

Pensieve Header: Computing $\Delta(e^x)$ in PSS.

$$\text{In[*]} := \mathbb{D}_{x \rightarrow y, z} [f_] := \text{Simplify} \left[\frac{(f /. x \rightarrow y) - (f /. x \rightarrow z)}{y - z} \right];$$

$$\Delta_{x \rightarrow y, z} [f_] := \text{Simplify} [f /. x \rightarrow y + z];$$

$$\mathbb{m}_{x, y \rightarrow z} [f_] := \text{Simplify} [f /. \{x \rightarrow z, y \rightarrow z\}];$$

$$\sigma_{x \rightarrow y} [f_] := \text{Simplify} [f /. x \rightarrow y]$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2}$$

Out[*]=

$$\frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{e^{x_1} - e^{x_2}}{x_1 - x_2} + \frac{-e^{x_1} + e^{x_3}}{x_1 - x_3}}{x_2 - x_3}}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3} // \Delta_{x_1 \rightarrow y_1, z_1}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{-e^{x_2} + e^{y_1 + z_1}}{-x_2 + y_1 + z_1} + \frac{e^{x_3} - e^{y_1 + z_1}}{-x_3 + y_1 + z_1}}{x_2 - x_3}}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3} // \Delta_{x_1 \rightarrow y_1, z_1} // \Delta_{x_2 \rightarrow y_2, z_2} // \Delta_{x_3 \rightarrow y_3, z_3}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{e^{y_1 + z_1} - e^{y_2 + z_2}}{y_1 - y_2 + z_1 - z_2} + \frac{-e^{y_1 + z_1} + e^{y_3 + z_3}}{y_1 - y_3 + z_1 - z_3}}{y_2 - y_3 + z_2 - z_3}}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3} // \Delta_{x_1 \rightarrow y_1, z_1} // \Delta_{x_2 \rightarrow y_2, z_2} // \Delta_{x_3 \rightarrow y_3, z_3} // \mathbb{m}_{y_1, y_2 \rightarrow y_1}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{e^{y_1} (e^{z_1} - e^{z_2})}{z_1 - z_2} + \frac{-e^{y_1 + z_1} + e^{y_3 + z_3}}{y_1 - y_3 + z_1 - z_3}}{y_1 - y_3 + z_2 - z_3}}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3} // \Delta_{x_1 \rightarrow y_1, z_1} // \Delta_{x_2 \rightarrow y_2, z_2} // \Delta_{x_3 \rightarrow y_3, z_3} // \mathbb{m}_{y_1, y_2 \rightarrow y_1} // \sigma_{y_3 \rightarrow y_2}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{e^{y_1} (e^{z_1} - e^{z_2})}{z_1 - z_2} + \frac{-e^{y_1 + z_1} + e^{y_2 + z_2}}{y_1 - y_2 + z_1 - z_2}}{y_1 - y_2 + z_2 - z_3}}$$

$$\text{In[*]} := e^{x_1} // \mathbb{D}_{x_1 \rightarrow x_1, x_2} // \mathbb{D}_{x_2 \rightarrow x_2, x_3} // \Delta_{x_1 \rightarrow y_1, z_1} // \Delta_{x_2 \rightarrow y_2, z_2} // \Delta_{x_3 \rightarrow y_3, z_3} // \mathbb{m}_{y_1, y_2 \rightarrow y_1} // \sigma_{y_3 \rightarrow y_2} // \mathbb{m}_{z_2, z_3 \rightarrow z_2}$$

Out[*]=

$$\frac{\frac{e^{y_1} (e^{z_1} - e^{z_2})}{z_1 - z_2} + \frac{-e^{y_1 + z_1} + e^{y_2 + z_2}}{y_1 - y_2 + z_1 - z_2}}{y_1 - y_2}}$$

```
In[*]:= Simplify[
  (e^x1 // D_{x1→x1,x2} // D_{x2→x2,x3} // Δ_{x1→y1,z1} // Δ_{x2→y2,z2} // Δ_{x3→y3,z3} // m_{y1,y2→y1} // σ_{y3→y2} // m_{z2,z3→z2})
  (y1 - y2) ]
```

Out[*]=

$$\frac{e^{y_1} (e^{z_1} - e^{z_2})}{z_1 - z_2} + \frac{-e^{y_1+z_1} + e^{y_2+z_2}}{y_1 - y_2 + z_1 - z_2}$$

```
In[*]:= res = Limit[Simplify[
  (e^x1 // D_{x1→x1,x2} // D_{x2→x2,x3} // Δ_{x1→y1,z1} // Δ_{x2→y2,z2} // Δ_{x3→y3,z3} // m_{y1,y2→y1} // σ_{y3→y2} // m_{z2,z3→z2})
  (y1 - y2) ],
  y2 → z1 + y1 - z2]
```

Out[*]=

$$\frac{e^{y_1} (e^{z_1} - e^{z_2} - e^{z_1} z_1 + e^{z_1} z_2)}{z_1 - z_2}$$

Compare with the results in PhilnPSS.pdf:

$$\mathbb{O}_{12} \left(e^{x_1} e^{x_2} + t^{12} e^{x_1+x_2} \left(\frac{e^{\bar{x}_2-x_2} - 1}{\bar{x}_2 - x_2} - 1 \right) \right) / \{x_1 \rightarrow y_1, \bar{x}_1 \rightarrow y_2, x_2 \rightarrow z_1, \bar{x}_2 \rightarrow z_2\}$$

```
In[*]:= Simplify[res == e^{y1+z1} ( (e^{z2-z1} - 1) / (z2 - z1) - 1 )]
```

Out[*]= True