חשבון אינפיניטסימלי מתקדם

האוניברסיטה העברית, סתיו 1998

מטרה: הכללת המושגים הבסיסיים של החשבון האינפיניטסימלי במשתנה אחד, גזירה, אינטגרציה והקשר ביניהם לכמה ממדים, תוך שימת דגש על הבנה גיאומטרית של מושגים אלו.

סילבוס: טופולוגיה בסיסית של R^n, מסילות, גזירה כיוונית, הדיפרנציאל, כלל השרשרת, תנאי הכרחי לנקודות קיצון, נוסחת טיילור, תנאים מספיקים לנקודות קיצון, אינטגרציה, שטחים ונפחים, החלפת משתנים, אורך קשת, אינטגרלים קוויים, משפט גרין, פונקציות מולטי-לינאריות ונפחים של מקבילונים, שטח פנים, תבניות דיפרנציאליות, משפט סטוקס, המשפטים הקלאסיים בשלושה ממדים, תבניות סגורות ומדויקות, שימושים נוספים.

ספרות: Edwards, Advanced Calculus of Several Variables.

מס' הקורס: 80316.

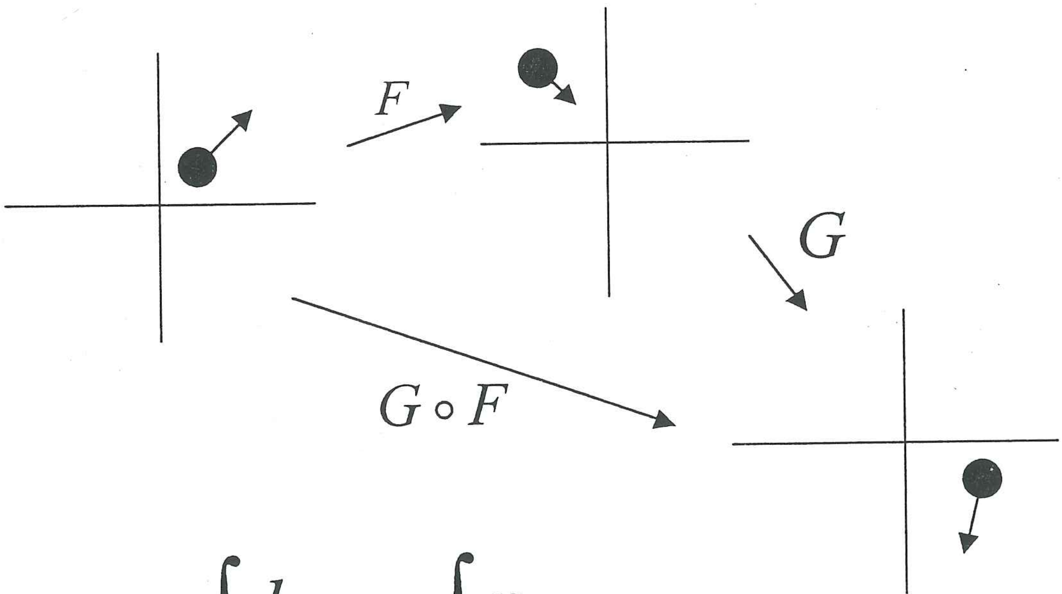
המרצים: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.ac.il ועמנואל פרגיון, אינשטיין 6, טלפון 658-4534, דואר אלקטרוני farjoun@math.huji.ac.il.

שעות קבלה: בינתיים ע"פ קביעה מראש. יותר מאוחר יתכן ויקבעו שעות קבועות.

שעות הקורס: דרור: שלישי 10-12 ורביעי 1-3 בפלדמן ב'. עמנואל: ראשון 10-12 בשפרינצק 117 ורביעי 1-3 במתימטיקה 2.

המתרגל: אסף ליבמן, דואר אלקטרוני asil@math.huji.ac.il.

שעות התרגול: ראשון 3-5 בשפרינצק 26, רביעי 4-6 בשפרינצק 116 ורביעי 6-8 בשפרינצק 166. חובה להשתתף בתרגול! בשעות התרגול ינתנו תרגילים להגשה בתוך שבוע. ציון התרגיל יהווה 15% מהציון הכולל בקורס.



$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

מטרת הקורס: הכללת המשפט היסודי של חדו"א למשתנה אחד, גזירה ואינטגרציה והקשר ביניהן לכמה משתנים והעמקת ההבנה והאינטואיציה שלנו.

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם

האוניברסיטה העברית, סתיו 1998

מסי הקורס: 80316.

המרצים: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.ac.il ועמנואל פרג'ון, אינשטיין 6, טלפון 658-4534, דואר אלקטרוני farjoun@math.huji.ac.il.

שעות קבלה: בינתיים ע"פ קביעה מראש. יותר מאוחר יתכן ויקבעו שעות קבועות.

שעות הקורס: דרור: שלישי 10-12 ורביעי 1-3 בפלדמן ב'. עמנואל: ראשון 10-12 בשפרינצק 117 ורביעי 1-3 במתימטיקה 2.

המתרגל: אסף ליבמן, ~~לה 03, טלפון 658-5710~~, דואר אלקטרוני asil@math.huji.ac.il.

שעות התרגול: ראשון 3-5 בשפרינצק 26, רביעי 4-6 בשפרינצק 116 ורביעי 6-8 בשפרינצק 166. חובה להשתתף בתרגול! בשעות התרגול ינתנו תרגילים להגשה בתוך שבוע. ציון התרגיל יהווה 15% מהציון הכולל בקורס. ~~נוספים 10% בחנים שינתנו מפעם לפעם~~

סילבוס ע"פ שבועות:

ספרות: M. Spivak, Calculus on Manifolds.

$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

2½ 1. דיפרנציאל, כלל השרשרת, נגזרות חלקיות, תנאי הכרחי לאקסטרמום משפט לגרנז', פונקציה הפוכה, סתומה, ...

1½ 2. נגזרות גבוהות, משפט טיילור, מינ/מקס.

2 3. אינטגרציה על $\mathbb{R}^n$, שטחים ונפחים, אינטגרציה בשיטות החלפת משתנה ואינטגרציה גאוסיינית.

2 4. עקומות, תבניות, אינטגרציה של חד-תבניות, המשפט היסודי

3 5. משפט גרין: מוטיבציה: , $d\omega$, דו-תבניות בכלל, ב-$\mathbb{R}^3$! אינטגרציה של דו-תבניות + ניסוח בעזרת curl.

1½ 6. הכללה ל-n ממדים

½ 7. שימושים

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם

האוניברסיטה העברית, סתיו 1998

מס' הקורס: 80316.

המרצים: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.ac.il ועמנואל פרג'ון, אינשטיין 6, טלפון 658-4534, דואר אלקטרוני farjoun@math.huji.ac.il.

שעות קבלה: בינתיים ע"פ קביעה מראש. יותר מאוחר יתכן ויקבעו שעות קבועות.

שעות הקורס: דרור: שלישי 10-12 ורביעי 1-3 בפלדמן ב. עמנואל: ראשון 10-12 בשפרינצק 117 ורביעי 1-3 במתימטיקה 2.

המתרגל: אסף ליבמן, לוי 03, טלפון 658-5710, דואר אלקטרוני asil@math.huji.ac.il.

שעות התרגול: ראשון 3-5 בשפרינצק 26, רביעי 4-6 בשפרינצק 116 ורביעי 6-8 בשפרינצק 166. חובה להשתתף בתרגול! בשעות התרגול ינתנו תרגילים להגשה בתוך שבוע. ציון התרגיל יהווה 15% מהציון הכולל בקורס. 10% נוספים: בחנים שינתנו מידי פעם.

סילבוס ע"פ שבועות:

ספרות: M. Spivak, Calculus on Manifolds.

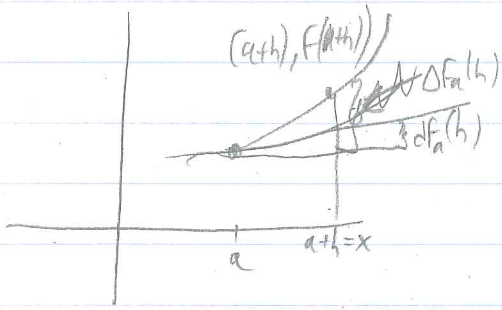
$$\int_D d\omega = \int_{\partial D} \omega$$

1. מרחבים מטריים.
2. I,O,C, הדיפרנציאל, כלל השרשרת, נגזרות מעורבות.
3. נגזרות גבוהות, משפט טיילור, מינ/מקס.
4. חד תבניות ואינטגרציה.
5. אינטגרציה על $\mathbb{R}^n$, החלפת משתנים.
6. n-תבניות, מכפלות-$\wedge$.
7. הדיפרנציאל, הדוגמא של $\mathbb{R}^3$.
8. שרשראות ואינטגרציה עליהן.
9. משפט סטוקס. [ובזמן המקרים הפרטיים של $\mathbb{R}^3$]
10. ~~E&M~~ הלמה של פואנקרה, E&M, מספר הקישור...
11.

משפט הפונקציה הסתומה וכו'!

אנליזה ברורה וכדומה.

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם; 22 לנובמבר 1998. (הקבוצה של עמנואל)



$$\Delta f_a(h) \approx \underbrace{y - f(a) = f'(a)(x-a)}_{\text{המשיק}}$$

$$\underbrace{df_a}_{\text{הדיפרנציאל}} h = f'(a)h$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta f_a(h) - df_a(h)}{h} = \quad = 0$$

$F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, מגדירים:

$$f'(a) = \lim \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(אם הגבול קיים)

$\boxed{\text{משמעות: מהירות תנועה}}$

<u>טענה</u> $F'(a) = (f_1', f_2', \ldots, f_m')$

<u>כללי</u>

$(f+g)' = f' + g'$ $\quad (\phi f)' = \phi' f + \phi f'$

$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $\quad (f \circ \phi)'(t) = f'(\phi(t))\phi'(t)$

<u>הגדרה שקולה:</u>

$\Delta f_a(h) = f(a+h) - f(a)$

$df_a(h) = f'(a) \cdot h$

<u>טענה</u> $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית ב-a אם"ם קיים $L: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ כך ש

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - L(h)}{h} = 0$$

ואז כך הוא, אז $L(h) = f'(a) \cdot h$

<u>טענה</u> ניסוח אחר לכלל השרשרת.

$$d(f \circ \phi)_t = df_{\phi(t)} \circ d\phi_t$$

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{(m)}$ מציירים כ"משטח". מהוו ה"מישור המשיק"?

רעיון: נתחיל עם ישרים:

$$(D_v F)(a) = \lim_{h \to 0} \frac{F(a+hv) - f(a)}{h}$$

מקרה פרטי $D_i = \frac{\partial F}{\partial x_i}$

דוגמאות: $F(x,y) = xy$ $\quad g(x,y) = e^x \sin y$

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (תלפיות) 6 לדצמבר 1998

1. דיפרנציאלים היו אחת העובדות המשמעותיות ביותר בעולמינו.

א. כלל השרשרת ~~באינטגר~~ ל- $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

2 א. הדיפרנציאל של ורס׳ לינאריות. > אדיטיביות כפל בסקלר.

ב. אם $df\equiv 0$ אם H תחום קשיר אזי F קבועה.

ג. נוסח מטבלה

ה. נגזרה של x^x

3. נגזרות כיווניות $\quad D_{(x,y)}f \quad (D_v f)(x)$

$D_{(x,y)}f = \lim_{t\to 0^+}$

א. הגדרה

ב. חישוב בעזרת הדיפרנציאל

ג. תכונות לינאריות.

ד. נקודות קיצון, מינימום של $2x^2+2xy+5y^2-18y+18$

נגזרת שנייה

משפט: נגזרות שניות קיימות ורציפות $\Rightarrow$ הן שוות

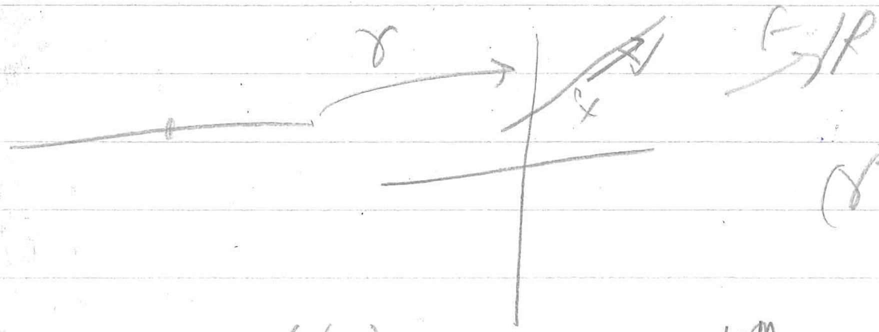
$$\frac{d}{dx}f = \frac{1}{\Delta x}\left(f(x+\Delta x, y) - f(x)\right)$$

$$\frac{d}{dx}f = \frac{\partial}{\partial x} f(x+\alpha\Delta x, y)$$

קיים α

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (תרגול), 9 לדצמבר 1998.

השלמה: משפט התלכדות של הנגזרות החלקיות.
הרחבנו לנגזרות גבוהות וב-$\mathbb{R}^n$
את טיילור נציג כמידה על מימד



טענה:

$$(\gamma^* F)^{(k)} = \gamma^*(D_v^k F)$$

נוסחה ל- $D_v^k F$ כאשר $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

נזכור בנוסחה ל- D_v

$$D_v f = v \cdot \operatorname{grad} f$$

$$D_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

משפט טיילור במשתנה אחד:

$$F(T+t) = F(T) + tF'(T) + \frac{t^2}{2}F''(T) + \dots + \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}F^{(m+1)}(T+\theta t)$$

נרשום משתנים: ($F = \gamma^* f$, נקח $x=0$, $t=1$) $\quad x+tv$

$$F(x+v) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D_v^k F + \frac{1}{(k+1)!} D_v^{k+1} F\Big|_{x+\theta v}$$

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (תלמידים), 13 לדצמבר 1998.

התחלפות נגזרות חלקיות:

$\partial_x \quad , \delta_x$

$\delta_x \delta_y = \delta_y \delta_x$

$\delta_x \partial_y = \partial_y \delta_x$

משפט לגרנז': $\delta_x F = (\partial_x F)(\cancel{x+\alpha\Delta x}\, x_\alpha)$

$x_\alpha = x + \alpha \Delta x$

$y_\beta = y + \beta \Delta y$

$\delta_x(\delta_y F) = \delta_x[\partial_y F(x, y_\beta)] =$ תקציר

$\delta_x(\delta_y F) = (\partial_x(\delta_y F))(x_\alpha, y) = (\delta_y \partial_x F)(x_\alpha, y) = (\partial_y \partial_x F)(x_\alpha, y_\beta)$

⋮

תזכורת: $F(x+v) = \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!} D_v^k F + \frac{1}{(k+1)!} D_v^{k+1} F \Big|_{x+\theta v}$

$(D_v^k) F = \left(\sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)^k$

פיתוח עד סדר שני, ההסיאן

$F(x+v) = F(x) + v \cdot \mathrm{grad} F + \frac{1}{2} v^T H_F v +$ סדר גבוה

נקודות מינימום ומקסימום.

סדר זוגי, $\forall \Rightarrow$ מינ. סדר זוגי, $\exists$ לא מקס

סדר אי-זוגי, $\forall \Rightarrow$ מינ. סדר אי-זוגי, $\exists$ לא מינ.

סדר זוגי וסוגי $\Rightarrow$ דוגמאות "אוכף"

ליצור המקרים דרך לעשות.

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (תלפיות), 20 לדצמבר 1998

משפט הפונקציה ההפוכה: $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית ברציפות בסביבת $a\in\mathbb{R}^n$, ו-df_a הפיכה. אזי קיימות סביבות V של a ו-W של $f(a)$ כך ש: $f:V\to W$ העתקה הפיכה, ~~מדיפרנציאבילית~~ ברגע: f^{-1} דיפרנציאבילית ברציפות ומתקיים

$$d(f^{-1})_{f(x)}=(df_x)^{-1}$$

סקיצת ההוכחה: 1. ראשית נניח $a=0$, $f(0)=0$, $df_0=I$.

2. עקרון קירוב הגלי: לכל x,y בתוך קבוצה קטנה מספיק ל-0,

$$\|f(y)-f(x)-(y-x)\|<\epsilon\|y-x\|$$

3. קיום f^{-1}: פתרון $f(x)=z$, יחידות הפתרון.
4. רציפות f^{-1}.
5. דיפרנציאביליות ב-0 של f^{-1}.
6. המקרה הכללי: $g(x)=L^{-1}(f(x+a)-f(a))$ כאשר $L=df_a$
7. דיפרנציאביליות הרחק מ-0, חישוב הדיפרנציאל.

משפט הפונקציה הסתומה: $f:\mathbb{R}^n_x\times\mathbb{R}^m_y\to\mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות בסביבת $(a,b)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$, ומקיימת $f(a,b)=0$. נניח ש-$(d_yf)_{(a,b)}$ הפיך. אזי קיימות סביבות $a\in A$, $b\in B$ כך שלכל $x\in A$ קיים $g(x)\in B$ יחיד כך ש- $f(x,g(x))=0$. הפונקציה g דיפרנציאבילית, והנגזרת נתונה ע"י

$$dg_x=-(d_yf)^{-1}_{(x,g(x))}(d_xf)_{(x,g(x))}$$

הוכחה: $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}x\\f(x,y)\end{pmatrix}$ ההפכי מהצורה $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\mapsto\begin{pmatrix}x\\k(x,y)\end{pmatrix}$

חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (תמצית), 23 לדצמבר 1998

1. משפט הפונקציה הסתומה כבשיעור הקודם

2. אינטגרציה: חלוקה למלבנים P, $L(F,P)$; $U(F,P)$

$L \le U$ (הכל על מלבן סגור A)

עידון גם השוויונות עבור עידון

פונקציות אינטגרביליות דוגמאות! הדוגמא: χ_Q

מידה 0:

אינטגרביליות $\Leftarrow$ מידת אי הרציפות $=0$.

מידה 0: הגדרה, Q, איחוד בן מנייה, הקטע $[a,b]$, הספוג של סרפינסקי

השתנות של פונקציה

$$V(F,x) = \inf_{\substack{x\in U \\ \text{סביבה}}} \left(\sup_{x\in U} F(x) - \inf_{x\in U} F(x) \right)$$

טענה F רציפה ב-x אמ"מ $V(F,x)=0$

טענה הקבוצה $[V(F,x) \geq \epsilon]$ סגורה

משפט אינטגרביליות $\Leftrightarrow$ מידת אי-הרציפות $=0$.

הערה: נניח מידת אי-הרציפות $=0$ נמצא חלוקות המכסות הכל את $B_\epsilon = [V(F,x) \geq \epsilon]$ ושעליהן ההשתנות קטנה והרחק מ-B_ϵ

נניח אינטגרביליות. קל: אי הרציפות היא $\bigcup_n B_{1/n}$ נראה ש-$B_{1/n}$ ממידה 0.

אינפי מתקדם - תרגיל 5 (הלפיות)

1) תהי $K\subseteq\mathbb{R}^n$ קומפקטית ; $f:K\to\mathbb{R}$ רציפה. הוכח ש-f מקבלת את המינימום והמקסימום.

2) מצאו את נקודות הקיצון של $f(x,y)=x^3+y^2+axy$. שימו לב לתלות בפרמטר a.

3) א) תהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית ונניח ש-$\nabla f(a)\neq 0$ בנקודה $a=(x_0,y_0)$. יהי $0\neq u\in\mathbb{R}^2$ וקטור. הוכח שאם $df_a(u)>0$ אז קיים $T>0$ כך שלכל $0<t\leq T$ מתקיים $f(a)<f(a+ut)$. באופן דומה הוכח שאם $df_a(u)<0$ אז קיים T כך שלכל $0<t\leq T$ מתקיים $f(a)>f(a+ut)$.

ב) יהי $f(x,y)=x^2+xy+\frac{1}{12}y^3$. מצאו את נקודות האקסטרמום של f על המשולש הסגור שקודקודיו הם $(-1,6)$; $(-2,4)$; $(-1,2)$.

4) יהי $f:[0,2]\times[0,2]\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x,y)=x^2+6xy+2y^2-8x-10y+1$. מצאו ומיינו את הנקודות ב-D המועמדות להיות אקסטרמום לוקלי וגלובלי.

5) יהי $K\subseteq\mathbb{R}^2$ קומפקטית ונסמן $U=\text{int}K$. נניח ש-$f:K\to\mathbb{R}$ רציפה ב-K וגזירה פעמיים ברציפות ב-U.

א) השתמשו בנגזרות החלקיות מסדר 2 והוכיחו שאם $\Delta f>0$ (לפלסיאן) בכל U, אז המקסימום של f מתקבל ב-∂K. ע"י החלפת f ב-$-f$ הסיקו שאם $\Delta f<0$ בכל U אז f מקבלת את המינימום ב-∂K. (הערה: $\Delta f\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$)

ב) נניח ש-f הרמונית ב-U כלומר $\Delta f\equiv 0$ (תרגיל 4 שאלה 7). הוכיחו שהמינימום והמקסימום של f מתקבלים על ∂K. (הדרכה: אם ב-$x\in U$ f מקבלת ערך גדול ממש מערכה על ∂K, קחו $\varepsilon>0$ קטן מספיק כך שזה יהיה נכון גם עבור $f(x,y)+\varepsilon(x^2+y^2)$ והשתמשו בסעיף א׳).

⑤ יהי $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ הרמונית. לכל (x,y) שעבורם $x^2+y^2=1$ מתקיים
$f(x,y)=0$. חשבו את $f(\frac{1}{e},\frac{1}{e})$.

③ יהי ABC משולש מלא $\triangle$ שצלעותיו שוות ואורכן 1.
חשבו את $\max\{\|x-A\|\cdot\|x-B\|\cdot\|x-C\| : x\in\triangle\}$.
(הדרכה: חשבו מפורשות את $f(x,y):\triangle\to\mathbb{R}$ - פונקצית מכפלת
המרחקים. יראו ש $\ln f(x,y)$ הרמונית בפנים של $\triangle$ ע"י
שימוש בהרמוניות $\ln(x^2+y^2)$ ובעובדה שראינו בקורס, שאם $g(u)$
הרמונית אז גם $g(u+u_0)$ לכל $u_0\in\mathbb{R}^2$ וכנ"ל לגבי סכום
הרמוניות. השתמשו בסעיף ג' ובשיקולי סימטריה כדי למצוא מכסימום
על אחת הצלעות. זו תהיה מכסימום במשולש כולו).

⑥* (רשות). הוכח שהטענות הבאות שקולות:
I. המשפט היסודי של האלגברה (לכל פולינום מעל $\mathbb{C}$ יש שורש).
II. לכל פולינום $p(z)\in\mathbb{C}[z]$ הפונקציה $f(x,y)=\ln|p(x+iy)|$
היא הרמונית היכן שמוגדרת.

אינפי מתקדם - תרגיל 4 (רולפיור)

1. הוכח שלפונקציה

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0 \\ 0 & (x,y)=0 \end{cases}$$

~~[illegible]~~ מתקיים $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)$

2. מצאו מה לא נכון בהוכחה שבסימון פונקציות כמשתנים.

יהיו: $w=f(x,y,z)$, $z=g(x,y)$ אזי

$$\frac{\partial w}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}$$

(מדוע?). לכן $\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0$. אבל אם $w=x+y+z$ ו- $z=x+y$ אזי $\frac{\partial w}{\partial z}=\frac{\partial z}{\partial x}=1$ ולכן $1=0$. היכן הטעות?

3. קואורדינטות כדוריות מוגדרות ע"י $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

~~$F(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\cos\theta\sin\varphi,\rho\cos\theta\cos\varphi,\dots)$~~

$$F(\rho,\theta,\varphi)=(\rho\cos\theta\sin\varphi,\ \rho\sin\theta\sin\varphi,\ \rho\cos\varphi)$$

יהי $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ פונ' גזירה ברציפות פעמיים. נסמן $g=f\circ F$ "הפונקציה f בקואורדינטות כדוריות".

הלפלסיאן של f הוא הפונקציה $\nabla^2 f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$.

הוכח ש-

$$\nabla^2 f=\frac{\partial^2 g}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial g}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial\varphi^2}+\frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial g}{\partial\varphi}+\frac{1}{\rho^2\sin^2\varphi}\frac{\partial^2 g}{\partial\theta^2}$$

4. יהיו $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאביליות. הוכח ש-

א) $D_u(f+g)=D_uf+D_ug$ ~~[illegible]~~

ב) $D_{u+v}f=D_uf+D_vf$

ג) אם $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית: $D_u(h\cdot f)=(D_uh)f+h(D_uf)$

5. תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ! $a,b\in U$ נקודות המקיימות את: הקטע L בין a ל- b ! אם $f:U\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית אזי קיימת $c\in L$ עם

$f(b)-f(a)=\langle f'(c),b-a\rangle$.

(תזכורת: $L=\{a(1-t)+bt : 0\le t\le 1\}$).

6 (א) יהי: $p>0$ קבוע. נגדיר את התחום $K=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x,y\le p,\ p\le x+y\}$.

מצאו היכן מקבלת המקסימום של הפונקציה: $f(x,y)=(p-x)(p-y)(x+y-p)$

בתחום K.

(ב) יהיו x,y,z אורכי צלעות משולש שהיקפו $2p$ אזי שטחו שווה

ל: $S=\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)p}$. הסיקו מזה שמבין המשולשים בעלי היקף נתון f

שמבין, הגדול השטח הגדול ביותר הוא משולש שווה צלעות.

7 (א) פונקציה: $f=(u,v):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ נקראת אנליטית אם מקיימת

משוואות קושי-רימן: $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

הוכיחו שהרכבה של שתי פונקציות אנליטיות היא אנליטית.

(ב) יהי $U\subseteq\mathbb{R}^2$ פתוחה. $f:U\to\mathbb{R}$ נקראת הרמונית ב-U

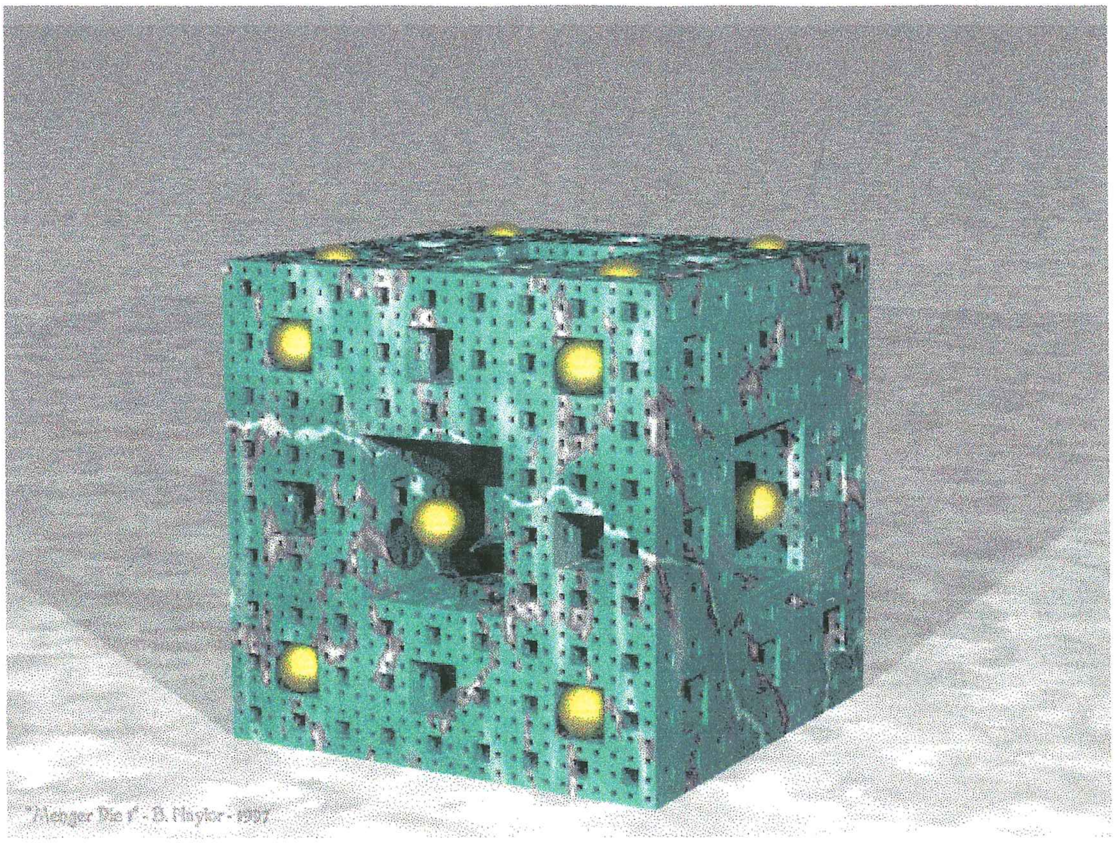
אם $\Delta f=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$ בכל U. הראו ש-$\ln(x^2+y^2)$

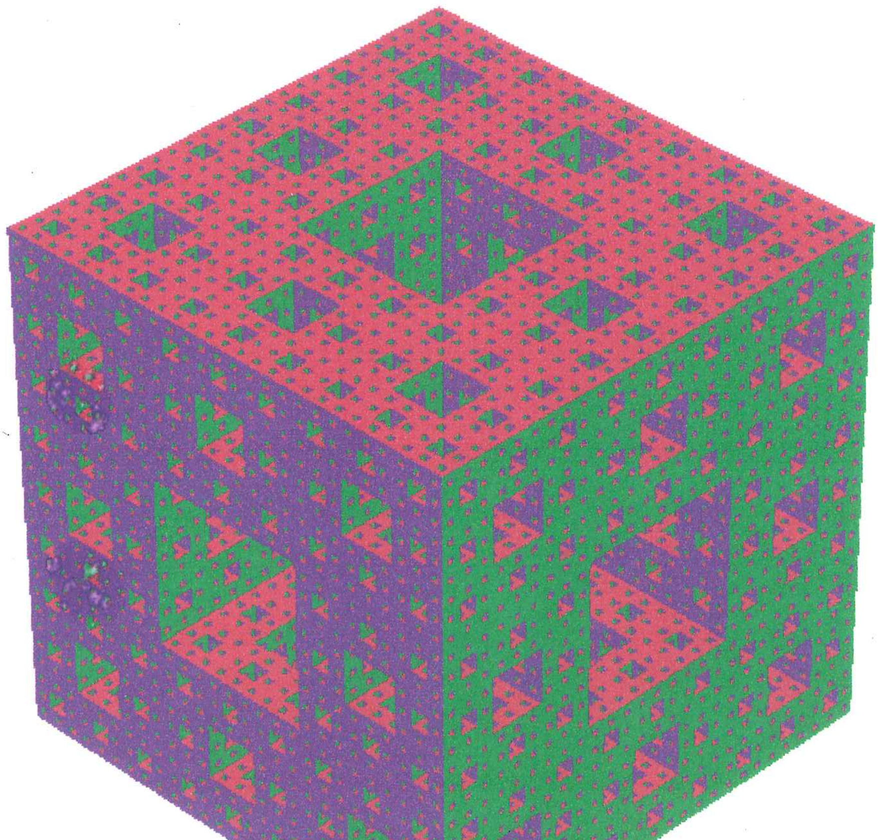
הרמונית על $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ (כדאי לעבור לקואורדינטות פולריות

$(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$).

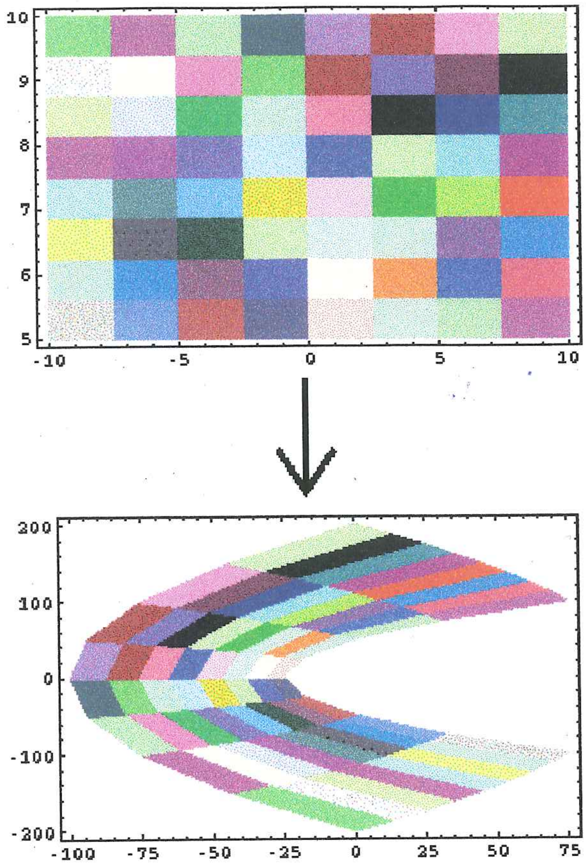
בתרגיל הבא נעסוק בפונקציות אלו.

הספוג של מנגר - אינפי מתקדם לתלפיות, 23 לדצמבר 1998.





The Function $(x,y) \rightarrow (x^2-y^2,\ 2xy)$




```
QuiltPlot[{f_,g_}, {x_, xmin_, xmax_, nx_}, {y_, ymin_, ymax_, ny_}] :=
Module[
  {dx, dy, grid, ix, iy},
  SeedRandom[1];
  dx=(xmax-xmin)/nx;
  dy=(ymax-ymin)/ny;
  grid = Table[
    {x -> xmin+ix*dx, y -> ymin+iy*dy},
    {ix, 0, nx}, {iy, 0, ny}
  ];
  grid = Map[({f, g} /. #)&, grid, {2}];
  Show[
    Graphics[ Table[
      {
        RGBColor[Random[], Random[], Random[]],
        Polygon[{
          grid[[ix, iy]],
          grid[[ix+1, iy]],
          grid[[ix+1, iy+1]],
          grid[[ix, iy+1]]
        }]
      },
      {ix, nx}, {iy, ny}
    ]],
    Frame -> True
  ]
]

QuiltPlot[{x, y}, {x, -10, 10, 8}, {y, 5, 10, 8}]
QuiltPlot[{x^2-y^2, 2*x*y}, {x, -10, 10, 8}, {y, 5, 10, 8}]
```

אינפי מתקדם לתלפיות; 3 לינואר 1999

0. שבוע הבא/ שיעורי השלמה.

1. הספק את מנגר

2. 3 המשפטים היסודיים:

$$\int_{[a,b]} = \int_a^b$$

Fubini: $\int_{R_x} dx \left(\int_{R_y} F(x,y)\,dy \right) = \int_{R_x \times R_y} F$ עבור F אינטגרבילית

הרחבת האינטגרציה לתחומים אחרים

$A \subset \mathbb{R}^n$ פתוחה $g: A \to \mathbb{R}^n$ חח"ע דיפרנציאבילית אם $|\det dg| \neq 0$ ו- $F: g(A) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

עבור $\int_{g(A)} F = \int_A (F \circ g) |\det dg|$

3. דוגמאות:

$$\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$$

$$\int_a^b \int_c^d e^{i(x+y)}$$

אינטגרציה גאוסיאנית

4. הוכחת המשפטים היסודיים.

היזכרות על שינוי קצב
הוכחה על תבניות לשרשר וקבוצ.

אינפי: מתקדם לתלמידים, 6 לינואר 1999

$A \subset \mathbb{R}^n$ סגורה של ∂A ממידה 0.

$g: A \to \mathbb{R}^n$ חח"ע, גזירה ברציפות

$(\det dg_x \neq 0)$

$f: g(A) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית.

משפט: $\int_{g(A)} f(y)\,dy = \int_A (f\circ g)(x)\,|\det dg_x|\,dx$ כאשר

סקיצה ההוכחה.

פילוסופיה של משפט סטוקס

$$\int_D dw = \int_{\partial D} w$$

וקטורים משיקים.

1. מה זה?
2. האגד המשיק, המרחב המשיק, אגד של מו'
3. גזירה כוונית
4. דחיפה קדימה
5. קומפטיביליות

ו-תבניות 1. הגדרה.

2. דוגמא: הדיפרנציאל של פונקציה.
   דוגמא: dx_j
3. סכום כפל בפונקציה.
4. משפט: כל ה-1-תבניות הן מהצורה $\sum f_i dx_i$
5. מה משיכה לאחור
6. קומפטיביליות
7. אינטגרציה
8. המשפט היסודי

אינפי מתקדם לתלמידות 17 לינואר 1999.

1- תכונות.

1. תזכורת

2. אינטגרציה

3. דוגמאות

$$\int \frac{y\,dx - x\,dy}{x^2+y^2}$$

חצי מישור כלשהו

$$\int \frac{1}{2}(y\,dx - x\,dy)$$

על תחום כלשהו

4. המשפט לעשירית $\int$ $\int$

5. מסילה לאחור ; הומוטופיות.

6. הגדרה אלטרנטיבית לאינטגרל.

7. המשפט היסודי

8. מסקנות טופולוגיות.

אנפי מתקדם לתלפיות 20 לינואר 1999

1. תזכורת על אינטגרציה -

2. אינטגרציה על IR

3. החלפת התנאים - הכל מקולקל.

4 משיכה לאחור וקומפקטיות.

5. קומפקטיות של אינטגרציה

6. הגדרה אלטרנטיבית לאינטגרל -

7. קומפקטיות עדיין תקפה.

8. אי-תלות בפרמטריזציה.

9. המשפט היסודי

10. מסקנות טופולוגיות.

שיעורי השלמה ?

אינפי מתקדם לפיסיקאים, 20 לינואר 1999.

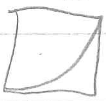
1. הגדרה. $\int_\gamma w = \int_{[a,b]} \gamma^* w = \int_{[a,b]} \sum f_i(\gamma(t))\gamma_i'(t)\,dt$

2. אי-תלות בפרמטריזציה.

3. המשפט היסודי: [של הנגזרות]

דוגמא: $\int 2xy\,dy + x^2 dy$

$\gamma(t) = (t, t^2)$



$(1,1)$

מסילה

$(0,0)$

4. אי תלות במסילה.

5. דו-תבניות. הגדרה.

6. לינאריות, כפל בפונקציה, מכפלת $\wedge$.

7. כל דו-תבנית היא מהצורה $\sum f_{ij}(x)dx_i \wedge dx_j$

8. אינטגרציה - הגדרה ראשונה.

9. משיכה לאחור

10. קומפקטיות.

11. אינטגרציה הגדרה שניה.

אינפי מתקדם א' - תרגיל 8 (ומלפני)

① יהי x רציונלי ונציג אותו בצורה שבר מצומצם עם מכנה חיובי. נסמן את המכנה ב- q_x.

(א) נגדיר פונקציה על $[0,1]^2$ בצורה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y} & 0\neq x,y\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הראו שהאינטגרל $\iint_P f(x,y)$ קיים אך לא קיימים האינטגרלים

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)dy \quad ! \quad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)dx$$

(ב) יהי $f(x,y)=\begin{cases}1 & x,y\in\mathbb{Q},\ q_x=q_y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. הראו שההיפך מא' קורה.

② חשבו באינדוקציה את נפח הסימפלקס ה-n-מימדי

$$P_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ 0\le x_1\le\dots\le x_n\le 1\}$$

③ חשבו את נפח הקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^3$, $A=\{(x,y,z):0\le z\le x^2+y^2,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\}$.
(רמז: $x=3r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$).

④ יהי B כדור ברדיוס $2R$:

$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 4R^2\}$$

יהי C גליל ברדיוס R החותך ל-B:

$$C=\{(x,y,z)\mid (x-R)^2+y^2\le R^2\}$$

חשבו את נפח $B\setminus C$ (כדור עם חור גלילי).

⑤ (משפט Sard) יהי $g:A\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה.
נסמן $B=\{x\in A: J_g(x)=0\}$. הראו ש-$g(B)$ מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$.

<u>הדרכה:</u> הראו שמספיק להוכיח עבור A שהיא קובייה (כי ניתן לכסות את A בבן מניה של קוביות). יהי $\varepsilon>0$, חלקו את A לקוביות קטנות והראו שלכל S אחת מהקוביות האלו עם $B\cap S\neq\emptyset$ אז $g(S)$ מוכל בגליל שגובהו [illegible] על נפחו הכל.

תרגיל מס' 9 - אינפי מתקדם גליון

$\alpha(x,y) = (x^2-y^2, 2xy)$ מוגדרת $\alpha : \mathbb{R}^2_{x,y} \longrightarrow \mathbb{R}^2_{u,v}$ יהי א) 1

חשבו את $\alpha^*(dv)$ ואת $\alpha^*(du)$

$\alpha(r,\theta) = (e^r\cos\theta, e^r\sin\theta)$ $\alpha : \mathbb{R}^2_{r,\theta} \longrightarrow \mathbb{R}^2_{x,y}\setminus\{0\}$ ב)

חשבו את $\alpha^*(dx)$, $\alpha^*(dy)$

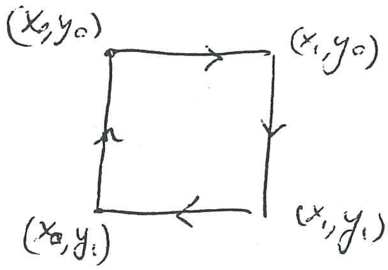
חשבו את $\alpha^*(dt)$. $\alpha(x_1,\dots,x_n) = \sum x_i^2$, $\alpha : \mathbb{R}^n_{x_1,\dots,x_n} \longrightarrow \mathbb{R}_t$ ג)

3) עבור α מסעיף ב' חשבו את $\alpha^*(\omega)$, $\alpha^*(\rho)$ עבור

$$\omega = \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} \qquad \rho = \frac{x\,dx + y\,dy}{x^2+y^2}$$

(נסו להסביר את התוצאות המעניינות באופן גאומטרי (לא חובה) את התוצאה המעניינת שהתקבלה)

2) יהי $\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2+y^2}$ מוגדרת על $\mathbb{R}^2\setminus 0$. יהי Γ המסלול



Γ מסילה מלבנית ב- x_0,y_0 , $x_0<x_1$ $y_0<y_1$ וכן $x_0,x_1,y_0,y_1 \neq 0$.

חשבו את $\int_\Gamma \omega$.

(הערה: התוצאה תלויה בנקודות ולא תמיד 0!).

אני מתקדם לפיסיקה. חומר לבחינה.

בחינה סגורה

שעתיים

בחר 4 מתוך 5 [בערך]

אני לא מתכוון לבלוף!!!

1. טופולוגיה של $\mathbb{R}^n$
2. קרטזיאליות - תכונות בסיסיות
3. כלל השרשרת
4. נגזרת כיוונית
5. החלפת נגזרות חלקיות
6. משפט טיילור
7. מין/מקס
8. משפט הפונקציה ההפוכה והסתומה.
9. אינטגרציה - הגדרה ובסיס
10. אינטגרביליות $\Leftrightarrow$ אי-רציפות של מידה 0
11. פוביני
12. החלפת משתנה באינטגרציה, יעקוביאנים
13. אינטגרציה קווית
14. וקטורים משיקים, דחיפה קדימה, קומפטביליות
15. k-תבניות והפעולות הבסיסיות עליהן
16. משפט התמקה: $w=\sum f_i dx_i$
17. משיכה לאחור וקומפטביליות
18. אינטגרציה בשני דרכים
19. תבניות מדויקות וסגורות.
20. k-תבניות והפעולות הבסיסיות על
21. המקרה של $\mathbb{R}^3$
22. המבנה Σ k-תבניות

מבנה הבחינה: 1. הוכחות (כמות הדיוק שנתנה בכיתה) [~50%]

2. תרגילים חישוביים [~30%]

3. חומר מהתרגולים [~20%]

בשבוע הבא אשתדל להעביר לידיכם בחינת תרגול.

$w = \cos\beta \, d\phi = \cos 2\alpha \, d(\theta+\alpha)$

$\cancel{\frac{\sin(\pi-2\alpha)}{r} = \sin\alpha}$

$\cancel{r = \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha}$

$r = 2\cos\alpha \qquad dr = -2\sin\alpha \, d\alpha$

$d\alpha = -\frac{1}{2\sin\alpha} dr$

$dw = -2\sin 2\alpha (d\alpha \wedge d\theta)$

$=$

$\emptyset$

Ara $= r \cdot dr \wedge d\theta$

$w = \cos\beta \, d\phi = \cos 2\alpha \, d(\alpha+\theta)$

$dw = -2\sin 2\alpha \, d\alpha \wedge d\theta =$

$= \frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha} dr \wedge d\theta$

$= 2\cos\alpha \, dr \wedge d\theta$

$= r \, dr \wedge d\theta$

$$\boxed{\begin{aligned} r &= 2\cos\alpha \\ dr &= -2\sin\alpha \, d\alpha \\ d\alpha &= \frac{dr}{-2\sin\alpha} \end{aligned}}$$

שם ______________________ ת"ז ______________________

יום שלישי, 25 לנובמבר 1997

<u>בוחן מספר 2 באינפי לתלפיות</u>

1. נתונה העתקה $\Phi: V \to W$, וקטור משיק ξ למרחב V, ופונקציה $f: W \to R$. מה הן שתי הדרכים בהן ניתן לזווג את ξ עם f?
2. מדוע שני הזיווגים נותנים את אותה התוצאה?

שם ______________ ת"ז ____________________

יום רביעי, דצמבר 31, 1997

בוחן מספר 4 באינפי לתלפיות

חשב/י את האינטגרל $\int_D xydx\wedge dz$ על התחום D המוגדר ע"י המשוואות $D:\begin{cases} z=xy \\ -1\le x,y\le 1 \end{cases}$. שים/י לב שהתחום הנ"ל משיק למישור xy בנקודה $(x,y,z)=(0,0,0)$. הנח/הניחי שבנקודה זו התחום מכוון כמו הכיוון הרגיל של מישור xy - נגד כיוון השעון - ויתר התחום מכוון בצורה תואמת.

תרגיל מספר 3 באינפי מתקדם לתלפיות.

1. מצאו את נקודות המינימום המקומי, המקסימום המקומי ונק' האוכף של הפונקציות הבאות:

א. $f(x,y)=x^3+y^3+xy$

ב. $f(x,y)=\sin(x+y)+\sin(x-y)$

עבור סעיף א נסו לצייר את גרף הפונקציה.

2. פונקציה $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ תקרא פונקציה קמורה אם לכל $x,y\in\mathbb{R}^n$, ו $0\le\lambda\le 1$

$$f(\lambda x+(1-\lambda)y)\le \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$$

הוכיחו כי אם ההסיאן של f בכל נקודה מוגדר אי שלילי אזי f קמורה.

3. נסמן ב H את ההסיאן של f בנק' 0 ($f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$).
מהו ההסיאן של $g=f(Lx)$ ב-0, כש $L:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה לינארית? הוכיחו!

4. הראו ישירות ע"י חישוב כי לכל פונקציה פולינומיאלית $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

$$f(x,y)=\sum_{0\le i,j\le N} c_{ij}x^iy^j$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}f=\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}f$$

5. נגדיר

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\,xy & x^2+y^2\neq 0\\ 0 & \text{אחרת.}\end{cases}$$

א. הראו כי f פונקציה רציפה.

ב. הראו כי

$$\frac{\partial}{\partial x} f,\quad \frac{\partial}{\partial y} f,\quad \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f,\quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$$

קיימים לכל x,y פרט אולי ל- $(x,y)=(0,0)$. הראו כי הנגזרות הראשונות $(\frac{\partial}{\partial y}f, \frac{\partial}{\partial x}f)$ קיימות גם ב-$(0,0)$. אין צורך לחשב את הנגזרות!

ג. הראו כי.

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f\right)(0,0) = -1$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f\right)(0,0) = 1$$

בפרט $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f(0,0) \neq \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$

דרך אחת לעשות זאת הינה להשתמש בכך ש- $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(0,0)$ הוא הגבול של $(f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0))$ כאשר x,y שואפים בדרך הנכונה ל-0.

ד. הראו כי

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f\right)(x,0) \xrightarrow[x\to 0]{} 1$$

למעשה לכל $x\neq 0$, $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,0)=1$.

לכן $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f(x,y)$ אינה פונקציה רציפה..

הערה: דוגמא נגדית זו מראה כי כדי להסיק שנגזרות חלקיות מתחלפות דרוש תנאי כלשהו מעבר לקיום הנגזרות $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} f$ ו- $\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} f$.

תרגיל מספר 4 לאינפי מתקדם תלפיות.

1. הוכיחו: אם $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ פונקציה רציפה, אזי

$$\frac{d}{dx}\int_0^1 f(x,y)\,dy = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial x} f(x,y)\,dy$$

רמז: הגדירו $F(x,u)=\int_0^u f(x,y)\,dy$, והשתמשו במשפט 8 החלפת נגזרות חלקיות.

2. בתרגול הקודם הראינו שאם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ מקיימת ש $H_x(f)$ מוגדרת אי שלילית בכל x ב $\mathbb{R}^n$, אזי f קמורה. הוכיחו כי אם $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ קמורה וחלקה אזי $H_x(f)$ מוגדרת אי שלילית בכל x.

3. א. $\alpha:\mathbb{R}^2_{x,y}\to\mathbb{R}^2_{u,v}$ מוגדרת ע"י $\alpha\binom{x}{y}=\binom{x^2-y^2}{2xy}$

חשבו את $\alpha^*(du)$, $\alpha^*(dv)$.

ב. $\alpha:\mathbb{R}^2_{r,\theta}\to\mathbb{R}^2_{x,y}$ נתון ע"י $\alpha\binom{r}{\theta}=\binom{r\cos\theta}{r\sin\theta}$.

חשבו את $\alpha^*(dx),\alpha^*(dy)$.

ג. $\alpha:\mathbb{R}^2_{x_1,\dots,x_n}\to\mathbb{R}^2_t$ נתון ע"י $\alpha(x_1\dots x_n)=\Sigma x_i^2$

חשבו את $\alpha^*(dt)$.

4. דיפאומורפיזם הינה העתקה חלקה חח"ע ועל שההופכית שלה גם היא העתקה חלקה חח"ע ועל. הוכיחו שאין דיפאומורפיזם בין $\mathbb{R}^n$ ו $\mathbb{R}^m$ עבור $m\neq n$. רמז אפשרי: הראו שדיפאומורפיזם ממפה את $C^\infty(\mathbb{R}^m)$ ל $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ באופן חח"ע ועל, והשתמשו בתרגול 2 שאלה 4.

בהצלחה!

תרגיל מספר 5 לאינפי מרובה תלפיות.

1. אם לא עשיתם עד כה את תרגיל 4, שאלה 3 פתרו אותה.

2.

$$\omega=\left[y\cos(xy)+e^x\right]dx+(x\cos xy+2y)dy$$

א. חשבו את $\int_\Gamma \omega$ לאורך הפרבולה $y=x^2$ מ-0,0 ל-1,1.

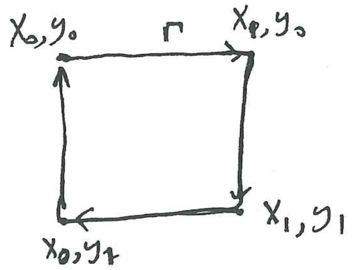
ב. חשבו את $\int_\Gamma \omega$ כש Γ הקטע המחבר את הראשית לנקודה $\binom{\alpha}{\beta}$. נ"ל כש Γ הוא הקטע $y=0$, $0\le x\le\alpha$ ולאחריו

$x=\alpha$ $0\le y\le\beta$.

ג. מצאו f כך ש $\omega=df$.

3. $\omega=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$. שימו לב ש ω לא מוגדרת ב $\Pi_0\mathbb{R}^2$.

יהי Γ הריבוע



(Γ מתחילה ומסתיימת ב (x_0,y_0). $x_0<x_1$, $y_0<y_1$, ו-y_1,y_0,x_1,x_0 אינם 0.)

חשבו את $\int_\Gamma \omega$. (הערה – התשובה יוצאת

יפה – ואינה תמיד 0).

(הערה: נזכור $\int_a^b \frac{dx}{1+x^2}=\arctan x|_a^b$, צריך קצת להזהר אי"ג. אך לא צריך מדויק.)

4. ω חלקה ב $\mathbb{R}^2$. האם יתכן ש ω אינה 0, אבל $\int_\Gamma \omega \geq 0$ לכל Γ?

☆ 4 (רשות, זהו קשור לאינפי, אבל ריקשרים). אפשר לדלג מה שמעניין.

הוכח כי אם $A=\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ סימטרית, אזי

A מוגדרת חיובית אמ"מ

$$a_{11}>0$$

$$(*)\qquad \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}>0$$

$$\vdots$$

$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}>0.$$

כזכור A מוגדרת חיובית אם לכל v $v^tAv>0$, וכו.

הראו שאם L הפיכה A מוגדרת חיובית אמ"מ

L^tAL מוגדרת חיובית.

<u>א.</u> הראו כי אם (*) לא מתקיים (דהיינו אחד מאי השוויונות לא נכון) A לא מוגדרת חיובית. כדאי להתחיל לבדוק מה קורה כש $\det\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ & & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}\leq 0$. (זה החלק הקל יותר).

<u>ב.</u> הוכיחו באינדוקציה שאם (*) מתקיים יש L כך ש $L^tAL=I$.

נסמן

$$A=\begin{pmatrix} \overbrace{\quad A' \quad}^{n-1} & \begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \end{matrix} \\ a_{n1}\cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

לפי הנחת האינדוקציה יש L' כך ש $L'^tA'L'=I$.

נס) למלו

$$L = \begin{pmatrix} & & & l_1 \\ & I & & \vdots \\ & & & \vdots \\ l_1 & \cdots & & l_n \end{pmatrix}$$

$$L^t \begin{pmatrix} L' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} L' & \begin{matrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ 0 \cdots 0 & 1 \end{pmatrix} L = I$$ כך ש-

נבדק שזה קורה אמ"מ

$$0 < \det\left[\begin{pmatrix} L' & \\ & 1 \end{pmatrix}^t A \begin{pmatrix} L' & \\ & 1 \end{pmatrix}\right] = \det A \cdot \left[\det \begin{pmatrix} L' & \\ & 1 \end{pmatrix}\right]^2 .$$

השלמנו $\square$ פרט שנשאר להראות.

תרגיל מספר 6 באינפי מתקדם לחלופה.
(מתרגל: אלון לינדנשטראוס)

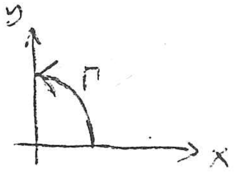
1. הוכיחו כי אם $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, φ מסילה ב-$\mathbb{R}^n$ המתחילה בנק' a ונגמרת ב-b אזי

$$\int_\varphi f\,dg = f(b)g(b)-f(a)g(a)-\int g\,df$$

2. נגדיר $\omega = 3xy\,dx+2x\,dy$ (זו תבנית ב-$\mathbb{R}^2$).

א. הראו כי ω אינה סגורה (ולכן אינה df לשום f).

ב. חשבו את האינטגרל של ω לאורך המסילה Γ כש-Γ היא:
קשת מעגל ברדיוס 1 מ-$\binom{1}{0}$ ל-$\binom{0}{1}$.



ג. מצאו משפחה של מסילות $\beta_t^{(s)}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ כך ש- $\omega(\xi)=0$
לכל וקטור ξ המשיק למסילה $\beta_t(s)$. (רמז - הניחו כי
$\beta_t(s)=\binom{1}{F(s)}$, וקבלו (ופתרו) משוואה דיפרנציאלית ל-F.)

ד. הראו כי אם $\omega = g\,df$ אזי f קבועה על המסילות "$\beta_t(s)$".

ה. מצאו f,g כך ש-$\omega=g\,df$. האם הצגה הזו יחידה?

ו. אמתו את הנוסחה שהוכחה בסעיף 1 ל-g, f ו-Γ.

3. $\omega=\sum_{i=1}^{n} p_i(x_1\dots x_n)dx_i$ זו תבנית ב-$\mathbb{R}^n$, p_i פולינומים
ב-$x_1\dots x_n$.

א. מצאו מהו התנאי שמקדמי p_i צריכים לקיים כדי ש-ω תהיה סגורה.

ב. בהנחה שהתנאי שמצאת מתקיים, מצאו פולינום f כך ש-$\omega=df$.

תרגיל מס 8 באינפי מתקדם לפיזיקאים.

1. יהי V מ"ו ממימד n. נגדיר

$$S^k(V^*) = \text{פונקציות מולטילינאריות } \underline{\text{סימטריות}} \text{ מ } \underbrace{V\times\cdots\times V}_{k \text{ פעמים}} \text{ ל- } \mathbb{R}.$$

א. מצאו בסיס ל $S^2(V^*)$.

*ב (רשות) מצאו בסיס ל $S^k(V^*)$.

2. לכל אחד מהמקרים הבאים נגדיר $\alpha : \mathbb{R}^2_{u,v} \to \mathbb{R}^2_{x,y}$.

חשבו את $\alpha^*(dx\wedge dy)$ (במונחים של $du\wedge dv$).

א. α מוגדרת ע"י

$$\alpha^* x = u\cos v$$
$$\alpha^* y = u\sin v$$

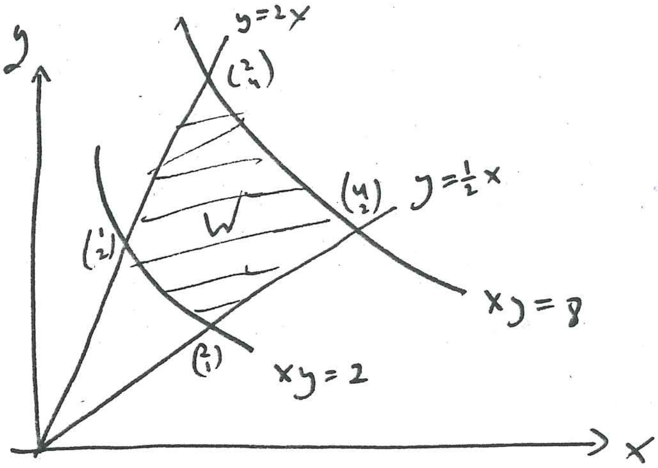
ב. (הערה! $\cosh x = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$, $\sinh x = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$)

$$\alpha^* x = u\cosh v$$
$$\alpha^* y = u\sinh v$$

ג

$$\alpha^* x = u^2-v^2$$

כאינטגרל כפול (עם גבולות משתנים) כאשר W התחום הבא:



ב. מצאו מלבן R במישור uv כך ש- W התמונה תחת R של הטרנספורמציה $\alpha:\mathbb{R}^2_{u,v}\longrightarrow\mathbb{R}^2_{x,y}$

שמוגדרת ע"י $\alpha^*x=2uv$, $\alpha^*y=u/v$

ג. חשבו את $\alpha^*(2y\,dx\wedge dy)$

ד. חשבו את I כאינטגרל על המלבן R.

1

תרגיל מס' 9 באינפי מתקדם

להלפיג

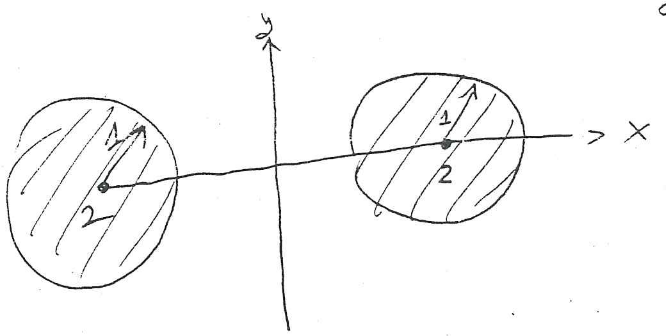
1. תהי $\lambda = y(x^2+z^2)\,dz\wedge dx$, זו תבנית ב-$\mathbb{R}^3$. חשבו את $\int_D \lambda$

עבור המשטחים הבאים:

1. $D=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\}$ (פני כדור היחידה)

פרמטריזציה אפשרית היא ע"י קואורדינטות פולריות ב-3 ממדים.

2. D הטורוס ב-$\mathbb{R}^3$: שמתקבל מסיבוב סביב ציר y של הדיסק הבא



(הנק' של הטורוס הנן מקיימות $(2\pm\sqrt{x^2+z^2})^2+y^2=1$).

פרמטריזציה נוחה היא:

$$x=(\cos\theta+2)\cos\varphi$$
$$y=\sin\theta$$
$$z=(\cos\theta+2)\sin\varphi$$

3. $D=\{(x,y,z):\ z=x^2+y^2,\ x^2+y^2\le 1\}$

הערה: לכל המשטחים האלו ניתן להגדיר כיוון, בחרו כיוון כרצונכם!

2/

2. תר'

א. $w=xzdy$ חשבו את

$$\int_\Gamma w$$

כש $\Gamma=\{(x,y,0): x^2+y^2=1\}$.

ב) חשבו את $\int_{D(c)} dw$ (ללא שימוש במשפט סטוקס!)

למשטחים המתאימים:

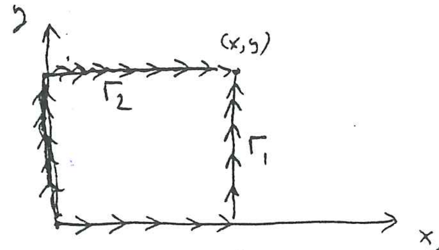
$$D_1(c)=\{x,y,z \mid z=c(1-x^2-y^2),\ x^2+y^2\le 1\}$$

$$D_2(c)=\{x,y,z \mid (z-c)^2+x^2+y^2=1+c^2,\ x^2+y^2\le 1,\ z\ge 0\}$$

תוכלו לבדוק את עצמכם ע"י כך שהתשובה צריכה להיות שווה.

3. בתרגיל זה נראה שאם w חד תבנית ב-$\mathbb{R}^2$ כך ש $dw=0$ (w סגורה) אזי $w=df$ כלומר מדויקת. ממשפט סטוקס:

<u>הדרכה:</u> 1. נגדיר לכל x,y מסילות $\Gamma_1^{x,y}$ ו $\Gamma_2^{x,y}$ כך:



כלומר: $\Gamma_1^{x,y}=$ ישר מ 0,0 ל x,0 ומ- x,0 ל x,y , $\Gamma_2^{x,y}=$ ישר מ 0,0 ל 0,y ומ- 0,y ל x,y .

3/

נגדיר $f_1(x,y)=\int_{\Gamma_1}\omega$. $f_2(x,y)=\int_{\Gamma_2}\omega$

אם

$$\omega = g_2(x,y)dx + g_1(x,y)dy$$

הראו כי

$$\frac{\partial f_1(x,y)}{\partial y} = g_1(x,y)$$

$$\frac{\partial f_2(x,y)}{\partial x} = g_2(x,y)$$

2. הוכיחו כי לכל x,y (כמעט) $f_1(x,y)=f_2(x,y)$ (רמז [illegible])

3. סיימו את הוכחת המשפט.

לשימושכם בתרגילים 1+2

$$\int \cos^2 x\,dx = \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2}$$

$$\int \cos^3 x\,dx = \frac{1}{12}\sin 3x + \frac{3}{4}\sin x$$

$$\int \cos^4 x\,dx = \frac{3}{8}x + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x$$

$$\int \cos^5 x\,dx = \frac{5}{8}\sin x + \frac{5}{48}\sin 3x + \frac{1}{80}\sin 5x$$

תרגיל מספר 10 באינפי מתקדם לגלפנ.

1. חשבו את האינטגרל של ה $n-1$ תבנית $x_1 dx_2\wedge\dots\wedge dx_n$ על שפת הכדור ה-n ממדי עבור $n=3,4,5$.

<u>רמז:</u> העזרו בפרמטריזציה

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \cos\theta_1\\
x_2 &= \sin\theta_1 \cos\theta_2\\
x_3 &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3\\
&\ \vdots\\
x_{n-1} &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \cos\theta_{n-1}\\
x_n &= \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{n-1}
\end{aligned}
$$

2. תהי $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ העתקה ליניארית, המיוצגת ע"י מטריצה $n\times n$ A.

T משרה העתקה $T^*:\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)\to\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ (ע"י משיכה לאחור). מכיוון ש $\Lambda^{n-1}(\mathbb{R}^n)$ גם n ממדי, גם את T^* ניתן להציג כמטריצה $n\times n$. מצאו אותה.

3. הוכיחו כי אם $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ חח"ע של תחום n ממדי $D\subset\mathbb{R}^n$ אז

$$\int_{F(D)}\cdots\iint f(x_1\dots x_n)\,dx_1\dots dx_n = \int_{D}\cdots\iint f(F(x))\,|J(F)|\,dx_1\dots dx_n$$

כש
$$J(F)=\det\begin{pmatrix}\frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n}\\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & & \frac{\partial F_n}{\partial x_n}\end{pmatrix}$$
היעקוביאן של F.

(רמז: השתמשו במשפטים על אינטגרציה של n-תבניות)

4. בדוק את הנוסחא שקיבלתם בסעיף 3 ב

$$f(x,y,z) = x^2+y^2$$

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \quad 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2 ;\ x^2+y^2<1 \right\}$$

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2z+x^2+y^2 \end{pmatrix}$$

1 א) חשבו את נפח הקבוצה: $S=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ x_i\geq 0,\ x_1+\dots+x_n\leq 1\}$

ב) הראו שהפונקציה: $g:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$

$$g(r,\varphi,\theta)=(r\sin\varphi\cos\theta,\ r\sin\varphi\sin\theta,\ r\cos\varphi)$$

ומצאו את היעקוביאן

ג) חשבו את נפח הקבוצה: $\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leq 1,\ z\geq a\}$

עבור $0\leq a\leq 1$ נתון (הסבירו מדוע מותר להשתמש במשפט ~~פוביני~~ אינטגרל החלפת משתנים)

2 א) יהי $A=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ תיבה ב-$\mathbb{R}^n$; $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה מהצורה: $f(x_1,\dots,x_n)=f_1(x_1)\cdots f_n(x_n)$ עבור $f_i:[a_i,b_i]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ושונות מאפס בכל נקודה. מלבד מזה הניחו ש-f_i רציפות. הוכיחו כי f אינטגרבילית והוכיחו שמתקיים כי:

$$\int_A f=\left(\int_{a_1}^{b_1}f_1\right)\cdots\left(\int_{a_n}^{b_n}f_n\right)$$

ב) נסחו את משפט פוביני והוכיחו אותו עבור פונקציות רציפות.

~~3 תהי $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ ונניח שלכל $x\in\mathbb{R}^n$ ... הוכיחו ש-$f\circ f$ ... $\frac{n}{2}$ ... f ...~~

4 נסח תבנית $\omega:U\to\mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R})$ כך שהאינטגרל $\int_\gamma\omega$ תלוי רק בנקודות ההתחלה והסוף של γ. הוכיחו ש-ω תבנית מדויקת.

3 תהי $f\in C^1(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^n)$ המקיימת $\nabla f(x)\neq 0$ לכל ... ~~...~~ $M=\{x\in\mathbb{R}^n: f(x)=0\}$ הוכיחו כי M יריעה. לכל ... הקבוצה M.

5 יהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ מעתקה C^1 ונניח ש-f משמרת מרחקים: $|f(x)|=|x|$, $f(0)=0$

א) הוכיחו ש- $f(tx)=tf(x)$ ~~$f(tx)=tf(x)$~~ לכל $0\leq t\leq 1$

ב) ~~...~~ הוכיחו כי $f(x)=Ax$ עבור $A\in O_n(\mathbb{R})$.

הדוגמה הכי קשה — אינטגרל (יכול להיות גם מסובך)	מועד א'	מועד ב'
א. נסח והוכח לפחות תנאי הכרחי ומספיק לאינטגרביליות של פונקציה חסומה על מלבן. ב. הראה שקיימת פונקציה לא אינטגרבילית	א. נסח והוכח לפחות את משפט טיילור עבור פונקציה $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ב. טור טיילור של $e^{x+y}\sin(x-y)$	האמת א. נסח והוכח לפחות את המשפט לגבי החלפת הנגזרות השניות. ב. כתוב דוגמה לפונקציה שעבורה $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$
א. הסבר את תכונת ההוכחה של המשפט לגבי החלפת משתנים באינטגרציה ויעקוביאנים. ב. חשב $\int e^{-(x^2+y^2)}dxdy$	השווה את תכונת ההוכחה של משפט הפונקציה ההפוכה. ב. הראה כיצד הוא גורר את הסתומה	הסבר שאין שום דרך להגדיר את האינטגרל של ד-צורות על [illegible] ב-$\mathbb{R}^n$ ומדוע התנאים שלנו הם שונים. ב. דוגמה
א. הוכח את כל משפטי הקוהומולוגיה ושנדרש לך [illegible] ואבחנות. ב. הוכח $f^*g^*w = \ldots$ $df^*g = f^*dg$	א. הגדר דפרנציאל ב. נסח כלל השרשרת ג. הגדר נגזרת כיוונית ד. הוכח $D_{f(x)}g = D_x f^*g$	א. הגדר דפרנציאל והסבר ידית. ב. הראה דפרנציאבילי $\Leftrightarrow$ נגזרות רציפות. ומטריצה $dF = (\ldots)$
$d \leftrightarrow curl$ ודוגמה חשובה	סטוקס $\leftrightarrow d$ ודוגמה חשובה	דוגמה חשובה של המשפט היסודי
Libman 5	Libman 1	Libman 2

אינפי מתקדם לתלפיות

מועד א, סמסטר א 1998/9

דרור בר-נתן

משך הבחינה: שעתיים.

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

שאלה 1:

א. נסח והוכח בפירוט את משפט טיילור עבור פונקציה $f: R^n \to R$.

ב. פתח לטור טיילור את הפונקציה $e^{x+y}\sin(x-y)$, עד וכולל האיברים מדרגה 2.

שאלה 2:

א. נסח במדויק את המשפט בדבר החלפת משתנה האינטגרציה ויעקוביינים.

ב. רשום את תכנית ההוכחה של המשפט הנ"ל.

ג. חשב את האינטגרל $\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$.

שאלה 3:

א. הגדר "הדיפרנציאל של פונקציה $f: R^n \to R^m$ בנקודה $x \in R^n$". הסבר מדוע מוצדק השימוש בה'-הידיעה במשפט הקודם.

ב. נסח את כלל השרשרת עבור פונקציות $R^n \xrightarrow{f} R^m \xrightarrow{g} R^p$.

ג. הגדר "נגזרת כיוונית בכיוון וקטור משיק ξ של פונקציה $g: R^n \to R$".

ד. הוכח $D_{f_*\xi}g = D_\xi f^*g$ כאשר f,g פונקציות כבסעיף ב', עם $p=1$.

שאלה 4:

א. הסבר את הקשר בין האופרטור d, הפועל על דו-תבניות ומייצר תלת-תבניות (ב- R^3), לבין האופרטור div.

ב. תהי $\omega = xdy \wedge dz$ דו תבנית על $R^3_{x,y,z}$. חשב את האינטגרל שלה על ספירת היחידה $S^2 = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$ תוך שימוש בפרמטריזציה $\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\end{pmatrix}$, המוגדרת עבור $(\theta,\phi)\in[0,\pi]\times[0,2\pi]$.

ג. חשב את $d\omega$. האם יש קשר בין התוצאה שקיבלת כאן, נפח כדור היחידה, והתוצאה מסעיף ב'?

שאלה 5

א. הוכח שכל חד-תבנית ω על R^n ניתנת להיכתב בצורה $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$.

ב. עבור וקטור משיק $\xi = (p,v)$ בנקודה $p = (x,y) \in R^2_{x,y}$, נגדיר את $\eta(\xi)$ להיות שטח המשולש שקדקודיו הם ראשית הצירים והנקודות p ו- $p+v$. הראה ש η היא חד תבנית, ורשום אותה בצורה כמו בסעיף א'.

בהצלחה.

Dror Bar-Natan


```
Mathematica 2.0 for SPARC
  pyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.
 -- Terminal graphics initialized --

<< Miscellaneous/ChemicalElements.m
l=N[(({AtomicNumber[#],MeltingPoint[#],BoilingPoint[#],HeatOfFusion[#],
        HeatOfVaporization[#],Density[#],ThermalConductivity[#]}&
                /@ Elements) /. {Kilo -> 1, Joule -> 1, Kilogram -> 1,
                        Meter -> 1, Kelvin -> 1, Watt -> 1, Mole -> 1}),3]

  {{1., 14., 20.3, 0.12, 0.46, 76., 0.181},
   {2., 0.95, 4.22, 0.021, 0.082, 125., 0.152},
   {3., 454., 1620., 4.6, 148., 534., 84.7},
   {4., 1550., 3240., 9.8, 309., 1850., 200.},
   {5., 2570., 3930., 22.2, 504., 2340., 27.},
   {6., 3820., 5100., 105., 711., 3510., 1960.},
   {7., 63.3, 77.4, 0.72, 5.58, 1030., 0.026},
   {8., 54.8, 90.2, 0.444, 6.82, 2000., 0.0267},
   {9., 53.5, 85., 1.02, 3.26, 1520., 0.0279},
   {10., 24.5, 27.1, 0.324, 1.74, 1440., 0.0493},
   {11., 371., 1160., 2.64, 99.2, 971., 141.},
   {12., 922., 1360., 9.04, 128., 1740., 156.},
   {13., 933., 2740., 10.7, 291., 2700., 237.},
   {14., 1680., 2630., 39.6, 383., 2330., 148.},
   {15., 317., 553., 2.51, 51.9, 1820., 0.235},
   {16., 386., 718., 1.23, 9.62, 2070., 0.269},
   {17., 172., 240., 6.41, 20.4, 2030., 0.0089},
   {18., 83.8, 87.3, 1.21, 6.53, 1660., 0.0177},
   {19., 337., 1050., 2.4, 79.1, 862., 102.},
   {20., 1110., 1760., 9.33, 151., 1550., 200.},
   {21., 1810., 3100., 15.9, 376., 2990., 15.8},
   {22., 1930., 3560., 20.9, 425., 4540., 21.9},
   {23., 2160., 3650., 17.6, 460., 6110., 30.7},
   {24., 2130., 2940., 15.3, 342., 7190., 93.7},
   {25., 1520., 2240., 14.4, 220., 7440., 7.82},
   {26., 1810., 3020., 14.9, 340., 7870., 80.2},
   {27., 1770., 3140., 15.2, 382., 8900., 100.},
   {28., 1730., 3000., 17.6, 375., 8900., 90.7},
   {29., 1360., 2840., 13., 307., 8960., 401.},
   {30., 693., 1180., 6.67, 114., 7130., 116.},
   {31., 303., 2680., 5.59, 270., 5910., 40.6},
   {32., 1210., 3100., 34.7, 328., 5320., 59.9},
   {33., 83.8, 889., 27.7, 31.9, 5780., 50.},
   {34., 490., 958., 5.1, 90., 4790., 2.04},
   {35., 266., 332., 10.8, 30.5, 4050., 0.122},
   {36., 117., 121., 1.64, 9.05, 2820., 0.00949},
   {37., 312., 961., 2.2, 75.7, 1530., 58.2},
   {38., 1040., 1657., 9.16, 154., 2540., 35.3},
   {39., 1790., 3610., 17.2, 367., 4470., 17.2},
   {40., 2120., 4650., 23., 567., 6510., 22.7},
   {41., 2740., 5010., 27.2, 680., 8570., 53.7},
   {42., 2890., 4880., 27.6, 590., 10200., 138.},
   {43., 2440., 5150., 23.8, 585., 11500., 50.6},
   {44., 2580., 4170., 23.7, 567., 12400., 117.},
   {45., 2240., 4000., 21.6, 494., 12400., 150.},
   {46., 1820., 3410., 17.2, 361., 12000., 71.8},
   {47., 1240., 2490., 11.3, 258., 10500., 429.},
   {48., 594., 1040., 6.11, 100., 8650., 96.8},
   {49., 429., 2350., 3.27, 232., 7310., 81.6},
   {50., 505., 2540., 7.2, 296., 7310., 66.6},
   {51., 904., 1910., 20.9, 166., 6690., 243.},
   {52., 723., 1260., 13.5, 105., 6240., 2.35},
   {53., 387., 458., 15.3, 41.7, 4930., 0.449},
   {54., 161., 166., 3.1, 12.7, 3540., 0.00569},
   {55., 302., 952., 2.09, 66.5, 1870., 35.9},
   {56., 1000., 1910., 7.66, 151., 3590., 18.4},
```

```
  {57., 1190., 3730., 10., 402., 6150., 13.5},
  {58., 1070., 3700., 8.87, 398., 8240., 11.4},
  {59., 1200., 3790., 11.3, 357., 6770., 12.5},
  {60., 1290., 3340., 7.11, 328., 7010., 16.5},
  {61., 1440., 3000., 12.6, Unknown, 7220., 17.9},
  {62., 1350., 2060., 10.9, 165., 7520., 13.3},
  {63., 1090., 1870., 10.5, 176., 5240., 13.9},
  {64., 1590., 3540., 15.5, 301., 7900., 10.6},
  {65., 1630., 3400., 16.3, 391., 8230., 11.1},
  {66., 1680., 2830., 17.2, 293., 8550., 10.7},
  {67., 1750., 2970., 17.2, 303., 8800., 16.2},
  {68., 1800., 3140., 17.2, 280., 9070., 14.3},
  {69., 1820., 2220., 18.4, 247., 9320., 16.8},
  {70., 1100., 1470., 9.2, 159., 6970., 34.9},
  {71., 1940., 3670., 19.2, 428., 9840., 16.4},
  {72., 2500., 5470., 25.5, 571., 13300., 23.},
  {73., 3270., 5700., 31.4, 758., 16700., 57.5},
  {74., 3680., 5930., 35.2, 824., 19300., 174.},
  {75., 3450., 5900., 33.1, 704., 21000., 47.9},
  {76., 3330., 5300., 29.3, 738., 22600., 87.6},
  {77., 2680., 4400., 26.4, 612., 22400., 147.},
  {78., 2040., 4100., 19.7, 469., 21400., 71.6},
  {79., 1340., 3080., 12.7, 343., 19300., 317.},
  {80., 234., 630., 2.33, 59.1, 13500., 8.34},
  {81., 577., 1730., 4.31, 166., 11800., 46.1},
  {82., 601., 2010., 5.12, 178., 11300., 35.3},
  {83., 545., 1880., 10.5, 179., 9750., 7.87},
  {84., 527., 1230., 10., 101., 9320., 20.},
  {85., 575., 610., 23.8, Unknown, Unknown, 1.7},
  {86., 202., 211., 2.7, 18.1, 4400., 0.00364},
  {87., 300., 950., Unknown, Unknown, Unknown, 15.},
  {88., 973., 1410., 7.15, 137., 5000., 18.6},
  {89., 1320., 3470., 14.2, 293., 10100., 12.},
  {90., 2020., 5060., 19.2, 514., 11700., 54.},
  {91., 2110., 4300., 16.7, 481., 15400., 47.},
  {92., 1410., 4020., 15.5, 417., 19000., 27.6},
  {93., 913., 4170., 9.46, 337., 20200., 6.3},
  {94., 914., 3500., 2.8, 343., 19800., 6.74},
  {95., 1270., 2880., 14.4, 239., 13700., 10.},
  {96., 1610., Unknown, Unknown, Unknown, 13300., 10.},
  {97., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 14800., 10.},
  {98., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {99., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {100., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {101., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {102., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {103., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
  {104., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown},
  {105., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown},
  {106., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown}}

l1=Flatten[Drop[#,1]& /@ l] /. {Unknown -> 0.};
d1=(RealDigits[#][[1,1]])& /@ l1;
Count[d1,#]& /@ Range[9]

  {199, 103, 79, 41, 45, 23, 29, 24, 32}
```

Benford's Law

Benford's Law (which was apparently first stated by Simon Newcomb in 1881) states that if you randomly select a number from a table of physical constants or statistical data, the probability that the first digit will be a "1" is about 0.301, rather than 0.1 as we might expect if all digits were equally likely. In general, the "law" says that the probability of the first digit being a "d" is

```
log_10( 1+ (1/d) )
```

This implies that a number in a table of physical constants is more likely to begin with a smaller digit than a larger digit. It was published by Newcomb in a paper entitled "Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers", which appeared in The American Journal of Mathematics (1881) 4, 39-40. It was re-discovered by Benford in 1938, and he published an article called "The Law of Anomalous Numbers" in Proc. Amer. Phil. Soc 78, pp 551-72. Several other references can be found in Hill's article.

Benford's Law

Also called the First Digit Law, First Digit Phenomenon, or Leading Digit Phenomenon. In listings, tables of statistics, etc., the Digit 1 tends to occur with Probability ~ 30%, much greater than the expected 10%. This can be observed, for instance, by examining tables of Logarithms and noting that the first pages are much more worn and smudged than later pages.

Benford's law applies to data that are *not* dimensionless, so the numerical values of the data depend on the units. If there exists a universal probability distribution $P(x)$ over such numbers, then it must be invariant under a change of scale, so

$$P(kx) = f(k)\,P(x).$$

If $\int P(x)\,dx = 1$, then $\int P(kx)\,dx = 1/k$, and normalization implies $f(k) = 1/k$. Differentiating with respect to k and setting $k=1$ gives

$$x\,P'(x) = -P(x),$$

having solution $P(x) = 1/x$. Although this is not a proper probability distribution (since it diverges), both the laws of physics and human convention impose cutoffs. For example, if street addresses are distributed uniformly over the range of 1 to some maximum cutoff value, then they'll obey something close to Benford's law.

If many decades lie between the cutoffs, then the probability that the first (decimal) digit is D is given by

$$P_D = \frac{\int_D^{D+1} P(x)\,dx}{\int_1^{10} P(x)\,dx} = \frac{\ln\left(\frac{D+1}{D}\right)}{\ln 10},$$

summarized in the following table.

D	P_D	D	P_D
1	0.30103	6	0.0669468
2	0.176091	7	0.0579919
3	0.124939	8	0.0511525
4	0.09691	9	0.0457575
5	0.0791812		

Indeed, of the 54 million real constants in Plouffe's "Inverse Symbolic Calculator" database, 30% begin with the Digit 1. The table below, taken from Benford (1938), shows the distribution of first digits taken from several disparate sources.

		First Digit									
Col.	Title	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Samples
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Specific Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	n^{-1}, $\sqrt{n}$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Reader's Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Blackbody	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	n^1, $n^2 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
	Probable Error	± 0.8	± 0.4	± 0.4	± 0.3	± 0.2	± 0.2	± 0.2	± 0.3		

In fact, the first Significant Digit seems to follow a Logarithmic Distribution, with

$$P(n) \approx \log(n+1) - \log n$$

for $n=1$, ..., 9. One explanation uses Central Limit-like theorems for the Mantissas of random variables under Multiplication. As the number of variables increases, the density function approaches that of a Logarithmic Distribution.

References

Benford, F. ``The Law of Anomalous Numbers.'' *Proc. Amer. Phil. Soc.* **78**, 551-572, 1938.

Boyle, J. ``An Application of Fourier Series to the Most Significant Digit Problem.'' *Amer. Math. Monthly* **101**, 879-886, 1994.

Hill, T. P. ``Base-Invariance Implies Benford's Law.'' *Proc. Amer. Math. Soc.* **12**, 887-895, 1995.

Hill, T. P. ``The Significant-Digit Phenomenon.'' *Amer. Math. Monthly* **102**, 322-327, 1995.

Hill, T. P. ``A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law.'' *Stat. Sci.* **10**, 354-363, 1996.

Hill, T. P. ``The First Digit Phenomenon.'' *Amer. Sci.* **86**, 358-363, 1998.

Ley, E. ``On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indices Digits.'' *Amer. Stat.* **50**, 311-313, 1996.

Newcomb, S. ``Note on the Frequency of the Use of Digits in Natural Numbers.'' *Amer. J. Math.* **4**, 39-40, 1881.

Nigrini, M. ``A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law.'' *J. Amer. Tax. Assoc.* **18**, 72-91, 1996.

Plouffe, S. ``Inverse Symbolic Calculator.'' http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/.

Raimi, R. A. ``The Peculiar Distribution of First Digits.'' *Sci. Amer.* **221**, 109-119, Dec. 1969.

Raimi, R. A. ``The First Digit Phenomenon.'' *Amer. Math. Monthly* **83**, 521-538, 1976.

Dror Bar-Natan

06/03/99
14:53:07

1

```
Mathematica 2.0 for SPARC
Copyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.
 -- Terminal graphics initialized --

<< Miscellaneous/ChemicalElements.m
l=N[((({AtomicNumber[#],MeltingPoint[#],BoilingPoint[#],HeatOfFusion[#],
        HeatOfVaporization[#],Density[#],ThermalConductivity[#]}&
                /@ Elements) /. {Kilo -> 1, Joule -> 1, Kilogram -> 1,
                        Meter -> 1, Kelvin -> 1, Watt -> 1, Mole -> 1}),3]

  {{1., 14., 20.3, 0.12, 0.46, 76., 0.181},
   {2., 0.95, 4.22, 0.021, 0.082, 125., 0.152},
   {3., 454., 1620., 4.6, 148., 534., 84.7},
   {4., 1550., 3240., 9.8, 309., 1850., 200.},
   {5., 2570., 3930., 22.2, 504., 2340., 27.},
   {6., 3820., 5100., 105., 711., 3510., 1960.},
   {7., 63.3, 77.4, 0.72, 5.58, 1030., 0.026},
   {8., 54.8, 90.2, 0.444, 6.82, 2000., 0.0267},
   {9., 53.5, 85., 1.02, 3.26, 1520., 0.0279},
   {10., 24.5, 27.1, 0.324, 1.74, 1440., 0.0493},
   {11., 371., 1160., 2.64, 99.2, 971., 141.},
   {12., 922., 1360., 9.04, 128., 1740., 156.},
   {13., 933., 2740., 10.7, 291., 2700., 237.},
   {14., 1680., 2630., 39.6, 383., 2330., 148.},
   {15., 317., 553., 2.51, 51.9, 1820., 0.235},
   {16., 386., 718., 1.23, 9.62, 2070., 0.269},
   {17., 172., 240., 6.41, 20.4, 2030., 0.0089},
   {18., 83.8, 87.3, 1.21, 6.53, 1660., 0.0177},
   {19., 337., 1050., 2.4, 79.1, 862., 102.},
   {20., 1110., 1760., 9.33, 151., 1550., 200.},
   {21., 1810., 3100., 15.9, 376., 2990., 15.8},
   {22., 1930., 3560., 20.9, 425., 4540., 21.9},
   {23., 2160., 3650., 17.6, 460., 6110., 30.7},
   {24., 2130., 2940., 15.3, 342., 7190., 93.7},
   {25., 1520., 2240., 14.4, 220., 7440., 7.82},
   {26., 1810., 3020., 14.9, 340., 7870., 80.2},
   {27., 1770., 3140., 15.2, 382., 8900., 100.},
   {28., 1730., 3000., 17.6, 375., 8900., 90.7},
   {29., 1360., 2840., 13., 307., 8960., 401.},
   {30., 693., 1180., 6.67, 114., 7130., 116.},
   {31., 303., 2680., 5.59, 270., 5910., 40.6},
   {32., 1210., 3100., 34.7, 328., 5320., 59.9},
   {33., 83.8, 889., 27.7, 31.9, 5780., 50.},
   {34., 490., 958., 5.1, 90., 4790., 2.04},
   {35., 266., 332., 10.8, 30.5, 4050., 0.122},
   {36., 117., 121., 1.64, 9.05, 2820., 0.00949},
   {37., 312., 961., 2.2, 75.7, 1530., 58.2},
   {38., 1040., 1657., 9.16, 154., 2540., 35.3},
   {39., 1790., 3610., 17.2, 367., 4470., 17.2},
   {40., 2120., 4650., 23., 567., 6510., 22.7},
   {41., 2740., 5010., 27.2, 680., 8570., 53.7},
   {42., 2890., 4880., 27.6, 590., 10200., 138.},
   {43., 2440., 5150., 23.8, 585., 11500., 50.6},
   {44., 2580., 4170., 23.7, 567., 12400., 117.},
   {45., 2240., 4000., 21.6, 494., 12400., 150.},
   {46., 1820., 3410., 17.2, 361., 12000., 71.8},
   {47., 1240., 2490., 11.3, 258., 10500., 429.},
   {48., 594., 1040., 6.11, 100., 8650., 96.8},
   {49., 429., 2350., 3.27, 232., 7310., 81.6},
   {50., 505., 2540., 7.2, 296., 7310., 66.6},
   {51., 904., 1910., 20.9, 166., 6690., 243.},
   {52., 723., 1260., 13.5, 105., 6240., 2.35},
   {53., 387., 458., 15.3, 41.7, 4930., 0.449},
   {54., 161., 166., 3.1, 12.7, 3540., 0.00569},
   {55., 302., 952., 2.09, 66.5, 1870., 35.9},
   {56., 1000., 1910., 7.66, 151., 3590., 18.4},
```

06/03/99
14:53:07

2

```
   {57., 1190., 3730., 10., 402., 6150., 13.5},
   {58., 1070., 3700., 8.87, 398., 8240., 11.4},
   {59., 1200., 3790., 11.3, 357., 6770., 12.5},
   {60., 1290., 3340., 7.11, 328., 7010., 16.5},
   {61., 1440., 3000., 12.6, Unknown, 7220., 17.9},
   {62., 1350., 2060., 10.9, 165., 7520., 13.3},
   {63., 1090., 1870., 10.5, 176., 5240., 13.9},
   {64., 1590., 3540., 15.5, 301., 7900., 10.6},
   {65., 1630., 3400., 16.3, 391., 8230., 11.1},
   {66., 1680., 2830., 17.2, 293., 8550., 10.7},
   {67., 1750., 2970., 17.2, 303., 8800., 16.2},
   {68., 1800., 3140., 17.2, 280., 9070., 14.3},
   {69., 1820., 2220., 18.4, 247., 9320., 16.8},
   {70., 1100., 1470., 9.2, 159., 6970., 34.9},
   {71., 1940., 3670., 19.2, 428., 9840., 16.4},
   {72., 2500., 5470., 25.5, 571., 13300., 23.},
   {73., 3270., 5700., 31.4, 758., 16700., 57.5},
   {74., 3680., 5930., 35.2, 824., 19300., 174.},
   {75., 3450., 5900., 33.1, 704., 21000., 47.9},
   {76., 3330., 5300., 29.3, 738., 22600., 87.6},
   {77., 2680., 4400., 26.4, 612., 22400., 147.},
   {78., 2040., 4100., 19.7, 469., 21400., 71.6},
   {79., 1340., 3080., 12.7, 343., 19300., 317.},
   {80., 234., 630., 2.33, 59.1, 13500., 8.34},
   {81., 577., 1730., 4.31, 166., 11800., 46.1},
   {82., 601., 2010., 5.12, 178., 11300., 35.3},
   {83., 545., 1880., 10.5, 179., 9750., 7.87},
   {84., 527., 1230., 10., 101., 9320., 20.},
   {85., 575., 610., 23.8, Unknown, Unknown, 1.7},
   {86., 202., 211., 2.7, 18.1, 4400., 0.00364},
   {87., 300., 950., Unknown, Unknown, Unknown, 15.},
   {88., 973., 1410., 7.15, 137., 5000., 18.6},
   {89., 1320., 3470., 14.2, 293., 10100., 12.},
   {90., 2020., 5060., 19.2, 514., 11700., 54.},
   {91., 2110., 4300., 16.7, 481., 15400., 47.},
   {92., 1410., 4020., 15.5, 417., 19000., 27.6},
   {93., 913., 4170., 9.46, 337., 20200., 6.3},
   {94., 914., 3500., 2.8, 343., 19800., 6.74},
   {95., 1270., 2880., 14.4, 239., 13700., 10.},
   {96., 1610., Unknown, Unknown, Unknown, 13300., 10.},
   {97., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 14800., 10.},
   {98., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {99., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {100., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {101., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {102., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {103., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, 10.},
   {104., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown},
   {105., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown},
   {106., Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown, Unknown}}

l1=Flatten[Drop[#,1]& /@ l] /. {Unknown -> 0.};
d1=(RealDigits[#][[1,1]])& /@ l1;
Count[d1,#]& /@ Range[9]

   {199, 103, 79, 41, 45, 23, 29, 24, 32}
```

Benford's aw

Benford's Law (which was apparently first stated by Simon Newcomb in 1881) states that if you randomly select a number from a table of physical constants or statistical data, the probability that the first digit will be a "1" is about 0.301, rather than 0.1 as we might expect if all digits were equally likely. In general, the "law" says that the probability of the first digit being a "d" is

log_10(1+ (1/d))

This implies that a number in a table of physical constants is more likely to begin with a smaller digit than a larger digit. It was published by Newcomb in a paper entitled "Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers", which appeared in The American Journal of Mathematics (1881) 4, 39-40. It was re-discovered by Benford in 1938, and he published an article called "The Law of Anomalous Numbers" in Proc. Amer. Phil. Soc 78, pp 551-72. Several other references can be found in Hill's article.

search

Benford's Law

Also called the First Digit Law, First Digit Phenomenon, or Leading Digit Phenomenon. In listings, tables of statistics, etc., the Digit 1 tends to occur with Probability ~ 30%, much greater than the expected 10%. This can be observed, for instance, by examining tables of Logarithms and noting that the first pages are much more worn and smudged than later pages.

Benford's law applies to data that are *not* dimensionless, so the numerical values of the data depend on the units. If there exists a universal probability distribution $P(x)$ over such numbers, then it must be invariant under a change of scale, so

$$P(kx) = f(k)\,P(x).$$

If $\int P(x)\,dx = 1$, then $\int P(kx)\,dx = 1/k$, and normalization implies $f(k) = 1/k$. Differentiating with respect to k and setting $k=1$ gives

$$x\,P'(x) = -P(x),$$

having solution $P(x) = 1/x$. Although this is not a proper probability distribution (since it diverges), both the laws of physics and human convention impose cutoffs. For example, if street addresses are distributed uniformly over the range of 1 to some maximum cutoff value, then they'll obey something close to Benford's law.

If many decades lie between the cutoffs, then the probability that the first (decimal) digit is D is given by

$$P_D = \frac{\int_D^{D+1} P(x)\,dx}{\int_1^{10} P(x)\,dx} = \frac{\ln\left(\frac{D+1}{D}\right)}{\ln 10},$$

summarized in the following table.

D	P_D	D	P_D
1	0.30103	6	0.0669468
2	0.176091	7	0.0579919
3	0.124939	8	0.0511525
4	0.09691	9	0.0457575
5	0.0791812		

Indeed, of the 54 million real constants in Plouffe's "Inverse Symbolic Calculator" database, 30% begin with the Digit 1. The table below, taken from Benford (1938), shows the distribution of first digits taken from several disparate sources.

		First Digit									
Col.	Title	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Samples
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Specific Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	n^{-1}, $\sqrt{n}$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Reader's Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Blackbody	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	n^1, $n^2 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
	Probable Error	± 0.8	± 0.4	± 0.4	± 0.3	± 0.2	± 0.2	± 0.2	± 0.3		

In fact, the first Significant Digit seems to follow a Logarithmic Distribution, with

$$P(n) \approx \log(n+1) - \log n$$

for $n=1, \ldots, 9$. One explanation uses Central Limit-like theorems for the Mantissas of random variables under Multiplication. As the number of variables increases, the density function approaches that of a Logarithmic Distribution.

References

Benford, F. "The Law of Anomalous Numbers." *Proc. Amer. Phil. Soc.* 78, 551-572, 1938.

Boyle, J. "An Application of Fourier Series to the Most Significant Digit Problem." *Amer. Math. Monthly* 101, 879-886, 1994.

Hill, T. P. "Base-Invariance Implies Benford's Law." *Proc. Amer. Math. Soc.* 12, 887-895, 1995.

Hill, T. P. "The Significant-Digit Phenomenon." *Amer. Math. Monthly* 102, 322-327, 1995.

Hill, T. P. "A Statistical Derivation of the Significant-Digit Law." *Stat. Sci.* 10, 354-363, 1996.

Hill, T. P. "The First Digit Phenomenon." *Amer. Sci.* 86, 358-363, 1998.

Ley, E. "On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indices Digits." *Amer. Stat.* 50, 311-313, 1996.

Newcomb, S. "Note on the Frequency of the Use of Digits in Natural Numbers." *Amer. J. Math.* 4, 39-40, 1881.

Nigrini, M. "A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law." *J. Amer. Tax. Assoc.* 18, 72-91, 1996.

Plouffe, S. "Inverse Symbolic Calculator." http://www.cecm.sfu.ca/projects/ISC/.

Raimi, R. A. "The Peculiar Distribution of First Digits." *Sci. Amer.* 221, 109-119, Dec. 1969.

Raimi, R. A. "The First Digit Phenomenon." *Amer. Math. Monthly* 83, 521-538, 1976.

אינפי מתקדם לתלפיות

מועד א, סמסטר א 1998/9

דרור בר-נתן

משך הבחינה: שעתיים.

חומר עזר מותר בשימוש: אין.

ענה על 4 מתוך 5 השאלות הבאות:

__שאלה 1:__

א. נסח והוכח בפירוט את משפט טיילור עבור פונקציה $f: R^n \to R$. 16=6+10

ב. פתח לטור טיילור את הפונקציה $e^{x+y}\sin(x-y)$, עד וכולל האיברים מדרגה 2. 9

$=0+x-y+x^2-y^2$

__שאלה 2:__

א. נסח במדויק את המשפט בדבר החלפת משתנה האינטגרציה ויעקוביינים. 5

ב. רשום את תכנית ההוכחה של המשפט הנ"ל. 12

ג. חשב את האינטגרל $\iint_{R^2} e^{-(x^2+y^2)/2}dxdy$. 8

__שאלה 3:__

א. הגדר "הדיפרנציאל של פונקציה $f: R^n \to R^m$ בנקודה $x \in R^n$". הסבר מדוע מוצדק השימוש בה'-הידיעה במשפט הקודם. 10=4+6

ב. נסח את כלל השרשרת עבור פונקציות $R^n \xrightarrow{f} R^m \xrightarrow{g} R^p$. 4

ג. הגדר "נגזרת כיוונית בכיוון וקטור משיק ξ של פונקציה $g: R^n \to R$". 4

ד. הוכח $D_{f_*\xi}g = D_\xi f^* g$ כאשר f, g פונקציות כבסעיף ב', עם $p=1$. 7

__שאלה 4:__

א. הסבר את הקשר בין האופרטור d, הפועל על דו-תבניות ומייצר תלת-תבניות (ב- R^3), לבין האופרטור div.

ב. תהי $\omega = xdy \wedge dz$ דו תבנית על $R^3_{x,y,z}$. חשב את האינטגרל שלה על ספירת היחידה $S^2 = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2=1\}$ תוך שימוש בפרמטריזציה $\begin{pmatrix}\theta\\ \phi\end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\cos\phi\\ \sin\theta\sin\phi\end{pmatrix}$, המוגדרת עבור $(\theta,\phi) \in [0,\pi]\times[0,2\pi]$.

ג. חשב את $d\omega$. האם יש קשר בין התוצאה שקיבלת כאן, נפח כדור היחידה, והתוצאה מסעיף ב'?

__שאלה 5__

א. הוכח שכל חד-תבנית ω על R^n ניתנת להיכתב בצורה $\omega = \sum_{i=1}^n f_i dx_i$.

ב. עבור וקטור משיק $\xi = (p,v)$ בנקודה $p = (x,y) \in R^2_{x,y}$, נגדיר את $\eta(\xi)$ להיות שטח המשולש שקדקודיו הם ראשית הצירים והנקודות p ו- $p+v$. הראה ש η היא חד תבנית, ורשום אותה בצורה כמו בסעיף א'.

בהצלחה.

אינפי מתקדם א' - תרגיל 8 ([illegible])

① יהי x רציונלי ונציג אותו בצורת שבר מצומצם עם מכנה חיובי. נסמן את המכנה ב- q_x.

(א) נגדיר פונקציה על $[0,1]^2$ בצורה

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{q_x}+\frac{1}{q_y} & 0\neq x,y\in\mathbb{Q}\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$$

הראו שהאינטגרל $\iint_P f(x,y)$ קיים אך לא קיימים האינטגרלים

$$\int_0^1 dx\int_0^1 f(x,y)\,dy \qquad ! \qquad \int_0^1 dy\int_0^1 f(x,y)\,dx$$

(ב) יהי $f(x,y)=\begin{cases}1 & x,y\in\mathbb{Q},\ q_x=q_y\\ 0 & \text{אחרת}\end{cases}$. הראו שההפך קורה.

② חשבו באינדוקציה את נפח הסימפלקס ה-n-מימדי
$$P_n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:\ 0\le x_1\le\dots\le x_n\le 1\}$$

③ חשבו את נפח הקבוצה $A\subseteq\mathbb{R}^3$, $A=\{(x,y,z):0\le z\le x^2+y^2,\ \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\}$.
(רמז: $x=3r\cos\theta$, $y=2r\sin\theta$).

④ יהי B כדור ברדיוס $2R$:
$$B=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\le 4R^2\}$$
יהי C גליל ברדיוס R המשיק ל-B:
$$C=\{(x,y,z)\mid (x-R)^2+y^2\le R^2\}$$
חשבו את נפח $B\setminus C$ (כדור עם חור גלילי).

⑤ (משפט Sard) יהי $g:A\to\mathbb{R}^n$ גזירה ברציפות, $A\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה. נסמן $B=\{x\in A: J_g(x)=0\}$. הראו ש- $g(B)$ מידה אפס ב-$\mathbb{R}^n$.

<u>הדרכה:</u> הראו שמספיק להוכיח עבור A שהיא קובייה (כי ניתן לכסות את A כאיחוד בן מניה של קוביות). יהי $\varepsilon>0$, חלקו את A לקוביות קטנות והראו שאם S אחת מהקוביות האלו עם $B\cap S\neq\emptyset$ אז $g(S)$ מוכלת בגליל שאנחנו שולטים על נפחו היטב.

חזרה: מתקדם לאלגברה

1. $\Lambda^k V^* := \{$ תבניות k-לינאריות א"ס על V $\}$

2. דוגמאות.

$$(v_1 \dots v_k) \longmapsto \det\begin{pmatrix} \varphi_1(v_1) & \dots & \varphi_k(v_1) \\ \vdots & & \vdots \end{pmatrix} = \varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$$

3. הגדרה.

$$\omega_1 \wedge \omega_2 (v_1 \dots v_{k+l})$$

$$= \frac{1}{k!\,l!} \sum_{\pi} (-1)^{\pi} \omega_1(v_{\pi 1} \dots v_{\pi k}) \omega_2(\dots)$$

תכונות: 1. מוגדר

$\Lambda^k \otimes \Lambda^l \to \Lambda^{k+l}$

$\omega_1 \wedge \omega_2$ אכן $k+l$ תבנית

2. הפעולה בילינארית

3. $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{kl} \omega_2 \wedge \omega_1$

4. אסוציאטיבית

5. אכן ה"נ $\varphi_1 \wedge \dots \wedge \varphi_k$ מתאים (הדוגמא)

4. אם $\varphi_1 \dots \varphi_n$ בס"ס של V^* אז

$\varphi_{i_1} \wedge \dots \wedge \varphi_{i_k}$ $\quad i_1 < \dots < i_k$

בס"ס של $\Lambda^k V^*$

$\omega \in \Lambda^k V^*$

הוכחה: כדי להוכיח זאת ω, מספיק להוכיח על

$(v_{j_1} \dots v_{j_k})$ $\quad j_1 < \dots < j_k$

5. קיום תלמוד התרגיל 13^{15} מועד א'

שנה ב'

תרגיל מס' 6 — אינפי מתקדם (הלפינה)

① הראו שהמשוואות $u=x^3y+y^2$, $v=\ln(x+y)$ קיים פתרון יחיד $x=x(u,v)$ ו- $y=y(u,v)$ בסביבה של $(u,v)=(6,\ln 3)$ עם $x(6,\ln 3)=1$ ו- $y(6,\ln 3)=2$.

② הראו שהפונקציה $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $f(x,y)=(e^x\cos y,\ e^x\sin y)$ היא פתוחה, חח"ע באופן מקומי אך איננה חח"ע.

③ תהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^n$ דיפרנציאבילית וחח"ע. נניח גם ש- $V=f(U)$ פתוחה. נניח שקיימת $g:V\to U$ רציפה כך ש- $g\circ f=Id_U$, $f\circ g=Id_V$.

(א) הראו שאם g דיפרנציאבילית ב- V אז לכל $x\in U$ היעקוביאן $J_f(x)\neq 0$.

(ב) האם זה נכון גם ללא הנחת הדיפרנציאביליות של g?

(ג) הראו שאם g מקיימת את תנאי ליפשיץ ב- $f(U)$ אז g דיפרנציאבילית.

④ הפונקציה $f(x,y,z)=\arctan(x^2+y^2+z^2)-(xy+yz+xz)$

הראו ש- $(0,0,0)$ מועמדת להיות נקודת אקסטרמום.

חשבו את ההסיאן של f בנקודה זו (הערה: בפיתוח טיילור של $\arctan(u)$ לב' איברים פולינום טיילור)

והראו שהמטריצה בעלת ערך עצמי 0. השתמשו בפיתוח טיילור וגזרו כדי להוכיח ש- $(0,0,0)$ איננה נקודת אקסטרמום.

תרגיל מס' 7 - אינפי מתקדם ([illegible])

① יהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה מהצורה $A=[a_1,b_1]\times\dots\times[a_n,b_n]$ ותהי $f:A\to\mathbb{R}$ פונקציה. נתבונן בהעתקה $T:[0,1]^n\longrightarrow A$

$$T(x_1,\dots,x_n)=(a_1+(b_1-a_1)x_1,\ \dots,\ a_n+(b_n-a_n)x_n)$$

הניחו כי A תיבה לא מנוונת. הוכיחו כי

א. T רציפה, חח"ע ועל.

ב. f רציפה ב-$T(x)$ $\Longleftrightarrow$ $f\circ T$ רציפה ב-x. ($x\in[0,1]^n$)

ג. $B\subseteq[0,1]^n$ ממידה 0 $\Longleftrightarrow$ $T(B)$ ממידה 0.

ד. f אינטגרבילית ב-A $\Longleftrightarrow$ $f\circ T$ אינ' ב-$[0,1]$ ומתקיים כי

$$\int_A f=vol(A)\int_{[0,1]^n} f\circ T$$

② יהי $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה, $f:U\to\mathbb{R}^n$ מקיימת תנאי ליפשיץ. הניחו כי $N\subseteq U$ קבוצה ממידה 0. הוכיחו שה-$f(N)$ ממידה 0. (רמז: קוביות).

③ תהי $A\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה, $J\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח! $f:A\times J\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. הניחו גם כי $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ ($x\in A$, $t\in J$) קיימת לכל $x\in A$ ולכל $t\in J$, והניחו גם ש-$\frac{\partial f}{\partial t}$ רציפה על $A\times J$. נגדיר $g(t)=\int_A f(x,t)\,dx$. הוכיחו ש-g גזירה! וכי $g'(t)=\int_A \frac{\partial f}{\partial t}(x,t)\,dx$.

מדור מיון והערכה

מחלקת מנהל תלמידים

משאל הערכת הוראה

סמסטר א תשנ"ט

שם המורה: ד"ר דרור בר-נתן ת.ז: 02216584 שם הקורס:חשבון אינפיניטסימלי מתקדם (1 החוג:מתימטיקה פיסיקה (תלפיות)

מספר הקורס:79244 אפיון הקורס: בוגר-חובה מספר משיבים למשאל:23 מספר רשומים לקורס:21 אחוז משיבים: %

השאלות		מספר משיבים	ממוצע	סטית תקן	חציון	שכיח	ענו "לא רלבנטי"
תרומת הקורס:	הקניית ידע	23	9.3	3.8	9	8	0
	תרומת תרגיל/מעבדה	21	8.0	4.3	8	8	2
	תרומת עבודות בית	21	9.2	4.0	10	11	2
תכנון וארגון:	תכנון וארגון הקורס	23	7.7	4.8	7	6	0
	תרומת חומר הקריאה	7	6.1	3.4	5	5	16
דרך ההוראה:	העברת שיעור מעניינת	23	12.3	4.0	13	15	0
	ארגון השיעורים	23	9.3	5.3	10	5	0
	הרצאה ושיתוף תלמידים	22	12.6	4.1	14	14	0
יחס מורה תלמיד:	תגובות המורה להערות	23	14.0	4.2	14	14	0
	יחס נאות של המורה	23	16.2	2.4	16	18	0
	הערכה כללית לקורס	23	9.3	4.0	8	8	
	הערכה כללית למורה	23	9.2	4.6	9	12	

```
          *   *
          *   *
        * *   *   *   *     *
*       * * * * * * * * *   * * *
---------------------------------------
1       5         10        15        20
```

התפלגות ההערכה הכללית לקורס (*= 1 תלמידים)

נורמות להשוואת ההערכות הכלליות

הערכה לקורס: נורמת קורסי " בוגר-חובה" בחוג : ממוצע 11.6 ס.תקן 4.0 57 משיבים

הנורמה הכללית בחוג: ממוצע 11.6 ס.תקן 4.0 57 משיבים

0% מהציונים הממוצעים של "ההערכה הכללית לקורס" בקורסי החוג היו נמוכים משלך.

הערכה למורה: נורמת קורסי " בוגר-חובה" בחוג : ממוצע 11.6 ס.תקן 4.9 57 משיבים

הנורמה הכללית בחוג: ממוצע 11.6 ס.תקן 4.9 57 משיבים

0% מהציונים הממוצעים של "ההערכה הכללית למורה" בקורסי החוג היו נמוכים משלך.

```
                      *
                      *   *
      *     * *       *   *     *
* * * * * * * * *   * * * *     *
---------------------------------------
1       5         10        15        20
```

התפלגות ההערכה הכללית למורה (*= 1 תלמידים)

התאמת הקורס לתלמיד - התפלגות מספר המשיבים

על "כמות חומר הקריאה" השיבו: 0% "רבה מדי", 0% "רבה", 0% "מתאימה", 17% "מעטה", 4% "מעטה מדי". 78% "לא רלבנטי")