<u>יריעות תלת ממדיות</u>

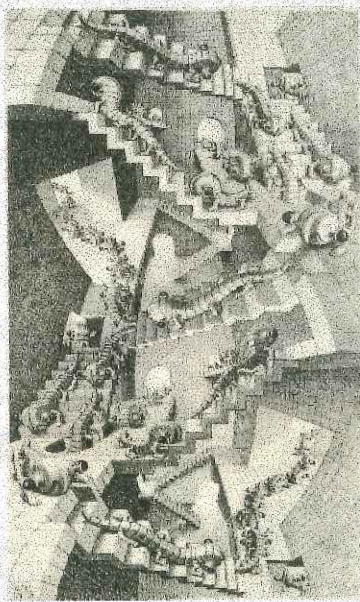
האוניברסיטה העברית, אביב 1998

<u>מס' הקורס</u>: 80925.

<u>המרצה</u>: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, 02-658-4187, drorbn@math.huji.ac.il.
<u>שעות קבלה</u>: בינתיים, ע"פ תיאום מראש. יתכן שתקבענה שעות קבועות בהמשך.
<u>שעות הקורס</u>: ימי שלישי 14:00-16:00, שפרינצק 28.

<u>נושאים</u>: (תכנית אופטימית)

1. יריעות תלת-ממדיות, השערת Poincare, מהלכי Kirby, מעט על הומולוגיה.
2. הפולינום של Alexander-Conway והשמורה של Casson.
3. שמורות מטיפוס סופי של קשרים.
4. שמורות מטיפוס סופי של יריעות תלת ממדיות, ע"פ Ohtsuki ו- Garoufalidis and Ohtsuki.
5. חומר רקע: אלגבראות Lie, אלגבראות Hopf, קישורים, הולונומיה, קישורים שטוחים.
6. האינטגרל של Kontsevich ותכונותיו הבסיסיות.
7. תורת Chern-Simons ודיאגרמות Feynman.
8. אינטגרל Aarhus ע"פ Bar-Natan, Garoufalidis, Rozansky and Thurston.
9. השמורה של LMO, TQFT, ועוד דברים שהייתי שמח ללמוד.



M.C. Escher,
House of
Stairs

החיים ביריעה
תלת ממדית
שאינה $\mathbf{R}^3$

הרקע:
בועת סבון עם 120 תאים, מייצגת את הכיסוי האוניברסלי של המרחב הדודקהדרלי של Poincare, שהוא דוגמא נגדית להשערת Poincare ההומולוגית.
התמונה מאת John Sullivan, ראו http://www.geom.umn.edu/graphics/pix/General_Interest/Digital_Art/sullivan-120cell.html.

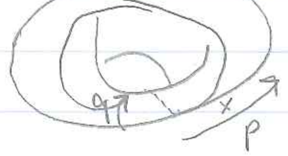
יריעות תלת-ממדיות, 10 ליולי 1998.

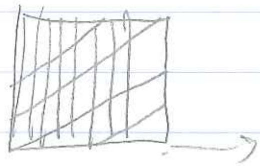
1. מטרות/תכנית הקורס.
יריעות דו-ממדיות, משטחים, הגנוס
יריעות 3-ממדיות. התורה הקלסית, הפנימית, מרחב היריעות, טבעת, פולינום!

2. הגדרת יריעה, קומפקטיות, סגירות, קשירות, אוריאנטביליות
3. $R^3 \cup \infty = S^3$, $S^1\times S^2$, $S^1\times S^1\times S^1$, $S^1\times\Sigma$

4.

מרחבי לנס אולי עכשיו.

$L_{p,q} =$ 



$\gamma(t)=(pt,qt)$

למה: $L_{0,1}=S^1\times S^2$; $L_{1,0}=S^3$; $L_{1,q}=S^3$

תרגיל: א. $L_{1,q}=S^3$ לכל q

ב. $L_{p,q}=L_{p,q'}$ אם $q=\pm q'$ מוד p
או $qq'=\pm 1$ מוד p.

5. הומוטופיה של כל הנ"ל. (השערת פואנקרה)
6. הומולוגיה של כל הנ"ל.

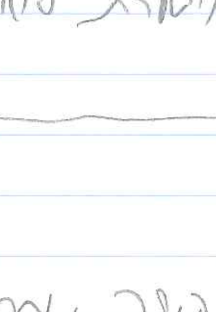
---

7. [illegible]; קשרים ומשזרים.

8. ההומולוגיה של המשלים של קשר, מספר הקישור, נוסחה למספר הקישור.

9. קשרים ממוסגרים (משזרים), קישור עצמי

10. [illegible] שלה



יריעות תלת-מימדיות, 17 במרץ 1998.

מילווקי: 24/4-2015 (4 שעורים) הוסבר מהסיפור?

1. הומולוגיה $\mathbb{Z}$ המשלים $\mathbb{Z}$ קשר.

2. מספר הקישור מהומולוגיה ועד לניסוח)

תרגיל: הניסוח) שמורה תחת מהלכי רידמייסטר

3. מיסגור (נורמל מוגדר) מיסגור הלוח, מיסגור ה-0, שאר המיסגורים

4. ניתוח Dehn רציונלי L - שרשר מסומן במספרים רציונליים מצומצמים, כולל $1/0=\infty$

הערה נא להדגיש שצריך מכוונים אולם התוצאה לא תלויה בכיוון.

$$S^3 \longmapsto S^3_L$$

דוגמאות: 1. $S^3_{(K,\infty)} = S^3$

2. $S^3_{(U,1/q)} = S^3$

3. $S^3_{(U,0)} = S^2\times S^1$; $S^3_{(U,p/q)} = L(p,q)$ מרחבי עדשות

5 הדוגמאות $S^3_{(T,1)}$

6. הוכח $\mathbb{Z}$

קשר מלווה לקשר נתון - קשר על שפת סביבה אבובית של הקשר הנתון.

המלווה מאופיין ע"י שני שלמים: מספר הקישור של המלווה עם הקשר המקורי (p), ומספר הליווי (q) - הדרגה של ההטלה הטבעית מהמלווה אל הקשר המקורי. מספרים אלו הם בהכרח זרים, וקביעת הסימן של אחד מהם קובעת את סימנו של השני. לכן נהוג לאחדם כמספר רציונלי (כולל ∞) יחיד, $a = p/q$. אם המספר הזה הוא שלם (כלומר, אם $q=1$), המלווה הוא "צל" או "מסגור".

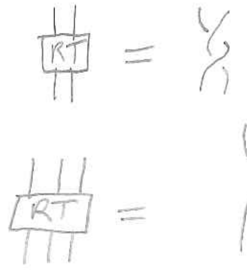
משזר עם מלווים - משזר עם מלווה לכל רכיב, או לחילופין, משזר בצירוף מספר רציונלי לכל רכיב. מקרה פרטי הוא "משזר ממוסגר".

משזר עם מלווים מגדיר יריעה תלת-ממדית ע"י ניתוח.

יחסים:

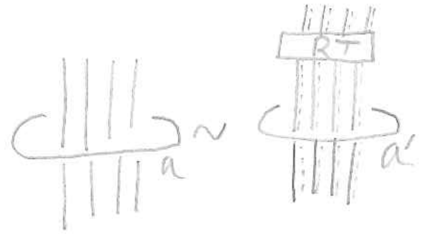
1. רכיב המסומן ב-∞ ניתן לביטול.
2. יחס השב"כ:

ראשית, נגדיר פיתול לימין (Right Twist):



(וכך גם לכל המלווים, אם יש כאלו)
בדומה מוגדר הפיתול לשמאל (Left Twist)

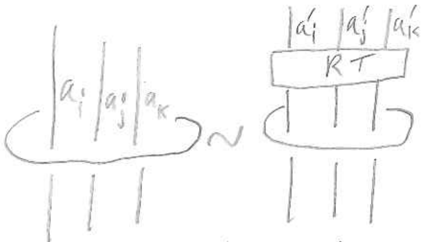
גרסת מלווים:



$a = p/q \qquad a' = p/(q+p)$

כלומר, $a' = 1/(1+1/a)$

גרסה רציונלית:

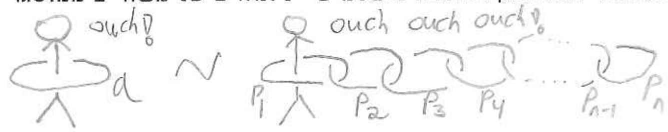


$a_1' = 1/(1+1/a_1)$

$a_i' = a_i + [lk(1,i)]^2$

נובע שאפשר להסתפק בניתוחים שלמים - ניתוחים על משזרים ממוסגרים: (תרגיל מומלץ!!)

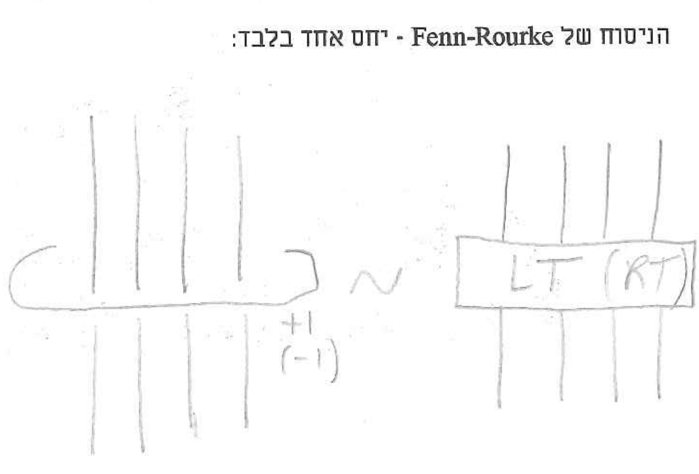
$$a = p_1 - 1/\left(p_2 - 1/\left(p_3 - 1/\left(\ldots\left(p_{n-1} - 1/p_n\right)\right)\right)\right)$$

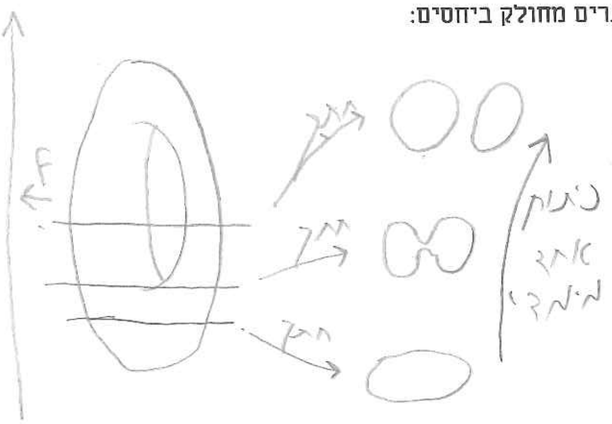


משפט Kirby: אוסף היריעות התלת ממדיות שקול לאוסף המשזרים הממוסגרים מחולק ביחסים:

1. רכיב לא-קשור, ממוסגר ב- ± 1, ומופרד ניתן לביטול.
2. יחס ההחלקה: (ההחלקה ע"פ המסגור הנתון)

הניסוח של Fenn-Rourke - יחס אחד בלבד:





רעיון ההוכחה:

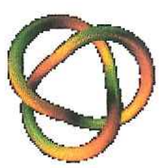
1. יריעה דו-ממדית עם פונקצית Morse זה פחות או יותר מקביל של "הוראות ניתוח עבור יריעה אחד-ממדית".
2. יריעה ארבע-ממדית עם פונקצית Morse מקבילה ל-"הוראות ניתוח עבור יריעה תלת-ממדית".
3. צמד של "הוראות ניתוח" עבור אותה יריעה תלת-ממדית הוא צמד של יריעות ארבע-ממדיות עם אותה השפה, ומכאן אפשר לבנות יריעה ארבע-ממדית אחת ללא שפה. זו עצמה היא השפה של יריעה חמש-ממדית.
4. בוחרים פונקצית Morse נאותה על היריעה החמש ממדית, ומסתכלים על קבוצות הרמה. מתקבל "סרט" של הוראות ניתוח".

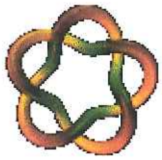
מידע חסר: תורת Morse, Cobordism, מצב כללי, ...

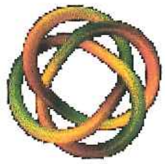
מחמת קוצר זמן, לא נדון בפרטי ההוכחה.

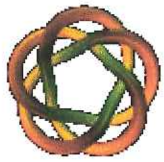
Torus Knots

These are knots that can be drawn on the surface of a torus without intersections.


-3/2

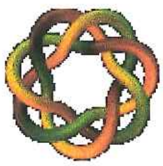

-5/2


-4/3


-5/3


-7/2


-5/4


-7/3


-9/2

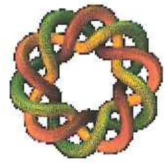

-8/3


-7/4


-6/5


-7/5


-11/2


-10/3


-9/4


-8/5

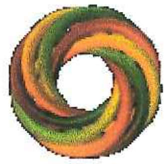

-7/6


-11/3


-9/5


-13/2

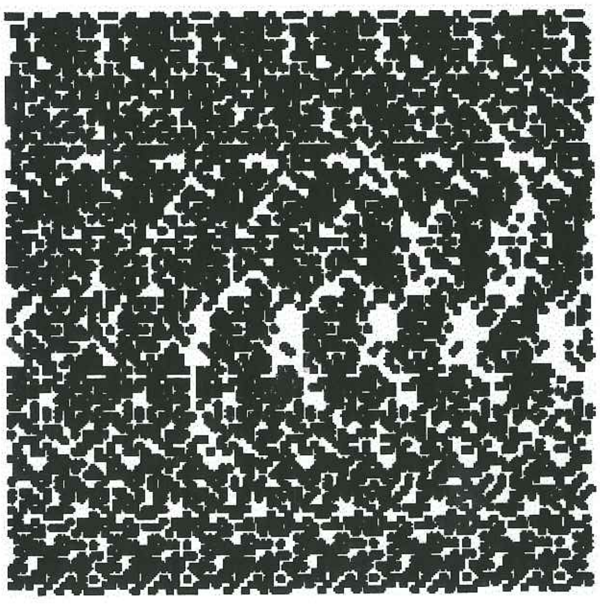

-11/4


-8/7?


-13/3


-11/5


-9/7?



Taken from the KnotPlot Site
(http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/KnotPlot.html)
by Rob Scharein (http://www.cs.ubc.ca/spider/scharein).
Original address:
http://www.cs.ubc.ca/nest/imager/contributions/scharein/torus.html
Minor modifications by Dror Bar-Natan
(http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn) on March 21, 1998.
(Random Dot Stereogram is original. What does it show?)

הרצאות תל-אביביות, 19 ~~ליוני~~ יוני 1998.

1. הגדרה של שמורות של הקשרים ואת $K_{n+1} \to K_n$: טל, coker, ker

2. הגדרה של נגזרות ויחס השב״ג.

3. נסיון נאיבי וכשלונו

4. ספירות הומולוגיות: חישוב ההומולוגיה בעזרת מלוצ״ג קישור.

5. מספרי קשר לספירות הומולוגיות

6. ההגדרה של אוטצוקי

7. מספיק (S^3, L) [דהינו, (S^3, L) פורס ... $n+1$]

8. אינווריאנטיות תחת הומולוגיה.

9. ~~מספרי~~ קשר עם מיסגורים ± 1.

10. מחלק המספר.

יריעות תלת-ממדיות, 26 למאי 1998

1. חוג יצירה.

2. תזכורת: $\mathcal{M}_n$, f מגדירים ← $\mathcal{M}_n / f\mathcal{M}_{n+1}$ ול- $\mathcal{M}_n / (f\mathcal{M}_{n+1} + [illegible])$

3. בתאוריה הקשירה, לא משנה איזה מתעקם את הנקודה על כולם, תמיד יוצא אותו דבר.

(השפכתנו: $\{(\mathbb{C}^3, L)\} \to \mathcal{M}_n / f\mathcal{M}_{n+1}$ הוא על!)

צריך להראות קשירות. א. להראות יחס ההחלקה.
ב. הוכחת יחס ההחלקה.

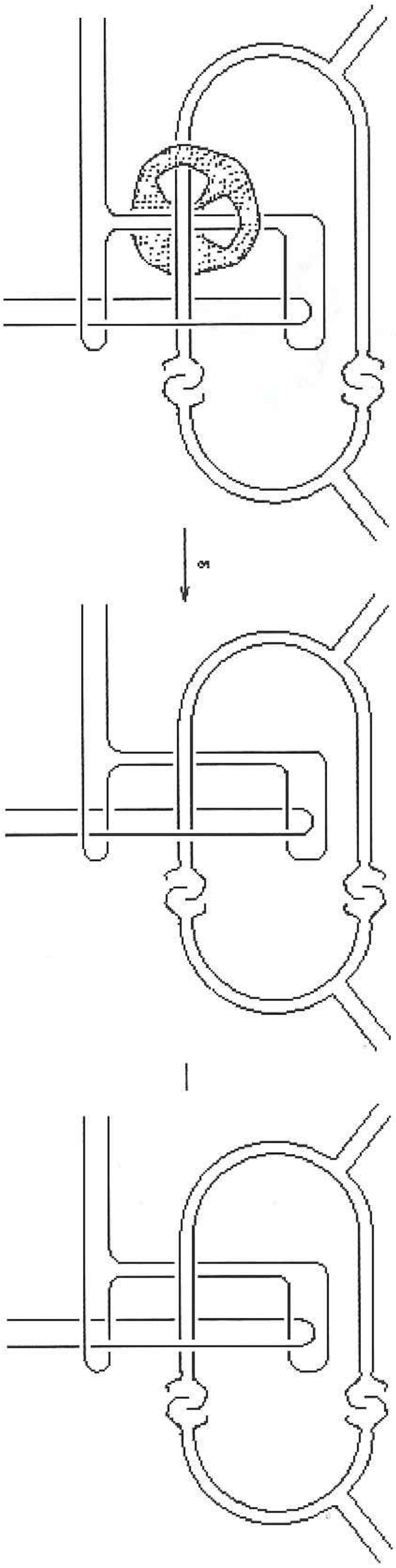
4. הומוטופיה וצמות. א. הומוטופיה
ב. כל משזר הוא הסגור של קלוע טהור
ג. מודולו הומוטופיה, קלועים הם צמות.

5. חבורת הצמות B_n: יוצרים ויחסים

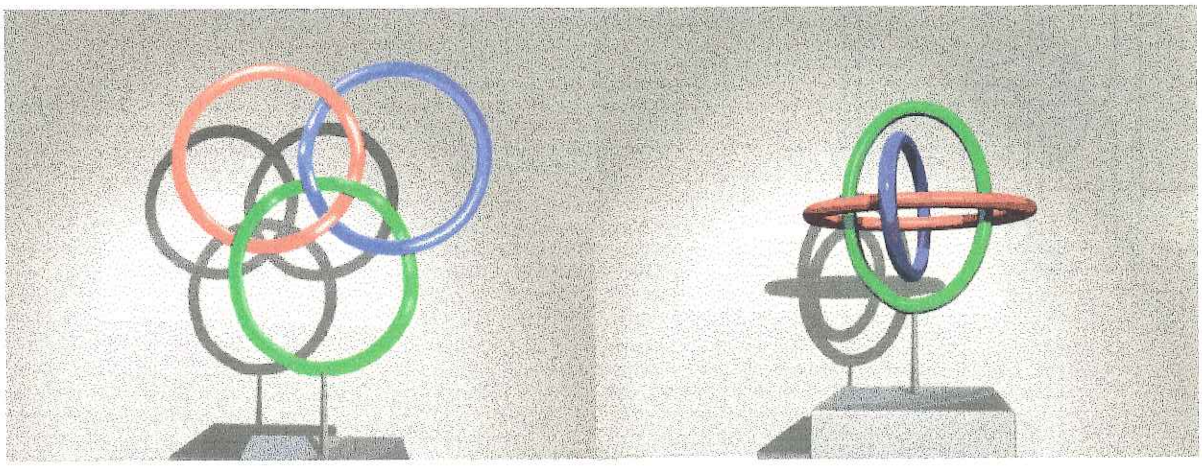
6. חבורת הצמות הטהורות P_n: קשר עם צמות.
יוצרים ויחסים.
מרכז.

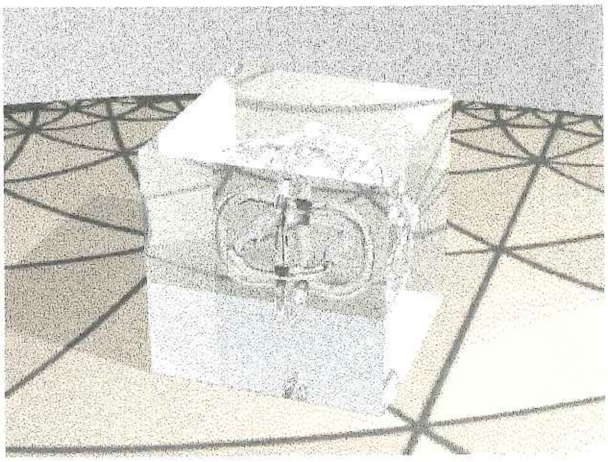
7. מסגורים $+1$

8. מהלך המחלף ומשמעותו ההומוטופית.



Borromean Links Gallery





Three mutually interlocked rings named after the Italian Renaissance family who used them on their coat of arms. No two rings are linked, so if one of the rings is cut, all three rings fall apart.

(Pictures taken from http://www.geom.umn.edu)

THE ELEMENTARY THEORY OF FINITE TYPE INVARIANTS OF HOMOLOGY SPHERES

DROR BAR-NATAN

This is a pre-preprint. Your comments are welcome.

ABSTRACT. Very abstract.

CONTENTS

1. Introduction 1
1.1. The case of knots 1
1.2. The case of homology speheres 2
1.3. Acknowledgement 2
2. Preliminaries 2
2.1. Surgery and the Kirby calculus 2
2.2. The Borromean rings 2
2.3. The triple linking numbers μ_{ijk} 2
3. Constancy conditions or $\mathcal{M}_n/\delta\mathcal{M}_{n+1}$ 2
3.1. Statement of the result 2
3.2. On a connected space, polynomials are determined by their values at any given point 3
3.3. Homotopy invariance and pure braids 3
3.4. The mask and the interchange move 3
3.5. Reducing third commutators 3
4. Integrability conditions or $\ker\delta$ 3
4.1. $+1$ and -1 surgeries are opposites 3
4.2. A total twist is a composition of many little ones 4
4.3. The two ways of building an interchange 4
4.4. Lassoing a Borromean link and the IHX relation 4
References 5

1. INTRODUCTION

1.1. The case of knots.

1.1.1. *Singular knots, the co-differential δ, the co-differentiability relation and $\mathcal{K}_n$.*

1.1.2. *Constancy conditions, $\mathcal{K}_n/\delta\mathcal{K}_{n+1}$, and chord diagrams.*

Date: This edition: June 23, 1998; First edition: in the future.
This pre-preprint is not yet available electronically at `http://www.ma.huji.ac.il/~drorbn` and at `http://xxx.lanl.gov/abs/math/yymmnnn`.

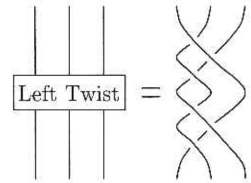


Figure 1. The Left Twist (LT).

1.1.3. *Integrability conditions,* $\ker\delta$*, lassoing double points, and four-term relations.*

1.1.4. *A word on integration.*

1.2. The case of homology speheres.

1.2.1. *The definitions.*

1.2.2. *The questions.*

1.2.3. *What's in a name?*

1.3. Acknowledgement.

I thank all.

2. PRELIMINARIES

2.1. Surgery and the Kirby calculus.

2.2. The Borromean rings.

2.3. The triple linking numbers μ_{ijk}.

3. CONSTANCY CONDITIONS OR $\mathcal{M}_n/\delta\mathcal{M}_{n+1}$

3.1. Statement of the result.

Definition 3.1. Let $\mathcal{Y}_n$ be the unital commutative algebra over $\mathbf{Z}$ generated by symbols Y_{ijk} for distinct indices $1 \le i, j, k \le n$, modulo the anti-cyclicity relations $Y_{ijk} = Y_{jik}^{-1} = Y_{jki}$.

Warning 3.2. Below we will mostly regard $\mathcal{Y}_n$ as an $\mathbf{Z}$-module, and not as an algebra. Thus we will only use the product of $\mathcal{Y}_n$ as a convenient way of writing certain elements and linear combinations of elements. The subspaces of $\mathcal{Y}_n$ that we will consider will be subspaces in the linear sense, but not ideals or subalgebras, and similarly for quotients and maps from or to $\mathcal{Y}_n$.

It is easy to define a map $\mu : \mathcal{M}_n/\delta\mathcal{M}_{n+1} \to \mathcal{Y}_n$. For an n-link L set

$$\mu(L) = \prod_{1\le i<j<k\le n} Y_{ijk}^{\mu_{ijk}(L)}.$$

It follows from Section 2.3 that this definition descends to the quotient of $\mathcal{M}_n$ by the co-derivatives of $(n+1)$-links.

Theorem 1. *The thus defined map $\mu : \mathcal{M}_n/\delta\mathcal{M}_{n+1} \to \mathcal{Y}_n$ is an isomorphism.*

3.2. **On a connected space, polynomials are determined by their values at any given point.**

3.3. **Homotopy invariance and pure braids.**

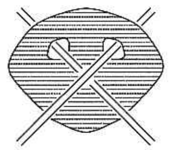


Figure 2. The Mask

3.4. **The mask and the interchange move.**

3.5. **Reducing third commutators.**

4. Integrability conditions or $\ker\delta$

4.1. **$+1$ and -1 surgeries are opposites.**

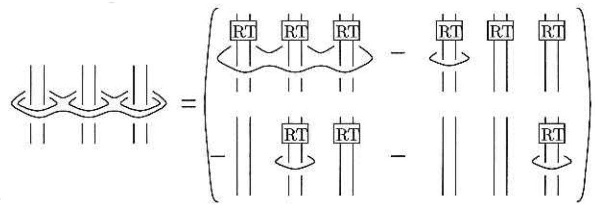


Figure 3. A 3-mask.

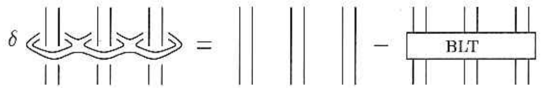


Figure 4. The co-derivative of a 3-mask.

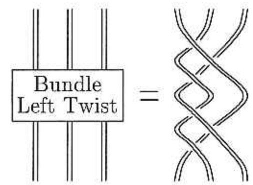


Figure 5. The Bundle Left Twist (BLT) is the same as the Left Twist, only that the strands within each "bundle" are not twisted internally.

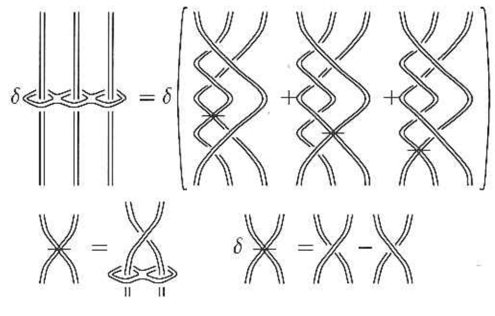


Figure 6. Undoing a Bundle Left Twist one crossing at a time.

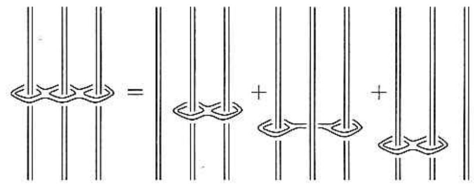


Figure 7. The Total Twist Relation (TTR).

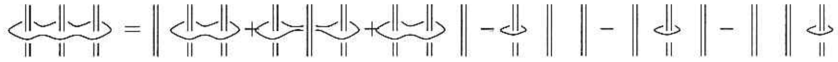


Figure 8. The Total Twist Relation (TTR).

4.2. **A total twist is a composition of many little ones.**

4.3. **The two ways of building an interchange.**

4.4. **Lassoing a Borromean link and the IHX relation.**

$$\tilde{Y}_{rab}Y_{rgb}(Y_{rgp}Y_{pyb} - Y_{rgp} - Y_{pyb}) = \tilde{Y}_{rab}Y_{rgb}(Y_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} - Y_{pyb})$$

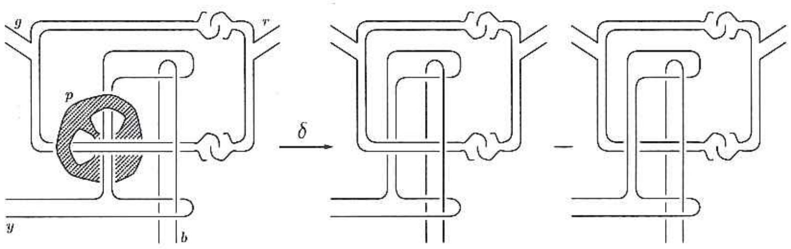


Figure 9. The Monster

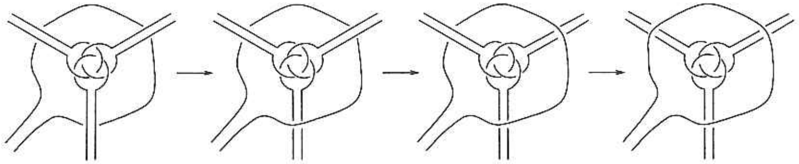


Figure 10. Lassoing a Borromean link.

$$= Y_{rab}Y_{rgb}Y_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} - Y_{rab}Y_{rgb}Y_{pyb} - Y_{rgb}Y_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} + Y_{rgb}Y_{pyb}$$

$$= Y_{rab}Y_{rgb}Y_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} - Y_{rab}Y_{rgb}\tilde{Y}_{pyb} - Y_{rgb}Y_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} + Y_{rgb}\tilde{Y}_{pyb}$$

(The last equality holds because in the two error terms, $Y_{rab}Y_{rgb}$ and Y_{rgb}, the component p is unknotted). Now reduce the component r using the total twist relation. Only the first term is affected, and 3 of the 6 terms that are produced from its reduction cancel against the 3 remaining terms of the above equation. The result is:

$$= (Y_{rab}Y_{rgp} - Y_{rab} - Y_{rgp})\tilde{Y}_{pyb} = \tilde{Y}_{rab}\tilde{Y}_{rgp}\tilde{Y}_{pyb} - \tilde{Y}_{pyb}.$$

The last term here drops out because in it the component r is unknotted, and so the end result is $\tilde{Y}_{rab}\tilde{Y}_{rgp}\tilde{Y}_{pyb}$. In graphical terms, this is precisely the graph I! Cyclically permuting the roles of r, g, and b, we find that we have proven the IHX relation.

References

[B-N] D. Bar-Natan, *On the Vassiliev knot invariants,* Topology **34** 423–472 (1995).

[Bi] J. S. Birman, *New points of view in knot theory,* Bull. Amer. Math. Soc. **28** (1993) 253–287.

[BL] ——— and X-S. Lin, *Knot polynomials and Vassiliev's invariants,* Inv. Math. **111** (1993) 225–270.

[Go1] M. Goussarov, *A new form of the Conway-Jones polynomial of oriented links,* in *Topology of manifolds and varieties* (O. Viro, editor), Amer. Math. Soc., Providence 1994, 167–172.

[Go2] ———, *On n-equivalence of knots and invariants of finite degree,* in *Topology of manifolds and varieties* (O. Viro, editor), Amer. Math. Soc., Providence 1994, 173–192.

[Ko] M. Kontsevich, *Vassiliev's knot invariants,* Adv. in Sov. Math., **16(2)** (1993) 137–150.

[Vas1] V. A. Vassiliev, *Cohomology of knot spaces,* Theory of Singularities and its Applications (Providence) (V. I. Arnold, ed.), Amer. Math. Soc., Providence, 1990.

[Vas2] ———, *Complements of discriminants of smooth maps: topology and applications,* Trans. of Math. Mono. **98**, Amer. Math. Soc., Providence, 1992.

Institute of Mathematics, The Hebrew University, Giv'at-Ram, Jerusalem 91904, Israel
E-mail address: `drorbn@math.huji.ac.il`

הרצאת הלכה-מתמטיקה 23 ליוני 1998.

1. זוגיים?

2. IHX

3. AS

4. מספור מחדש וכיוון מחדש.

5. תורת Hutchings.