 f_1 + S T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1 - S T^2 e_3 f_1 + S e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S T^2 e_2 f_2 + S T^2 e_3 f_2, \\ e_1 f_1 - S e_1 f_1 - T e_1 f_1 + S T e_1 f_1 + T e_2 f_1 - S T e_2 f_1 - T^2 e_2 f_1 + S T^2 e_2 f_1 + T^2 e_3 f_1 - \\ S T^2 e_3 f_1 + S e_1 f_2 - S^2 e_1 f_2 - S T e_1 f_2 + S^2 T e_1 f_2 + S T e_2 f_2 - S^2 T e_2 f_2 - S T^2 e_2 f_2 + \\ S^2 T^2 e_2 f_2 + S T^2 e_3 f_2 - S^2 T^2 e_3 f_2 + S^2 e_1 f_3 - S^2 T e_1 f_3 + S^2 T e_2 f_3 - S^2 T^2 e_2 f_3 + S^2 T^2 e_3 f_3, \\ g_1, c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + c_2 e_1 f_2 + g_1 - S T g_1 + S T g_2, \\ c_1 e_1 f_1 - c_1 e_2 f_1 + T c_1 e_2 f_1 - c_2 e_2 f_1 + T c_2 e_2 f_1 - T c_1 e_3 f_1 - T c_2 e_3 f_1 + c_2 e_1 f_2 - S c_2 e_1 f_2 + \\ S T c_1 e_2 f_2 - S T c_1 e_3 f_2 - S T c_2 e_3 f_2 + S c_2 e_1 f_3 + S T c_2 e_2 f_3 + g_1 - S T g_1 + S T g_2 - S^2 T^2 g_2 + S^2 T^2 g_3\}$$

```
Out[*]=
```

True

```
In[*]:= FullSimplify[c1 e1 f1 - c1 e2 f1 - c2 e2 f1 + c2 e1 f2]
```

```
Out[*]=
```

$$c_1 (e_1 - e_2) f_1 + c_2 (-e_2 f_1 + e_1 f_2)$$

```
In[*]:= LR2Bi,j[E_] := Expand[E /. {
  ei => T ei + (1 - T) ej,
  fi => S fi + (1 - S) fj,
  gi => T S gi + (1 - T S) gj
  + c1 (ei - ej) fj + c2 (ei fj - ej fi)
}];
```

```
LR2Bi,j[E_] := Expand[E /. {
  ei => T-1 ei + (1 - T-1) ej,
  fi => S-1 fi + (1 - S-1) fj,
  gi => T-1 S-1 gi + (1 - T-1 S-1) gj
  + d1 ei fi + d2 ei fj + d3 ej fi + d4 ej fj
}];
```

```
bas = {e1, e2, e3, f1, f2, f3, e1 f1, e1 f2, e1 f3, e2 f1, e2 f2, e2 f3, e3 f1, e3 f2, e3 f3, g1, g2, g3};
{eqn} = DeleteCases[(bas // LR2B1,2 // LR2B1,2) - bas, 0]
```

```
Out[*]=
```

$$\left\{S T d_1 e_1 f_1 - \frac{c_2 e_2 f_1}{S} + S T d_3 e_2 f_1 + \frac{c_1 e_1 f_2}{T} + \frac{c_2 e_1 f_2}{T} + S T d_2 e_1 f_2 - \frac{c_1 e_2 f_2}{T} + \frac{c_2 e_2 f_2}{S} - \frac{c_2 e_2 f_2}{T} + S T d_4 e_2 f_2\right\}$$

In[*]:= eqs = Union@CoefficientRules[eqn, {e₁, e₂, e₃, f₁, f₂, f₃, g₁, g₂, g₃}] /. (c_ -> c_) :-> (c == 0)

Out[*]=

$$\left\{ -\frac{c_1}{T} + \frac{c_2}{S} - \frac{c_2}{T} + S T d_4 == 0, -\frac{c_2}{S} + S T d_3 == 0, \frac{c_1}{T} + \frac{c_2}{T} + S T d_2 == 0, S T d_1 == 0 \right\}$$

In[*]:= {sol} = Solve[eqs, {d₁, d₂, d₃, d₄}]

Out[*]=

$$\left\{ \left\{ d_1 \rightarrow 0, d_2 \rightarrow \frac{-c_1 - c_2}{S T^2}, d_3 \rightarrow \frac{c_2}{S^2 T}, d_4 \rightarrow \frac{S c_1 + S c_2 - T c_2}{S^2 T^2} \right\} \right\}$$

In[*]:= LR2B_{i,j}[E_] := Expand[E /. {

$$\begin{aligned} & e_i \rightarrow T e_i + (1 - T) e_j, \\ & f_i \rightarrow S f_i + (1 - S) f_j, \\ & g_i \rightarrow T S g_i + (1 - T S) g_j \\ & + c_1 (e_i - e_j) f_j + c_2 (e_i f_j - e_j f_i) \end{aligned}$$

LR2B_{i,j}[E_] := Expand[E /. {

$$\begin{aligned} & e_i \rightarrow T^{-1} e_i + (1 - T^{-1}) e_j, \\ & f_i \rightarrow S^{-1} f_i + (1 - S^{-1}) f_j, \\ & g_i \rightarrow T^{-1} S^{-1} g_i + (1 - T^{-1} S^{-1}) g_j \\ & + \frac{-c_1 - c_2}{S T^2} e_i f_j + \frac{c_2}{S^2 T} e_j f_i + \frac{S c_1 + S c_2 - T c_2}{S^2 T^2} e_j f_j \end{aligned}$$

bas = {e₁, e₂, e₃, f₁, f₂, f₃, e₁ f₁, e₁ f₂, e₁ f₃, e₂ f₁, e₂ f₂, e₂ f₃, e₃ f₁, e₃ f₂, e₃ f₃, g₁, g₂, g₃};
(bas // LR2B_{1,2} // LR2B_{1,2}) == bas

Simplify@Thread[(bas // LR2B_{1,2} // LR2B_{1,2}) == bas]

Simplify@Thread[(bas // LR2B_{3,2} // LR2B_{3,2}) == bas]

lhs = bas // LR2B_{1,2} // LR2B_{1,3} // LR2B_{2,3};

rhs = bas // LR2B_{2,3} // LR2B_{1,3} // LR2B_{1,2};

Simplify@Thread[lhs == rhs]

Out[*]=

True

Out[*]=

True

Out[*]=

True

Out[*]=

True