

Pensieve header: Testing the associativity of compositions in GDO. Based on GenericDoPeGDO.nb in pensieve://Talks/DaNang-1905/.

CompositionLaw

```
In[*]:= M_{A→B} [ω1_, Q1_] // M_{B→C} [ω2_, Q2_] := Module [ {ζA, zC, E1, F1, G1, E2, F2, G2, I},
  ζA = Table [ζi, {i, A}]; zC = Table [zi, {i, C}]; I = IdentityMatrix@Length@B;
  E1 = Table [∂_{ζi,zj} Q1, {i, A}, {j, B}]; E2 = Table [∂_{ζi,zj} Q2, {i, B}, {j, C}];
  F1 = Table [∂_{ζi,ζj} Q1, {i, A}, {j, A}]; F2 = Table [∂_{ζi,ζj} Q2, {i, B}, {j, B}];
  G1 = Table [∂_{zi,zj} Q1, {i, B}, {j, B}]; G2 = Table [∂_{zi,zj} Q2, {i, C}, {j, C}];
  Expand /@ M_{A→C} [ω1 ω2 Det [I - F2.G1]^-1, ζA.E1.Inverse [I - F2.G1].E2.zC
    + 1/2 ζA.(F1 + E1.F2.Inverse [I - G1.F2].E1^T).ζA +
    1/2 zC.(G2 + E2^T.G1.Inverse [I - F2.G1].E2).zC ]
```

RandomM

```
In[*]:= RM_{A→B} := Module [ {vs = Table [ζi, {i, A}] ∪ Table [zi, {i, B}]},
  M_{A→B} [1, Sum [RandomInteger [{-3, 3}] vi vj, {vi, vs}, {vj, vs}]]];
  {M1 = RM_{1,2}→{1,2,3}, M2 = RM_{1,2,3}→{1,2,3}, M3 = RM_{1,2,3}→{1,2}} // Column
```

RandomM

```
M_{1,2}→{1,2,3} [1,
  -2 z2^2 - 4 z1 z3 + 2 z2 z3 + 3 z3^2 - 2 z1 ζ1 - 3 z2 ζ1 + 3 z3 ζ1 + ζ1^2 - z1 ζ2 + 3 z2 ζ2 - z3 ζ2 + 3 ζ1 ζ2 - 2 ζ2^2]
Out[*]:= M_{1,2,3}→{1,2,3} [1, -6 z1 z2 - z2^2 + 4 z1 z3 - 4 z2 z3 - 2 z1 ζ1 - 4 z3 ζ1 -
  ζ1^2 - 5 z1 ζ2 - 6 z3 ζ2 + 2 ζ1 ζ2 - 3 ζ2^2 - 2 z1 ζ3 - 4 z2 ζ3 + 2 z3 ζ3 + 3 ζ1 ζ3 - ζ2 ζ3 + ζ3^2]
M_{1,2,3}→{1,2} [1,
  -2 z1^2 + z1 z2 - z2^2 - 2 z1 ζ1 + z2 ζ1 - 2 ζ1^2 - z1 ζ2 + 5 z2 ζ2 + 6 ζ1 ζ2 - 3 ζ2^2 - 3 z2 ζ3 + 5 ζ1 ζ3 + 4 ζ2 ζ3 + 2 ζ3^2]
```

LeftAssociation

```
In[*]:= (M1 // M2) // M3
```

LeftAssociation

```
Out[*]:= M_{1,2}→{1,2} [ 1/763144881,
  -1293971947 z1^2/763144881 - 810466295 z1 z2/763144881 + 2061717314 z2^2/763144881 + 50832566 z1 ζ1/763144881 - 72601333 z2 ζ1/763144881 +
  1739335415 ζ1^2/763144881 - 954526 z1 ζ2/763144881 - 42202495 z2 ζ2/763144881 + 679768984 ζ1 ζ2/763144881 - 574750489 ζ2^2/763144881 ]
```

Associativity

```
In[*]:= ((M1 // M2) // M3) == (M1 // (M2 // M3))
```

Associativity

```
Out[*]:= True
```