מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים

האוניברסיטה העברית, סתיו 1996

<u>מס' הקורס</u>: 80718. בינתיים זהו קורס שנתי, אולם אני מנסה לחלקו לשני קורסים סמסטריאליים.

<u>המרצה</u>: דרור בר-נתן, בנין אינשטיין חדר 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.ac.il.

<u>שעות קבלה</u>: ימי שלישי 10:30-11:30.

<u>שעות הקורס</u>: ימי חמישי 8:00-9:45 (אף אחד לא יבכה אם ימצא זמן יותר מוצלח). מקום הקורס עדיין לא נקבע.

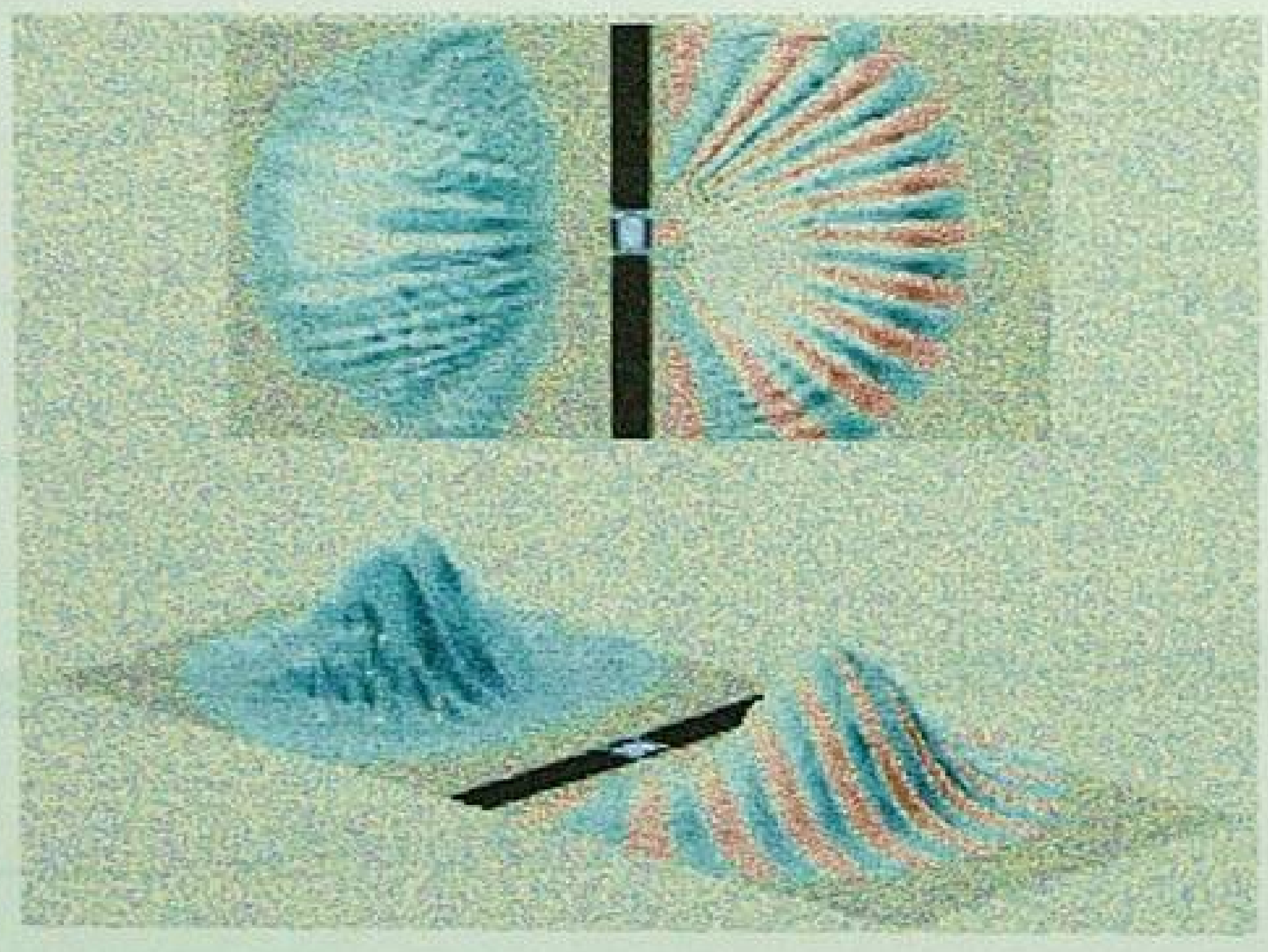
<u>מטרת הקורס</u>: לעזור למתמטיקאים להבין את העקרונות הבסיסיים (והחשובים) ביותר בפיסיקה. השפה תהיה נוחה למתמטיקאים, אולם לא אנסה לשמור על דיוק מתמטי מלא - זו אינה המטרה.

<u>נושאי הלימוד בסמסטר א</u>: (תכנית אופטימית) חשבון וריאציות ומשוואות Euler-Lagrange בכמה הקשרים. סימטריות וחוקי שימור. הניסוח של Hamilton, סוגרי Poisson וטיפ-טיפה על גיאומטריה סימפלקטית. ניסויי התאבכות ועקיפה. קוואנטיזציה ע"י אינטגרציה על מסלולים וקוואנטיזציה קנונית. הסתברות קוונטית והפרדוקס של Bell. משפט Von-Neumann. האוסצילטור ההרמוני. הצגות של SO(3) ו-SU(2), אפקט Zeeman וספין. תבניות דיפרנציאליות ומשוואות Maxwell. מילים בודדות על תורת היחסות הפרטית והכללית ועל תורות שדה.

<u>נושאי הלימוד בסמסטר ב</u>: אללה אכבר. נבחר איזשהו נושא קצת יותר צר ונלמד אותו יותר לעומק. מה בדיוק זה יהיה? ראו בתחילת השורה הקודמת.

<u>ספרות</u>:

1. Gelfand&Fomin, Calculus of Variations.
2. J.J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics.
3. Feynman&Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals.
4. G. Mackey, Mathematical Foundation of Quantum Mechanics.
5. G. Mackey, Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics.
6. Bamberg&Sternberg, A Course in Mathematics for Students of Physics.
7. ספרות נוספת ע"פ הצורך.



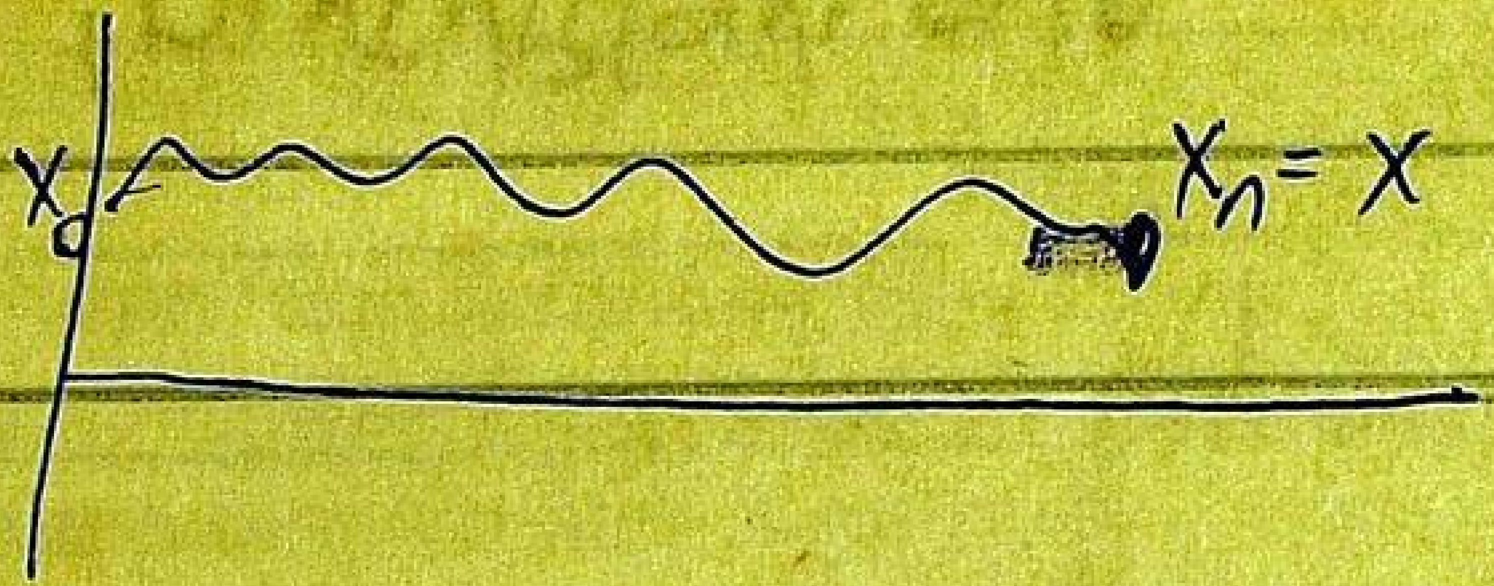
<u>Quantum Mechanics or Quantum Theory</u>, branch of mathematical physics that deals with the emission and absorption of energy by matter and with the motion of material particles. Because it holds that energy and matter exist in tiny, discrete amounts, quantum mechanics is particularly applicable to ELEMENTARY PARTICLES and the interactions between them. According to the older theories of classical physics, energy is treated solely as a continuous phenomenon (i.e., WAVES), and matter is assumed to occupy a very specific region of space and to move in a continuous manner. According to the quantum theory, energy is emitted and absorbed in a small packet, called a quantum (pl. quanta), which in some situations behaves as particles of matter do; particles exhibit certain wavelike properties when in motion and are no longer viewed as localized in a given region but as spread out to some degree. The quantum theory thus proposes a dual nature for both waves and particles, with one aspect predominating in some situations and the other predominating in other situations. Quantum mechanics is needed to explain many properties of matter, such as the temperature dependence of the SPECIFIC HEAT of solids, as well as when very small quantities of matter or energy are involved, as in the interaction of elementary particles and fields, but the theory of RELATIVITY assumes importance in the special situation where very large speeds are involved. Together they form the theoretical basis of modern physics. (The results of classical physics approximate those of quantum mechanics for large scale events and those of relativity when ordinary speeds are involved.) Quantum theory was developed principally over a period of thirty years. The first contribution was the explanation of BLACKBODY radiation in 1900 by Max PLANCK, who proposed that the energies of any harmonic oscillator, such as the atoms of a blackbody radiator, are restricted to certain values, each of which is an integral (whole number) multiple of a basic minimum value. In 1905 Albert EINSTEIN proposed that the radiation itself is also quantized, and he used the new theory to explain the PHOTOELECTRIC EFFECT. Niels BOHR used the quantum theory in 1913 to explain both atomic structure and atomic spectra, showing the connection between the energy levels of an atom's electrons and the frequencies of light given off and absorbed by the atom. Quantum mechanics, the final mathematical formulation of the quantum theory, was developed during the 1920s. In 1924 Louis de BROGLIE proposed that particles exhibit wavelike properties. This hypothesis was confirmed experimentally in 1927 by Clinton J. Davisson and Lester H. Germer, who observed DIFFRACTION of a beam of electrons. Two different formulations of quantum mechanics were presented following de Broglie's suggestion. The wave mechanics of Erwin SCHRÖDINGER (1926) involves the use of a mathematical entity, the wave function, which is related to the probability of finding a particle at a given point in space. The matrix mechanics of Werner HEISENBERG (1925) makes no mention of wave functions or similar concepts but was shown to be mathematically equivalent to Schrödinger's theory. Quantum mechanics was combined with the theory of relativity in the formulation of P.A.M. DIRAC (1928), which also predicted the existence of ANTIPARTICLES. A particularly important discovery of the quantum theory is the uncertainty principle, enunciated by Heisenberg in 1927, which places an absolute theoretical limit on the accuracy of certain measurements; as a result, the assumption by earlier scientists that the physical state of a system could be measured exactly and used to predict future states had to be abandoned. Other developments of the theory include quantum statistics, presented in one form by Einstein and S.N. Bose (Bose-Einstein statistics, which apply to BOSONS) and in another by Dirac and Enrico FERMI (Fermi-Dirac statistics, which apply to FERMIONS); quantum electronics, which deals with interactions involving quantum energy levels and resonance, as in LASERS; quantum gravitation, the quantum theory of gravitational fields; and quantum field theory. In quantum field theory, interactions between particles result from the exchange of quanta: electromagnetic forces arise from the exchange of PHOTONS, weak nuclear forces (see WEAK INTERACTION) from the exchange of W AND Z PARTICLES, strong nuclear forces (see STRONG INTERACTION) from the exchange of gluons, and GRAVITATION from the exchange of gravitons. See also QUANTUM ELECTRODYNAMICS; QUANTUM CHROMODYNAMICS.

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים - תכנית כללית.

1. [illegible] חלקיק בתוך אוסצילטור הרמוני
2. אוילר לגרנז', תנאי תשלון, Brachistochrone, אלא אנזיפרמטרי
3. F=ma; משפט נטר, משוואות המילטון
4. מכניקה המילטוניאנית, סוגרי פואסון.
5. גיאומטריה סימפלקטית
6. מקוונטיזציה ע״י [illegible] ואינטגרציה על מסלולים לקוואנטי. קוונטית.
7. הסתברות קוונטית
8. משפט וון-נוימן.
9. האוסצילטור ההרמוני
10. הצגות של SO(3)
11. הצגות של SU(2), ספין, וכו'.
12. תבניות דיפרנציאליות ומשוואות מקסוול.
13. ת״פ ות״צ.

מכניקה קלסית וקוואנטית למתמטיקאים [illegible] 1994

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -iH\Psi \qquad H = -\frac{1}{2}\Delta + V$$



$$\left(e^{i\frac{t}{2}\Delta}\psi\right)(x) = c \cdot \int dx' e^{i\frac{(x-x')^2}{2t}} \Psi(x')$$

שפל

Disclaimer

Requiring the action to be stationary leads to the generalized Euler-Lagrange equations

copied from Itzykson-Zuber

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi_i(x)} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial \varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial [\partial_\mu \varphi_i(x)]} = 0 \tag{1-44}$$

[illegible] מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים 24 לאוקטובר 1996

הערות: זמן ל- 5-4 תלמידים. הסתברות לנוכחות: $1-e^{-(\frac{\text{שעה}}{\text{הקורס}}-8:00)}$

״פיסיקה = מבוא < ∞ משתנים״. היום מעבר של חשבון דיפרנציאלי:

הבעיה הקלסית - מינימיזציה.

(חוו׳ Gelfand-Fomin)

$$y \longmapsto J(y)=\int_a^b F(x,y,y')\,dx$$

מצאו מינימום של $J(y)$, כב״ל תחת מגבלות.

דוגמה: קוו מתח בגובה: $F=\int_a^b my\sqrt{1+y'^2}\,dx$; $l=\int\sqrt{1+y'^2}dx$ $y(a)=A$ $y(b)=B$

נניח המגבלות הן $y(a)=A$ $y(b)=B$ בלבד.

משוואת אוילר - לגרנז׳: (הוכ׳: הוספת ϵh עם $0=h(a)=h(b)$)

$$F_y-\frac{d}{dx}F_{y'}=0$$ (משוואה מסדר שני!)

דוגמה: $F(y)=\frac{1}{2}my'^2-V(y)$ ⇐ $ma=-V'(y)$ ⇐ ניוטון.

הנחות: F לא תלוי ב-y: $F_{y'}=$ קבוע

F לא תלויה ב-y': $0=F_y$

F לא תלויה ב-x:

$$0=F_y-(F_{y'})'=F_y-F_{y'y}\cdot y'-F_{y'y'}y'' \quad /\cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(F-y'F_{y'}\right)=y'F_y-F_{y'y}y'^2-F_{y'y'}y''y'=0$$

⇐ $F-y'F_{y'}=0$ משוואה מסדר ראשון.

דוגמה: קוו מתח גבוה לדוגמה: $y\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}}=c$

⇐ $y'=\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2-1}$ (פונק׳ אני כי טריגונומטריות!)

⇐ $y=c\cdot\cosh\frac{x-c'}{c}$ (רצוני שעוד יכולים לראות!)

כפלי לגרנז׳: אנחנו מחפשים מקס של $f(x,y)$ עם האילוץ $g(x,y)=0$

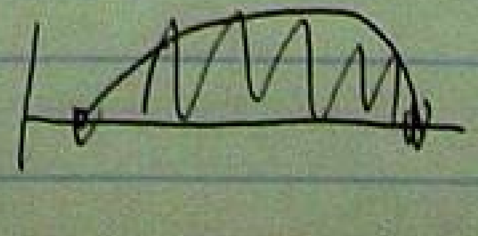
הדרך הטיפשית: הצבה.

והדרך החכמה: $h_\lambda=f+\lambda g$ ואז $\nabla h_\lambda=0$, $g(x,y)=0$

דוגמה: שלב בהוכחת האי״ש האיזופרימטרי:

$J=\int_a^b y\,dx$

$G=\int\sqrt{1+y'^2}dx=l$



⇐ $F^\lambda=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$

מגדיר נגזרת E-L של מפורשות:

$$0=F^\lambda_y-\frac{d}{dx}F^\lambda_{y'}=1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

⇐ זב שני

$$0 = 1 - \lambda \frac{d}{dx} \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c_1$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}}$$

$$y = c_2 - \sqrt{\lambda^2 - (x-c_1)^2}$$

$$(x-c_1)^2 + (y-c_2)^2 = \lambda^2$$

!

24/10/96
וגם 28/3/99

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים, תרגיל מס' 1.

1. מצאו/י אוסף של אופרטורים $F_t: L^2(\mathbb{R}) \to$ המקיים $F_{t_1+t_2}=F_{t_1}\circ F_{t_2}$, $F_0=I$, וכן

$$F_{\frac{\pi}{2}} = \text{טרנספורם פוריה.}$$

2. חקרו/י את הפונקציונלים הבאים (כלו', מצאו/י נק' אקסטרמום)

א. $y \mapsto \int_0^1 y' dx$ $\quad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ב. $y \mapsto \int_0^1 yy' dx$ $\quad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ג. $y \mapsto \int_0^1 xyy' dx$ $\quad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ד. $y \mapsto \int_a^b y'^2/x^3 \, dx$

ה. $y \mapsto \int_a^b (y^2+y'^2+2ye^x) dx$

ו. $y \mapsto \int_0^1 (y'^2+x^2) dx$ תחת $\int_0^1 y^2 dx=2$ $\quad y(0)=0 \quad y(1)=1$

3. פתרו/י את בעיית קו המתח הגבוה, אם אורך הכבל קבוע מראש.

4. (אוילר לגרנז' בתרי מימדים) יהי D^2 דיסק היחידה במישור, תהי S^1 שפתו, ותהי $\gamma: S^1\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה. מבין כל המשטחים ב-$\mathbb{R}^3$ הנתונים ע"י הגרף של פונקציה $y: D^2\to\mathbb{R}$ המקיימת $y|_{S^1}=\gamma$, איזהו/ בעל השטח הקטן ביותר? רשמו/י את המשוואה ש-y צריכה לקיים, אולם אל תנסו/י לפתור אותה.

זוהי בעיית הסבון!

לזכר 30 שני I.

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים 30 לאוקטובר 1996

נושאי היום: תורה מינימלית, משפט נתר: מוטו, דוגמאות, אינטואיציה, ניסוח, דוגמאות, הוכחה, הכללה.

מוטו: סימטריות ⟷ חוקי שימור.

דוגמאות: סימטריה סיבובית ⟷ תנע זוויתי, הזזות ⟷ תנע, זמן ⟷ אנרגיה

אינטואיציה

מעבר לסימונים יותר פיזיקליים: $x\mapsto t$, $y\mapsto q_i$, $y'\mapsto \dot q_i$, $J\mapsto S$, E-L: $F_{q_i}-\frac{d}{dt}F_{\dot q_i}=0\ \forall i$

וכן נניח ~ מספר פונקציות.

טרנספורמציה: $q_i \longmapsto q_i^* = Q_i(\epsilon, t, q_i, \dot q_i, \dots)$

$t \longmapsto t^* = T(\epsilon, t, q_i, \dot q_i, \dots)$

$\tilde q \mapsto q_i^* = \tilde q_i^*(t^*)$

נדרוש שב-$\epsilon=0$, $q_i^*=q_i$ ו-$t_i^*=t_i$

משפט: אם S אינווריאנטי תחת הטרנס', אז $\sum p_i \frac{\partial Q_i}{\partial \epsilon} - H\frac{\partial T}{\partial \epsilon}\Big|_{\epsilon=0}$ הוא גודל שמור, כאשר $p_i = F_{\dot q_i}$, $H=\sum \dot q_i p_i - F$

דוגמאות: $T=t+\epsilon$, $Q=q$ $\Leftarrow$ H שמור "חוק שימור האנרגיה"

$T=t$, $Q_i=q_i+\epsilon$, $Q_j=q_j$ $\Leftarrow$ p_i שמור "חוק שימור התנע"

בשני המקרים הללו דוגמת $\frac{1}{2}m\dot q^2 - V(q)$

$$\begin{pmatrix} q_1^* \\ q_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\epsilon & -\sin\epsilon \\ \sin\epsilon & \cos\epsilon \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \Leftarrow$$

$-p_1q_2+p_2q_1$ שמור ("שימור התנע הזוויתי")

הוכחת המשפט:

$$0=\frac{\partial}{\partial\epsilon}S=\frac{\partial}{\partial\epsilon}\int_{t_0^*}^{t_1^*}F(t,\tilde q_i^*,\dot{\tilde q}_i^*)\,dt\Big|_{\epsilon=0}=$$

(סדר הפוך)

$$=F(t,\tilde q_i^*(t),\dot{\tilde q}_i^*(t))\frac{\partial T}{\partial\epsilon}\Big|_{t_0}^{t_1}+\int_{t_0}^{t_1}\sum_i\left(F_{q_i}\frac{\partial\tilde q_i^*}{\partial\epsilon}+F_{\dot q_i}\left(\frac{\partial\tilde q_i^*}{\partial\epsilon}\right)'\right)=$$

$$=E\text{-}L+\left[F\frac{\partial T}{\partial\epsilon}+\sum_i F_{\dot q_i}\frac{\partial\tilde q_i}{\partial\epsilon}\right]_{t_0}^{t_1}=$$

נמצא את $\partial\tilde q_i/\partial\epsilon$:

$$q_i^*=\tilde q_i^*(t^*) \Longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial\epsilon}=\frac{\partial\tilde q_i}{\partial\epsilon}+\dot q_i\frac{\partial T}{\partial\epsilon}$$

$$\Longrightarrow \frac{\partial\tilde q_i}{\partial\epsilon}=\frac{\partial Q}{\partial\epsilon}-\dot q_i\frac{\partial T}{\partial\epsilon}$$

$$=\left[\left(F-\sum p_i\dot q_i\right)\frac{\partial T}{\partial\epsilon}+\sum_i p_i\frac{\partial Q}{\partial\epsilon}\right]_{t_0}^{t_1}$$

Q.E.D

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים 7 לנובמבר 1996

החלפת משתנים בין אוקלידי לפולרי?
חלק א': $u(x,y)$ $r=x^2+y^2$
מה זה לפולרי u_r?
(בעליך החשבון הזה ומרחבים?)
חלק ב': הגדרה מקומית u_r, ...

נניח עבור מערכת שהמשתנים הלגרנז'יים הם q_i

$p_i = F_{\dot q_i}$ (המומנט הצמוד ל-q_i)

<u>משפט</u> למשתנים $\{q_i, p_i\}$ משוואות E-L שקולות ל-

$$\dot q = \frac{\partial H}{\partial p} \qquad \dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$$

כאשר

$$H = \sum \dot q_i p_i - F$$

<u>דוגמא</u> $F=\frac{1}{2}\dot q^2-\frac{1}{2}q^2 \Rightarrow p=\dot q \Rightarrow H=\frac{1}{2}(p^2+q^2) \Rightarrow \dot q = p,\ \dot p=-q \Rightarrow \begin{pmatrix} q \\ p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\sin\\ \cos\end{pmatrix}$

<u>תזכורת גזירה:</u> df: פונקציונל על וקטורים משיקים.

$$df=\sum \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

<u>הוכחת המשפט</u>: נגזור קודם:

$$\sum \frac{\partial H}{\partial p_i}dp_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}dq_i = dH = \sum \dot q_i dp_i + p_i d\dot q_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}dq_i - \frac{\partial F}{\partial \dot q_i}d\dot q_i$$

$$= \sum \dot q_i dp_i - \frac{\partial F}{\partial q_i}dq_i$$

$\Rightarrow \dot q_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$ וכן $-\dot p_i = \frac{\partial H}{\partial q_i}$

תכונות קל?:
1. $\frac{df}{dt}=\{F,H\}$ ($\frac{\partial F}{\partial t}=0$)
2. $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$
3. ליניארי
4. AS
5. לייבניץ
6. יעקובי

<u>נסמן</u>: F על מרחב המצבים.

<u>סוגרי פואסון</u>:

$$\{f,g\}=\sum \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial g}{\partial q_i}$$

<u>משפט</u> כל שווי-ערך רצינו לדעת על מכניקה מקודד ב-H וסוגרי פואסון:

1. $\frac{df}{dt}=\frac{\partial F}{\partial t}+\{F,H\}$ ~~...~~
2. $\{H,H\}=0$
3. לכן H קבוע בזמן $0=\frac{dH}{dt}$ (א. זה לא טריוויאלי ב. זהו חוק שימור האנרגיה)

תרגיל: $\{q_i,p_j\}=\delta_{ij}$

<u>משפט</u> 1. ליניאריות 2. א"ס 3. לייבניץ 4. זהות יעקובי.

<u>משפט</u> 5. הפוך חלקי למשפט נתר: גודל שמור $\Rightarrow$ סימטריה.

<u>הוכחה</u> $\{I,H\}=0 \Rightarrow \{\{F,I\},H\}=\{\{F,H\},I\}$

<u>הערה</u> לתלמידי המתמטיקה: ... את תכונות 2-5!

קוונטיזציה קנונית: (הגדרה מתמטית, לא אינטואיטיבית) $\{\,,\} \to \frac{1}{i\hbar}[\,,]$

משפט פון-נוימן: $[Q,P]=i\hbar I \Rightarrow L^2$, $Q=\hat x$, $P=-i\hbar\frac{d}{dx}$

$\Rightarrow H=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2}+V(x)$

$$i\hbar\frac{dF}{dt}=[F,H] \Rightarrow F(t)=e^{-i\hbar tH}F(0)e^{i\hbar tH} \Rightarrow \psi_t=e^{-i\hbar tH}\psi_0$$

$\Rightarrow \frac{d\psi_t}{dt}=-i\hbar H\psi_t$ — משוואת שרדינגר!

PROBLEMS

1. Use the canonical Euler equations to find the extremals of the functional

$$\int \sqrt{x^2 + y^2}\,\sqrt{1 + y'^2}\,dx,$$

and verify that they agree with those found in Chap. 1, Prob. 22.

Hint. The Hamiltonian is

$$H(x, y, p) = -\sqrt{x^2 + y^2 - p^2},$$

and the corresponding canonical system

$$\frac{dp}{dx} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{p}{\sqrt{x^2 + y^2 - p^2}}$$

has the first integral

$$p^2 - y^2 = C^2,$$

where C is a constant.

2. Consider the action functional

$$J[x] = \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} (m\dot{x}^2 - \varkappa x^2)\,dt$$

corresponding to a *simple harmonic oscillator*, i.e., a particle of mass m acted upon by a restoring force $-\varkappa x$ (cf. Sec. 36.2). Write the canonical system of Euler equations corresponding to $J[x]$, and interpret them. Calculate the Poisson brackets $[x, p]$, $[x, H]$ and $[p, H]$. Is p a first integral of the canonical Euler equations?

3. Use the principle of least action to give a variational formulation of the problem of the plane motion of a particle of mass m attracted to the origin of coordinates by a force inversely proportional to the square of its distance from the origin. Write the corresponding equations of motion, the Hamiltonian and the canonical system of Euler equations. Calculate the Poisson brackets $[r, p_r]$, $[\theta, p_\theta]$, $[p_r, H]$ and $[p_\theta, H]$, where

$$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, \qquad p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}.$$

Is p_θ a first integral of the canonical Euler equations?

Hint. The action functional is

$$J[r, \theta] = \int_{t_0}^{t_1} \left[\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \frac{k}{r}\right] dt,$$

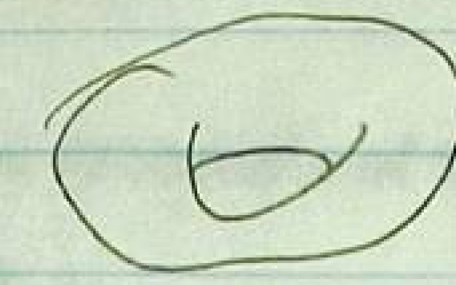
where k is a constant, and r, θ are the polar coordinates of the particle.

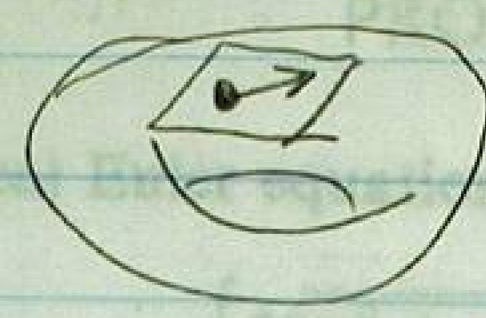
5. Verify that the functional $J[r, \theta]$ of Prob. 3 is invariant under rotations, and use Noether's theorem (in polar coordinates) to find the corresponding conservation law. What geometric fact does this law express?

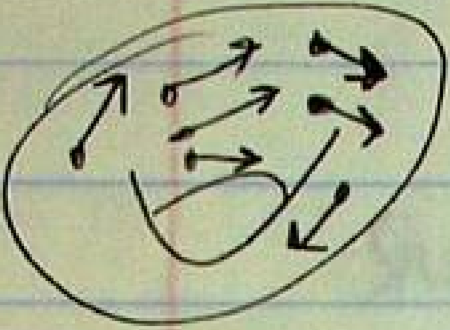
Ans. The line segment joining the particle to the origin sweeps out equal areas in equal times.

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים 1996

כל מה שתמיד רציתם לדעת על תבניות דיפרנציאליות ולא העזתם לשאול

יריעה: 

וקטור משיק: 

שדה וקטורי X: 

כל וקטור גוזר:

$(X,f)\longmapsto Xf =$ הנגזרת הכיוונית של f בכיוון X

הוקטורים הבסיסיים זוכים ליעוד ונקראים על שמו:

$$X=\sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

הסוגר של Lie: $[X,Y]=XY-YX$. לינארי, אנטי-סימטרי, ומקיים יעקובי:

$[X,[Y,Z]]+$ פרמוטציות ציקליות $=0$

שדות וקטוריים מגדירים נגזרות, ולפיכך גוזרים הכל. הסימון: $\mathcal{L}_X$

דוגמאות: $\mathcal{L}_X f=Xf$; $\mathcal{L}_X Y=[X,Y]$

---

k-תבנית: פונקציונל מולטי-לינארי אנטי-סימטרי על k וקטורים בנקודה אחת:

0-תבניות (פונקציות) $\xrightarrow{d}$ 1-תבניות: דואליות לוקטורים $\xrightarrow{d}$ 2-תבנית $W(X,Y)$ $\xrightarrow{d}$ 3-תבניות $\xrightarrow{d}$ n-תבנית

(i_X בכיוון ההפוך; $\mathcal{L}_X$ על כל אחת; על 0-תבניות $\mathcal{L}_X=X$)

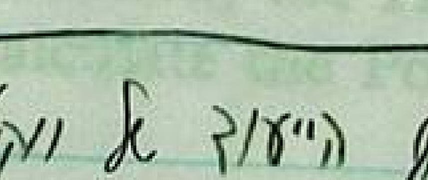
המכפלה הפנימית: $(i_X w)(Y_1\dots Y_{n-1})=w(X,Y_1\dots Y_{n-1})$

המכפלה החיצונית: $(w\wedge\eta)(Y_1,\dots,Y_{m+n})=\sum_{\sigma\in S_{n+m}} w(Y_{\sigma 1},\dots,Y_{\sigma m})\,\eta(Y_{\sigma(m+1)}\dots Y_{\sigma(m+n)})$

הנגזרה החיצונית: $dw=\sum dx_i\wedge\frac{\partial w}{\partial x_i}$; $d^2=0$

אם היעוד של וקטורים הוא לגזור, היעוד של תבניות הוא להתאינטגרל:

$\int_D dw=\int_{\partial D} w$ משפט סטוקס

$\int_D w=\sum$ 

ובעולמנו אנו:

{0-תבניות F} $\xrightarrow{d}$ {1-תבניות $g_1dx_1+g_2dx_2+g_3dx_3$} $\xrightarrow{d}$ {2-תבניות $h_1dx_2\wedge dx_3+$ פרמוטציות ציקליות} $\xrightarrow{d}$ {3-תבניות $k\,dx_1\wedge dx_2\wedge dx_3$}

$\updownarrow$

{פונקציות $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$} $\xrightarrow{grad}$ {שדות וקטוריים (g_1,g_2,g_3)} $\xrightarrow{curl}$ {שדות וקטוריים (h_1,h_2,h_3)} $\xrightarrow{div}$ {פונקציות k}

grad — סטוקס: המשפט היסודי של חדו״א

curl — סטוקס: משפט סטוקס

div — סטוקס: משפט הדיברגנס.

דרור בר-נתן

והעיקר - לא לפחד כלל

מכניקה קלאסית וקוונטית (מתמטיקה) 14 נובמבר 1996

חזרה על תבניות דיפרנציאליות.

גיאומטריה סימפלקטית:

W: תבנית סגורה ולא מנוונת ($dW=0$)

דוגמאות: 1. $\mathbb{R}^{2n}$, $\sum dp_i dq_i$

2. כל תבנית לא מנוונת על S^2.

3. דוגמאות קלסיות בתורת ההצגות, [illegible] מתלקות(?) וגיאומטריה אלגברית.

$f \mapsto X_f$ ע"י: $i_{X_f} W = -df$

דוגמאות: 1. $\mathbb{R}^{2n}$, $\sum dp_i dq_i$

2. z על S^2:

$$-dz = i_{\alpha\partial_x+\beta\partial_y+\gamma\partial_z}(x\,dy\wedge dz+\dots) = \begin{matrix}(\gamma y-\beta z)dx+\\(\alpha z-\gamma x)dy+\\(\beta x-\alpha y)dz\end{matrix} = \begin{matrix}+xz\,dx\\+yz\,dy\\-(1-z^2)dz\end{matrix}$$

& $V\cdot P=0$ $\Rightarrow \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-y\\ +x\\ 0\end{pmatrix}$

הגדרה: $\{f,g\} = W(X_f, X_g) = X_f g$

משפט: 1. $\{\ ,\ \}$ בילינארי, אנטי-סימטרי, מקיים לייבניץ ויעקובי.

2. X_f שומר את W ואת $\frac{W^n}{n!}$.

3. X שומר על W $\Leftarrow$ במקום קיימת f עם $X = X_f$

3. $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$

תרגיל מס' 3: 1. חשב סוגרי פואסון בזוגות של x,y,z על S^2

2. הוכח את המשפט. 1. לינאריות: [illegible] כלל.

2. לייבניץ: על $\mathbb{R}^{2n}$.

מכניקה קלאסית קוונטית למתמטיקאים, 12 לנובמבר 1996

3 שעורים: מקסוול/ת״פ, הסתברות קוונטית, קוונטיזציה; 3× מילואים, 3× תרגיל + השלמות.

עוד על תבניות:
1. תזכורת Stokes
2. הלמה של פואנקרה $I = P\circ d + d\circ P$ (משל 12/20)
3. תרגיל: הוכחו $\mathcal{L}_X = d\circ i_X + i_X\circ d$
4. אינטגרציה בחלקים $\int \sigma\wedge d\omega = -(-1)^{\deg \omega}\int d\sigma\wedge\omega$ (על משטח נטול שפה)
5. האופרטור $*$: $\omega\wedge(*\omega) = \|\omega\|^2 dx^1\wedge\dots\wedge dx^n$

מקיים $\omega\wedge *\sigma = \sigma\wedge *\omega$ עבור σ,ω מאותה דרגה.

משוואות מקסוול:

A: 1-תבנית על $\mathbb{R}^4_{t,x,y,z}$

$$S(A) = \int_{\mathbb{R}^4} \tfrac{1}{2}\|dA\|^2 + J\wedge A$$

(J נתונה)

הנחה: מחפשים את המסלול ... מינימום, ושאלתנו אם יהיה יחיד.

אוילר לגרנז': $d*dA = J$ $\Leftarrow$ א. תנאי $dJ=0$

ב. כדאי לעבור ל- $F=dA$

$\Leftarrow$ $dF=0$; $d*F=J$ אלה הן משוואות מקסוול!

נרשום:

$F = E_x dx\wedge dt + E_y dy\wedge dt + E_z dz\wedge dt + B_x dy\wedge dz + \dots$

$J = \rho\, dx\wedge dy\wedge dz - j_x dy\wedge dz\wedge dt - \dots$

$dJ=0$ $\Leftarrow$ חוק שימור המטען.

$$dF = \begin{cases} dx\,dy\,dz & \partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z \\ dy\,dz\,dt & \partial_y E_z - \partial_z E_y + \partial_t B_x \\ \vdots \end{cases}$$

$\operatorname{div} B = 0$ — אין מונופולים מגנטיים.

$\operatorname{curl} E = -\frac{\partial B}{\partial t}$ — כבמנועים גנרטורים

$*F = -B_x dx\wedge dt - B_y dy\wedge dt \dots - E_x dy\wedge dz + \dots$

$$d*F = J \Rightarrow \begin{cases} -\operatorname{div} E = \rho & \text{זרמי אלקטרוסטטיקה!} \\ \operatorname{curl} B = -\frac{\partial E}{\partial t} + j & \text{כמו מנוע [illegible]} \end{cases}$$

(האיבר $\frac{\partial E}{\partial t}$: תרומת של מקסוול, [illegible])

איך? יצאה משוואה אלגנטית. היא שלנו. שכחנו את איינשטיין.

חלקיק בודד ב-E-M: $ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$

$$S = \int_{q_1}^{q_2} mc\,ds + eA = mc\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-v^2/c^2}\,dt + e(A_t + A_x\dot x + A_y\dot y + A_z\dot z)\,dt$$

$ds = c\cdot dt\sqrt{1-v^2/c^2}$, $v = \frac{dq}{dt}$

($E = mc^2$; $E = p\dot q - F = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; $p = \frac{\partial F}{\partial \dot x} = \frac{m\dot x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (בהעדר $e=0$))

משוואות E-L:

$$\partial_x A_t + (\partial_x A_x)\dot x + \partial_x A_y\dot y + \partial_x A_z\dot z = \left(\frac{\dot x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right)'$$

The Feynman Lectures on Physics, Vol II.

Table 18–1 Classical Physics

Maxwell's equations

I. $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \dfrac{\rho}{\epsilon_0}$ (Flux of $\boldsymbol{E}$ through a closed surface) = (Charge inside)/ϵ_0

II. $\nabla \times \boldsymbol{E} = -\dfrac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}$ (Line integral of $\boldsymbol{E}$ around a loop) = $-\dfrac{d}{dt}$ (Flux of $\boldsymbol{B}$ through the loop)

III. $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0$ (Flux of $\boldsymbol{B}$ through a closed surface) = 0

IV. $c^2\nabla \times \boldsymbol{B} = \dfrac{\boldsymbol{j}}{\epsilon_0} + \dfrac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}$ c^2(Integral of $\boldsymbol{B}$ around a loop) = (Current through the loop)/ϵ_0 + $\dfrac{\partial}{\partial t}$ (Flux of $\boldsymbol{E}$ through the loop)

[Conservation of charge

$\nabla \cdot \boldsymbol{j} = -\dfrac{\partial \rho}{\partial t}$ (Flux of current through a closed surface) = $-\dfrac{\partial}{\partial t}$ (Charge inside)]

Force law

$$\boldsymbol{F} = q(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B})$$

Law of motion

$$\frac{d}{dt}(\boldsymbol{p}) = \boldsymbol{F}, \quad \text{where} \quad \boldsymbol{p} = \frac{m\boldsymbol{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$ (Newton's law, with Einstein's modification)

Gravitation

$$\boldsymbol{F} = -G\,\frac{m_1 m_2}{r^2}\,\boldsymbol{e}_r$$

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים תרגיל מס' 3.

1. חשב/י $\{x,y\}$, $\{y,z\}$ ו-$\{z,x\}$ על S^2.

2. הוכח/י שעל תבניות דיפרנציאליות מתקיים:

$$\mathcal{L}_X = i_X \circ d + d \circ i_X$$

3. הוכח/י שסוגרי פואסון על יריעה סימפלקטית מקיימים:

א. $\{,\}$ בילינארי, אנטי סימטרי, ומקיים את זהות יעקובי(*)

ב. אם ω היא התבנית הסימפלקטית ו-X_f שדה הווקטורים המתאים לפונקציה f, אזי $\mathcal{L}_{X_f}\omega = 0$ וכן $\mathcal{L}_{X_f}\frac{\omega^n}{n!} = 0$.

(*)ב2. אם $\mathcal{L}_X\omega = 0$ וכל תבנית סגורה היא מדויקת, אזי קיימת פונקציה f שעבורה $X = X_f$

(*)ג. $X_{\{f,g\}} = [X_f, X_g]$

(*) - תרגיל קשה

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים, תרגיל מס' 4.

1. טרנספורמצית לורנץ היא טרנספורמציה לינארית
של $\mathbb{R}^4_{t,x,y,z}$ ששומרת את התבנית $x^2+y^2+z^2-t^2$;
למשל,

$$\begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \cosh\mu & \sinh\mu & 0 & 0 \\ \sinh\mu & \cosh\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

מצא/י איך טרנספורמציה כזו פועלת על השדה
החשמלי E ועל השדה המגנטי B.

2. בטא/י את הפעולה $S=\int \|dA\|^2$ בעזרת השדות E,B.

3(*). אלמנט האורך היחסותי ds מקיים $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2-c^2dt^2$
(עד עכשיו לקחנו $c=1$, מטעמי נוחות), כלומר
$ds=c\cdot\sqrt{1-v^2/c^2}\,dt$ כאשר $v^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2$.
הפעולה המתאימה לחלקיק יחסותי חופשי ב-$\mathbb{R}^4$ בנוכחות
שדה אלקטרו-מגנטי היא

$$S = mc\int_{\text{מסלול החלקיק}} ds + eA$$

(כאשר e הוא מטען החלקיק)

הסק/י:

א. אם $e=0$, $P_x=\dfrac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ התנע המצומד ל-x.

ב. אם $e=0$, $\text{Energy}=H=\dfrac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ (נוסחה זו מוכרת יותר כאשר $v=0$)

ג. משוואות התנועה: $\dfrac{dp}{dt}=e(E+v\times B)$

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים 28/11/96

מכניקה קוונטית היא תורה הסתברותית. רוצים קודם להגדיר מהות ההסתברות:

<u>הגדרה</u>: עולם הסתברותי:

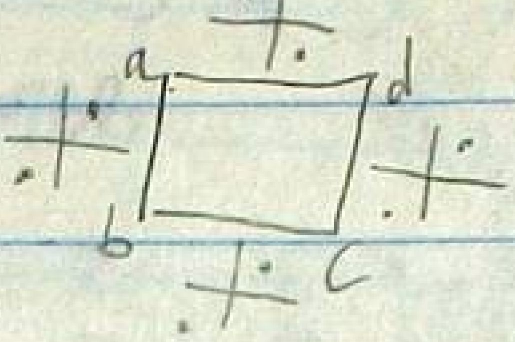
$(X, \mathcal{A}, \mu_A ; A \in \mathcal{A})$ X קבוצה ("קבוצת הגדלים")

$\mathcal{A} \subset 2^X$ מכיל את כל הסינגלטונים ומונוטונית

($A \subset \mathcal{A} \Rightarrow$ את הגדלים ב-A ניתן למדוד יחד)

μ_A מידת הסתברות על $\mathbb{R}^A$ עם התכונה $\pi^B_A \mu_B = \mu_A$

<u>דוגמא</u> גדלים הופכים:



<u>תורת ההסתברות הקלאסית</u>: הגדרה הזו התורה. מקבל להכריח שתורה פיזיקלית תהא כזו כדי התנאים שמספקים לכל הניסויים.

<u>תורת ההסתברות הקלאסית</u>: (Ω, μ); לכל $a \in X$ יש מ"מ $a: \Omega \to \mathbb{R}$ ולכן $A: \Omega \to \mathbb{R}^A$

$$\mu_A = A\mu$$

זה שקול לתנאי "קיימת מידה המתאימה לכל הקבוצות" $X \in \mathcal{A}$.

כיוון אחד ניקח $\Omega = \mathbb{R}^X, \mu = \mu_X$. כיוון שני: מיידי.

הגדלים המופיעים אינם עולם קלאסי

<u>הסתברות קוונטית סופית</u>: $(\mathcal{H}, \|v\|=1)$ לכל $a \in X$ יש אופרטור צמוד לעצמו $a \in \mathcal{A}$

לכל a מתאימה "מידה ספקטרלית" P_a שערכיה הטלות:

$P_a(I) =$ (הטלה על המרחבים העצמיים של a שערכיהם העצמיים ב-I)

אם a, b, c מתחלפים בזוגות, אז כך גם $P_a(I)$, $P_b(J)$ ו- $P_c(K)$

ומגדירים מידה על $\mathbb{R}^{\{a,b,c\}}$: $P_{\{a,b,c\}}(I \times J \times K) = P_a(I) P_b(J) P_c(K)$ שערכיה הטלות.

(הטלה על המרחבים העצמיים המשותפים $dP_{\lambda\mu\eta} = \{u \in \mathcal{H}: au = \lambda u, bu = \mu u, cu = \eta u\}$ עם $(\lambda,\mu,\eta) \in I \times J \times K$)

ולבסוף מגדירים $\mu_{\{a,b,c\}}(I \times J \times K) = \|P_{\{a,b,c\}}(I \times J \times K) v\|^2$ מקיים פיתגורס $\Leftarrow$ זו מידת הסתברות.

<u>טענה</u>: אם p פולינום על $\mathbb{R}^{\{a,b,c\}}$, אזי $E_{\mu_{\{a,b,c\}}}(p) = \langle v, p(a,b,c) v \rangle$

(כמו $E(a) = \langle v, av \rangle$, $V(a) = \langle v, a^2 v \rangle - \langle v, av \rangle^2$)

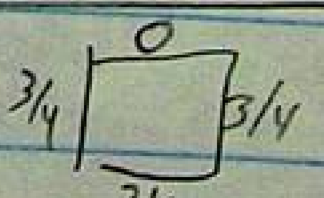
$LHS = \sum_i K v, u_i \rangle^2$

$RHS =$ same

אז ההגדרה אלגנטית?

<u>הוכחה</u>: ניקח u_i בסיס אורתונורמלי של $\mathcal{H}$ כך ש $au_i = \lambda_i u_i$, $bu_i = \mu_i u_i$, $cu_i = \eta_i u_i$

<u>דוגמא</u>



זו עולם קוונטי? הוכחה: ראו דף התרגיל.

<u>משפט</u>: $\{$עולמות$\} \not\subset \{$עולמות קוונטיים$\} \not\subset \{$עולמות קלאסיים$\}$ [עם ידע אפריורי על הגדלים]

הסתברות קוונטית אינסופית: את $\mathcal{H}$ מחליפים במרחב הילברט

<u>עיקרון אי הוודאות של הייזנברג</u>: $V(a)V(b) \geq \frac{1}{4}|E([a,b])|^2$

Non-Commutative (Quantum) Probability

Classical and Quantum Mechanics for Mathematicians, HUJI 1996

Dror Bar-Natan

Claim: In the quantum probability space $(\mathbf{R}^4, v)$ where v is the unit vector $v = \frac{\sqrt{2}}{2}(0\ 1\ -1\ 0)^T$, one has $p(A = B) = p(B = C) = p(C = D) = \frac{3}{4}$ and $p(D = A) = 0$, where A, B, C, and D are the random variables corresponding to the matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad ; \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

```
Mathematica 2.0 for SPARC
Copyright 1988-91 Wolfram Research, Inc.
 -- Terminal graphics initialized --

In[1]:= v=1/2 Sqrt[2] {0, 1, -1, 0}; q=1/2 Sqrt[3];

In[2]:= A1=DiagonalMatrix[{1, 1, -1, -1}]; A4=DiagonalMatrix[{1, -1, 1, -1}];

In[3]:= A2={{-1/2, q, 0, 0}, {q, 1/2, 0, 0}, {0, 0, -1/2, q}, {0, 0, q, 1/2}};

In[4]:= A3={{-1/2, 0, -q, 0},{0, -1/2, 0, -q},{-q, 0, 1/2, 0},{0, -q, 0, 1/2}};

In[5]:= {Eigenvalues[A1], Eigenvalues[A2], Eigenvalues[A3], Eigenvalues[A4]}

Out[5]= {{1, -1, 1, -1}, {1, -1, 1, -1}, {1, -1, 1, -1}, {1, -1, 1, -1}}

In[6]:= {A1.A2==A2.A1, A2.A3==A3.A2, A3.A4==A4.A3, A4.A1==A1.A4}

Out[6]= {True, True, True, True}

In[7]:= pequal[M1_, M2_]:=1-v.(M1-M2).(M1-M2).v / 4

In[8]:= {pequal[A1,A2], pequal[A2,A3], pequal[A3,A4], pequal[A4,A1]}

         3  3  3
Out[8]= {-, -, -, 0}
         4  4  4
```

More information can be found at N.D. Mermin, Physics Today 39(4) 38 (1985) and D. Bar-Natan, Foundations of Physics 19(1) 97 (1989).

מכניקה קלסית וקוונטית לפילוסופים, נושאים ל- 5-6/12/96

✓ * הצגה של הסתברות קוונטית-ספית

✓ * הסתברות קוונטית אינסופית, אופרטורים צמודים לעצמם לא חסומים.

✓ * קוונטיזציה קנונית, רק עד הכלל יחסי החילוף

✓ * עקרון אי-הוודאות של הייזנברג.

* תנועת חלקיק, הגבול הקלאסי.

✓ * שיחזור מלא כל התוכן של מכניקה קוונטית, בלי שימוש ~~[illegible]~~ במשפט וון-נוימן.

* הבהרה: אין דבר כזה קוונטיזציה "מלאה".

* משפט וון-נוימן ומשוואת שרדינגר.

* תרגום ע"פ פיינמן,

* [illegible] קצת על EPR / Mermin

* קנונית ⇐ אינטגרציה על מסלולים

* ואינטגרציה על מסלולים ⇐ קנונית.

מכניקה קלאסית וקוואנטית למתמטיקאים 5 לדצמבר 1996.

תזכורת: מרחב הסתברות קוואנטי: $\{\mathcal{H}, V, A \subset op(\mathcal{H})\}$, $P(A=\lambda)=\|Proj_{\mathcal{H}_\lambda} V\|^2$,

$E(f(A)) = \langle V, f(A)V\rangle$; התפלגויות משותפות קיימות רק אם $[A,B]=0$

הערה הבחירה של מערכת פיזיקלית היא לא תמיד ברורה; צריך לבחור את "בחירה סטנדרטית של אופרטורים ומרחב מצבים"

דוגמה: $\mathcal{H}=L^2(\mathbb{R})$, $V=\psi$; $\int|\psi|^2=1$; $Q=q\cdot$ כפל ב- ; $P=-i\hbar\frac{d}{dq}$

$\langle\psi, f(Q)\psi\rangle = \int f(q)|\psi|^2 dq$ ⇐ התפלגות Q היא המידה $|\psi(q)|^2 dq$

יהי ~ התמרת פוריה: $\tilde\psi(p)=c\int\psi(q)e^{-\frac{i}{\hbar}p\cdot q}dq$. אז $\widetilde{P\psi}=p\tilde\psi$

ולכן $\langle\psi, f(P)\psi\rangle = \int f(p)|\tilde\psi(p)|^2 dp$ ⇐ התפלגות P היא המידה $|\tilde\psi(p)|^2dp$

מערכת מכנית נקבעת ע"י H, $\{,\}$

קוואנטיזציה קנונית: $\{,\} \Rightarrow \frac{1}{i\hbar}[\ ,\ ]$ עכשיו אתם מבינים!

דוגמא: $\{q,p\}=1 \Rightarrow [Q,P]=i\hbar I \Rightarrow$ "לא אפשרי" השום לשאלה.

משפט: $V(A)=\langle v,A^2v\rangle-\langle v,Av\rangle^2$; $V(A)V(B)\geq\frac14|E[A,B]|^2$

זה עקרון אי-הוודאות של הייזנברג!

בדוגמא שלמעלה, "אי אפשר שגם ψ וגם $\tilde\psi$ תהיינה בעלות תומך צר".

הוכחה: $A'=A-E(A)I$; $B'=B-E(B)B$; ......

דוגמא: $\hbar=1$; $H=\frac12(P^2+Q^2)$. ערכים עצמיים של H הם "אנרגיות". $[P,Q]=-iI$

$[P,H]=-iQ$, $[Q,H]=+iP$ ⇐ cos, sin של P,Q ⇐ כדאי להגדיר

$a=(Q+iP)/\sqrt2$ "אופרטור חיסול"

$a^+=a^*=(Q-iP)/\sqrt2$ "אופרטור יצירה"

מתקיים $[H,a]=-a$; $[H,a^+]=a^+$, $[a,a^+]=I$ (לא נכסיף?)

נגדיר $N=a^+a=H-\frac12 I$ וכן $\mathcal{H}_n=\{\psi: N\psi=n\psi\}$

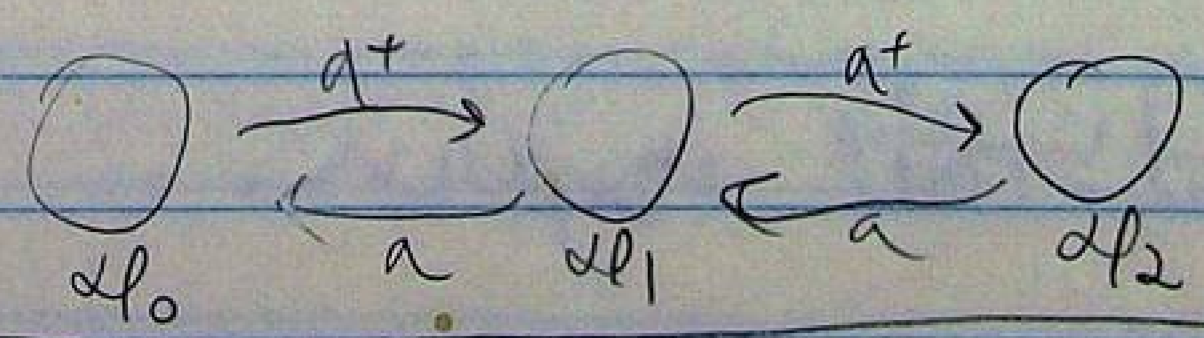
כבר רואים: $n\geq 0$; אנרגיה $\geq\frac12$, לא מתאים לעולם הקלאסי, כן מתאים לעקרון אי-הוודאות!

טענה $a\mathcal{H}_n\subset\mathcal{H}_{n-1}$; $a^+\mathcal{H}_n\subset\mathcal{H}_{n+1}$

$\|a\psi_n\|=\sqrt{n}\|\psi_n\|$ $\|a^+\psi_n\|=\sqrt{n+1}\|\psi_n\|$

הוכחה: ......

מסקנה



בערך "מכניקה קוואנטית"

מה ניתן לומר על מצב היסוד? $a\psi_0=0 \Rightarrow Q\psi_0=-iP\psi_0$. נגדיר $M_n=\langle\psi_0,Q^n\psi_0\rangle$

אז: $M_0=1$; $M_n=\langle Q\psi_0,Q^{n-1}\psi_0\rangle=i\langle P\psi_0,Q^{n-1}\psi_0\rangle=i\langle\psi_0,PQ^{n-1}\psi_0\rangle=-i\langle\psi_0,Q^{n-1}P\psi_0\rangle$

$\Rightarrow M_1=0$; $2M_n=i\langle\psi_0,[P,Q^{n-1}]\psi_0\rangle=(n-1)\langle\psi_0,Q^{n-2}\psi_0\rangle=(n-1)M_{n-2}$

$\Rightarrow M_{2n}=\frac{(2n)!}{4^n n!} \Rightarrow Q$ מתפלג גאוסיאנית עם $\sigma=1/2$: $\frac{1}{\sqrt\pi}e^{-q^2}dq$

ניתן גם לחשב את $M_n(\psi_n)$! מסקנה - מספיק לדעת כיצד נראה ψ_0 ולקבל $\psi_n=\frac{\pi^{-1/4}}{\sqrt{2^n n!}}\left(q-\frac{d}{dq}\right)^n e^{-q^2/2}=\pi^{-1/4}e^{-q^2/2}\cdot H_n(q)$ (פולינום הרמיט)

Quantum Behavior

Note: This chapter is almost exactly the same as Chapter 37 of Volume I.

1–1 Atomic mechanics

"Quantum mechanics" is the description of the behavior of matter and light in all its details and, in particular, of the happenings on an atomic scale. Things on a very small scale behave like nothing that you have any direct experience about. They do not behave like waves, they do not behave like particles, they do not behave like clouds, or billiard balls, or weights on springs, or like anything that you have ever seen.

Newton thought that light was made up of particles, but then it was discovered that it behaves like a wave. Later, however (in the beginning of the twentieth century), it was found that light did indeed sometimes behave like a particle. Historically, the electron, for example, was thought to behave like a particle, and then it was found that in many respects it behaved like a wave. So it really behaves like neither. Now we have given up. We say: "It is like *neither*."

There is one lucky break, however—electrons behave just like light. The quantum behavior of atomic objects (electrons, protons, neutrons, photons, and so on) is the same for all, they are all "particle waves," or whatever you want to call them. So what we learn about the properties of electrons (which we shall use for our examples) will apply also to all "particles," including photons of light.

The gradual accumulation of information about atomic and small-scale behavior during the first quarter of this century, which gave some indications about how small things do behave, produced an increasing confusion which was finally resolved in 1926 and 1927 by Schrödinger, Heisenberg, and Born. They finally obtained a consistent description of the behavior of matter on a small scale. We take up the main features of that description in this chapter.

Because atomic behavior is so unlike ordinary experience, it is very difficult to get used to, and it appears peculiar and mysterious to everyone—both to the novice and to the experienced physicist. Even the experts do not understand it the way they would like to, and it is perfectly reasonable that they should not, because all of direct, human experience and of human intuition applies to large objects. We know how large objects will act, but things on a small scale just do not act that way. So we have to learn about them in a sort of abstract or imaginative fashion and not by connection with our direct experience.

In this chapter we shall tackle immediately the basic element of the mysterious behavior in its most strange form. We choose to examine a phenomenon which is impossible, *absolutely* impossible, to explain in any classical way, and which has in it the heart of quantum mechanics. In reality, it contains the *only* mystery. We cannot make the mystery go away by "explaining" how it works. We will just *tell* you how it works. In telling you how it works we will have told you about the basic peculiarities of all quantum mechanics.

1–2 An experiment with bullets

To try to understand the quantum behavior of electrons, we shall compare and contrast their behavior, in a particular experimental setup, with the more familiar behavior of particles like bullets, and with the behavior of waves like water waves. We consider first the behavior of bullets in the experimental setup shown diagrammatically in Fig. 1–1. We have a machine gun that shoots a stream of bullets. It is not a very good gun, in that it sprays the bullets (randomly) over a fairly large angular spread, as indicated in the figure. In front of the gun we have

a wall (made of armor plate) that has in it two holes just about big enough to let a bullet through. Beyond the wall is a backstop (say a thick wall of wood) which will "absorb" the bullets when they hit it. In front of the wall we have an object which we shall call a "detector" of bullets. It might be a box containing sand. Any bullet that enters the detector will be stopped and accumulated. When we wish, we can empty the box and count the number of bullets that have been caught. The detector can be moved back and forth (in what we will call the x-direction). With this apparatus, we can find out experimentally the answer to the question: "What is the probability that a bullet which passes through the holes in the wall will arrive at the backstop at the distance x from the center?" First, you should realize that we should talk about probability, because we cannot say definitely where any particular bullet will go. A bullet which happens to hit one of the holes may bounce off the edges of the hole, and may end up anywhere at all. By "probability" we mean the chance that the bullet will arrive at the detector, which we can measure by counting the number which arrive at the detector in a certain time and then taking the ratio of this number to the *total* number that hit the backstop during that time. Or, if we assume that the gun always shoots at the same rate during the measurements, the probability we want is just proportional to the number that reach the detector in some standard time interval.

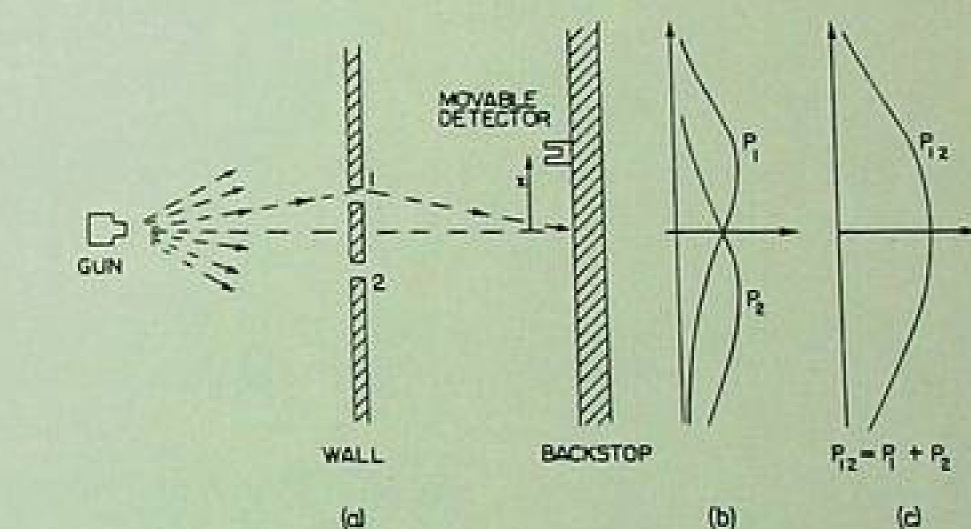


Fig. 1–1. Interference experiment with bullets.

For our present purposes we would like to imagine a somewhat idealized experiment in which the bullets are not real bullets, but are *indestructible* bullets—they cannot break in half. In our experiment we find that bullets always arrive in lumps, and when we find something in the detector, it is always one whole bullet. If the rate at which the machine gun fires is made very low, we find that at any given moment either nothing arrives, or one and only one—exactly one—bullet arrives at the backstop. Also, the size of the lump certainly does not depend on the rate of firing of the gun. We shall say: "Bullets *always* arrive in identical lumps." What we measure with our detector is the probability of arrival of a lump. And we measure the probability as a function of x. The result of such measurements with this apparatus (we have not yet done the experiment, so we are really imagining the result) are plotted in the graph drawn in part (c) of Fig. 1–1. In the graph we plot the probability to the right and x vertically, so that the x-scale fits the diagram of the apparatus. We call the probability P_{12} because the bullets may have come either through hole 1 or through hole 2. You will not be surprised that P_{12} is large near the middle of the graph but gets small if x is very large. You may wonder, however, why P_{12} has its maximum value at $x = 0$. We can understand this fact if we do our experiment again after covering up hole 2, and once more while covering up hole 1. When hole 2 is covered, bullets can pass only through hole 1, and we get the curve marked P_1 in part (b) of the figure. As you would expect, the maximum of P_1 occurs at the value of x which is on a straight line with the gun and hole 1. When hole 1 is closed, we get the symmetric curve P_2 drawn in the figure. P_2 is the probability distribution for bullets that pass through hole 2. Comparing parts (b) and (c) of Fig. 1–1, we find the important result that

$$P_{12} = P_1 + P_2. \tag{1.1}$$

הערה: אין דבר כזה "קוונטיזציה מלאה"

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים 6 לדצמבר 1996

תזכורת: אופרטורים לא חסומים הם דבר רע. למשל התנועה, ראו Reed-Simon chap VIII

דוגמא $P=-i\frac{d}{dq}$ מהו e^{iq_0P} ? $(e^{iq_0P}\psi)(q)=\psi(q+q_0)$ אולי הנחה שגויה

זה בכלל לא ברור שזה נכון!

דוגמא $\frac{d}{dx}$ ו- $\frac{d}{dy}$ מתחלפים, ואז $e^{a\frac{d}{dx}}$ ו- $e^{b\frac{d}{dy}}$ מתחלפים

אבל על $\Sigma=\{$משטח רימן של $\log z\}$ זה לא נכון! (וזו דוגמא טבעית שאין בה מתחלפים)

דוגמא נניח $[P,Q]=-iI$ (יחסי החילוף של הייזנברג)

ונגדיר $U_\alpha=e^{i\alpha P}$ ו- $V_\beta=e^{i\beta Q}$ [הערה: משפט, דוגמא, הוכחה, דוגמא נגדית]

משפט $U_\alpha V_\beta=e^{i\alpha\beta}V_\beta U_\alpha$ (יחסי החילוף של Weyl)

הוכחה חישוב, $U_\alpha QU_{-\alpha}=Q+\alpha I$; ע"י גזירה משני הצדדים ע"פ α. ואז

$U_\alpha V_\beta U_{-\alpha}=\exp(U_\alpha(i\beta Q)U_{-\alpha})=\dots$

דוגמא נגדית $P=-i\frac{d}{dx}$, $Q=x-i\frac{d}{dy}$ על Σ. [המשך הדיון: זה לא קורה.]

עכשיו קבענו את "התמונה של הייזנברג": $\frac{d}{dt}A=-i[A,H]$ $(\mathcal{H},\psi,A(t),B(t),\dots)$

$\Leftarrow$ $A(t)=e^{+itH}A_0e^{-itH}$. (e^{-itH} מוגדר ע"י אנליזה ספקטרלית...)

הערה $(\mathcal{H},V,A,B,\dots)\Longleftrightarrow(\mathcal{H},U^{-1}V,U^{-1}AU,U^{-1}BU,\dots)$ אם U אוניטרי

מסקנה: התמונה של שרדינגר: $(\mathcal{H},\psi_t,A,B\dots)$ עם $\psi_t=e^{-itH}\psi_0$

גוזרים ומקבלים $\frac{d\psi_t}{dt}=-iH\psi_t$: משוואת שרדינגר

דוגמא פתרון $\frac{d\psi}{dt}=-i\left(-\frac12\frac{\partial^2}{\partial q^2}+\frac12q^2\right)\psi$ ב- $t=\frac{\pi}{2}$. זכרו $\psi_n=\frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(q-\frac{\partial}{\partial q}\right)^n e^{-q^2/2}$, $\tilde\psi_n=\sqrt{2^n n!}\,\psi_n$

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}\tilde\psi_n=\mathcal{F}(q-\partial/\partial q)\tilde\psi_{n-1}=-i\left(q-\frac{d}{dq}\right)\mathcal{F}\tilde\psi_{n-1}$

$\Leftarrow$ $\mathcal{F}\psi_n=(-i)^n\psi_n$; מצד שני $e^{-itH}\psi_n=e^{-it(n+1/2)}\psi_n$ וזה אותו הדבר אם $t=\frac{\pi}{2}$

משפט היחידות של Von-Neumann

יהי $(\mathcal{H}_0,U_\alpha,V_\beta)=(L^2(\mathbb{R}),$ הזזה, כפל ב- $e^{i\beta q})$ ותהי מערכת אחרת $(\mathcal{H},U_\alpha,V_\beta)$

המקיימת את יחסי החילוף $(U_\alpha V_\beta=e^{i\alpha\beta}V_\beta U_\alpha)$. אזי קיימים $(\mathcal{H}_n,U_{n\alpha},V_{n\beta})$ כך ש-

$(\mathcal{H},U_\alpha,V_\beta)\cong\bigoplus_{n=1}^{N}(\mathcal{H}_n,U_{n\alpha},V_{n\beta})$ וכל $(\mathcal{H}_n,U_{n\alpha},V_{n\beta})\cong(\mathcal{H}_0,U_\alpha,V_\beta)$

הוכחת Mackey: מיידית מ- $U_\alpha QU_{-\alpha}=Q+\alpha I$, אבל הדרך ארוכה...

הוכחת Von-Neumann: $S(\alpha,\beta)=e^{-\frac{i\alpha\beta}{2}}U_\alpha V_\beta$ ("אוניטרי" ו"מקורי") $E=\frac{1}{2\pi}$"$\iint d\alpha\, d\beta\, e^{-\frac14(\alpha^2+\beta^2)}S(\alpha,\beta)$"

טענות (1) E הטלה נגדית (2) $E\neq0$ (4) $\operatorname{im}E_0=\pi^{-1/4}e^{-q^2/2}$

(3) $\phi,\psi\in\operatorname{im}E$ $\Leftarrow$ $\langle S(\alpha,\beta)\phi,S(\gamma,\delta)\psi\rangle=e^{-\frac14(\alpha-\gamma)^2-\frac14(\beta-\delta)^2+\frac{i}{2}(\beta\gamma-\alpha\delta)}$

המשך ההוכחה: $\{\psi_i\}$ בסיס ל- $E\mathcal{H}$; $\mathcal{H}_i=\overline{\operatorname{span}}\{S(\alpha,\beta)\psi_i\}$; $\mathcal{H}=\bigoplus\mathcal{H}_i$

דרך $\mathcal{H}_i=\mathcal{H}_0$; $\psi_i\mapsto\psi_0$; $S(\alpha,\beta)\psi_i\mapsto S(\alpha,\beta)\psi_0$

משפט 0 $S(\alpha,\beta)S(\gamma,\delta) = e^{i/2(\alpha\delta-\beta\gamma)}\, S(\alpha+\gamma,\beta+\delta)$

משפט 1 $S(a) = \int a(\alpha,\beta)\, S(\alpha,\beta)\, d\alpha\, d\beta$ מוגדר היטב.

משפט 2 $S(a+b) = S(a)+S(b)$, $S(ra) = rS(a)$; $S(a)^* = S(\hat{a})$, $\hat{a}(\alpha,\beta) = \overline{a(-\alpha,-\beta)}$

משפט 3 $S(a)S(\gamma,\delta) = S\left(e^{\frac{i}{2}(\alpha\delta-\beta\gamma)} a(\alpha-\gamma,\beta-\delta)\right)$; $S(\gamma,\delta)S(a) =$ סימן הפוך ב-$\exp$

משפט 4 $S(a)S(b) = S(c)$ כך ש

$$c(\gamma,\delta) = \int d\alpha\, d\beta\, e^{-i/2(\alpha\delta-\beta\gamma)}\, a(\gamma-\alpha,\delta-\beta)\, b(\alpha,\beta)$$

משפט 5 אם $S(a)=0$ אז $a=0$ כ"ת

הוכחה $S(a)=0 \Rightarrow S(-\gamma,-\delta)S(a)S(\gamma,\delta)=0 \Rightarrow$

$$\int d\alpha\, d\beta\, e^{i(\alpha\delta-\beta\gamma)}\, a(\alpha,\beta)\, S(\alpha,\beta) = 0$$

$\Rightarrow$ מטרנספורם פורייה! $a(\alpha,\beta)\, S(\alpha,\beta) = 0$ כ"ת

$\Rightarrow a=0$ כ"ת.

משפט 6 $E = E^* \neq 0$

משפט 7 $E S(\gamma,\delta) E = e^{-\frac{1}{4}(\gamma^2+\delta^2)} E$

משפט 8 $E^2 = E$

משפט 9 אם המרכבים הסקלריים -

הגדרנו את E_0 !

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים, 2 לינואר 1997.

מה עשינו? 1. חלקיק בפוטנציאל הרמוני / חוק אינטגרל של מינימום.

2. אוילר לגרנז' $F_y - (F_{y'})' = 0$ חוקי תנועה, ...

3. סימטריות $\Longleftrightarrow$ חוקי שימור.

4. מכניקה המילטונית $\dot q = \frac{\partial H}{\partial p}$, $\dot p = -\frac{\partial H}{\partial q}$; $\{f,g\} = \sum \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \dots$; $\dot f = \{f, H\}$

5. גאומטריה סימפלקטית 6. משוואות מקסוול.

7. הסתברות: לפעמים לצורך לא יודע את ההתפלגות המסובכת.

$E(F(P,Q)) = \langle v, F(P,Q) v \rangle$ הסתברות קוונטית.

8. קוונטיזציה קנונית. $[P,Q] = -i\hbar I$; $i\hbar \dot A = [A,H]$; $\frac{\partial \psi}{\partial t} = -iH\psi$

עקרון אי-הוודאות.

9. רמות המתנד ההרמוני מימדי הקלאסי כלה. שיעור 1.

מה נעשה? 1. משפט פון-נוימן (יחידות) (קשר לקוונטיזציה).

2. אינטגרל על מסלולים והקשר לקוונטיזציה קנונית ומקרה המינימום.

3. הצגות של $SO(3)$ ו-$SU(2)$, אטום המימן, ספין.

4. ת״ל ות״כ.

ומה בסמסטר הבא: http://tipesh.ma.huji.ac.il ?

$U_\alpha = e^{i\alpha P}$, $V_\beta = e^{i\beta Q}$

יחס הצבירה $[P,Q] = -iI$ $\Longleftrightarrow$ יחס וייל $U_\alpha V_\beta = V_\beta U_\alpha$

<u>משפט פון נוימן:</u> $(\mathcal{H}_0, U_{0\alpha}, V_{0\beta}) = (L^2(\mathbb{R}), \dots)$ ויהי $(\mathcal{H}, U_\alpha, V_\beta)$

שלשה אחרת המקיימת את יחסי התחלופה של וייל. אזי קיימים

$(\mathcal{H}_n, U_{n\alpha}, V_{n\beta})$ כך ש- $(\mathcal{H}, U_\alpha, V_\beta) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} (\mathcal{H}_n, U_{n\alpha}, V_{n\beta})$ ו- $(\mathcal{H}_n, U_{n\alpha}, V_{n\beta}) \cong (\mathcal{H}_0, U_{0\alpha}, V_{0\beta})$

<u>הגדרה</u> $S(\alpha,\beta) = e^{-\frac{i\alpha\beta}{2}} U_\alpha V_\beta$; $E = \frac{1}{2\pi} \text{"} \int d\alpha\, d\beta\, e^{-\frac{1}{4}(\alpha^2+\beta^2)} S(\alpha,\beta) \text{"}$

<u>טענה</u>

1. E הטלה ניצבת

2. $E \neq 0$

3. $\langle \phi, \psi \rangle \;\;\; \phi, \psi \in \operatorname{im} E$; $\langle S(\alpha,\beta)\phi, S(\gamma,\delta)\psi \rangle = e^{-\frac{1}{4}(\alpha-\gamma)^2 - \frac{1}{4}(\beta-\delta)^2 \dots} \langle \phi, \psi \rangle$ [illegible]

4. $\operatorname{im} E_0 = \langle \pi^{-1/4} e^{-q^2/2} \rangle$

הוכחת המשפט מהטענה: $\{\psi_i\}$ בסיס ל-$E\mathcal{H}$; $\mathcal{H}_i = \operatorname{span}\{S(\alpha,\beta)\psi_i\}$

$\mathcal{H} = \bigoplus \mathcal{H}_i$; $\mathcal{H}_i \cong \mathcal{H}_0$ דרך $\psi_i \mapsto \psi_0$, $S(\alpha,\beta)\psi_i \mapsto S(\alpha,\beta)\psi_0$

מכניקה קלאסית וקוונטית לסטטיסטיקאים 9 לינואר 1997

תכנית מחזור: 1. תצפיות על השיעור הראשון: היה נחמד אם היינו יכולים להחליף ויח—
עדיין היסק שלנו לחייב אינטגרציה על מסלולים.

2. דוגמא אם יפה יותר: נתק המכניקה. א. ברור ש צריך אינטגרציה במסלולים.

ב. תיאור דרך תיאור האופציות.

ג. הלגרנז'יאן ה. נגזרת תוך שימוש ב- CCR

ד. יחסי החילוף

3. מסלולים לאופרטורים

4. אינטגרציה גאוסית

5. יחסי החילוף

הלגרנז'יאן: $\frac{1}{2}(\dot{q}-\mu)^2 \Rightarrow P = (\dot{q}-\mu) \Rightarrow [P,Q] = I \Rightarrow [\dot{Q},Q] = \sigma^2 I$

⇐ כאשר q הוא פחות יותר המכניקה. $\int e^{-\frac{1}{2}\mathcal{L}(q)} \mathcal{D}q$

שערי אופציות המעו"ף 6.11.95

מדד מעו"ף : 191.79 | שער ריבית : 15.00% | סטיית תקן : 16.00%

אופציה	שער סגירה	שינוי בשער	שינוי ב%	שער גבוה	שער נמוך	מחזור ביחד	תמורה כספית	פוזיציות פתוחות	שווי B&S	סטייה מ־B&S	סטיית תקן גלומה	DELTA	THETA	VEGA
נוב,001 C	19265	185	1.0	19300	19040	15	288,980	1081	19080	1.0%		100	0	0
נוב,120 C	7550	0	0.0			0	0	91	7267	*		100	-4	0
נוב,170 C	2880	0	0.0			0	0	79	2304	*		100	-7	0
נוב,170 P	18	-12	-40.0	18	18	5	90	1177	0	100.0%	31.9%	0	0	0
נוב,180 C	1500	136	10.0	1540	1360	194	282,510	1940	1317	13.9%	39.2%	98	-8	3
נוב,180 P	50	-19	-27.5	65	50	1165	65,333	5681	6	733.3%	25.1%	-2	-1	2
נוב,190 C	630	120	23.5	640	495	1740	987,170	10067	457	37.9%	27.0%	72	-12	15
נוב,190 P	165	-72	-30.4	230	160	3431	648,825	20798	138	19.6%	17.8%	-28	-4	15
נוב,200 C	140	15	12.0	150	115	3295	429,480	24573	62	125.8%	22.3%	19	-6	11
נוב,200 P	650	-164	-20.1	860	620	1597	1,120,410	17438	735	- 11.6%	%	-81	2	11
נוב,210 C	44	0	0.0	45	39	1594	68,038	24171	2	>1000%	26.9%	2	0	2
נוב,210 P	1570	-213	-11.9	1740	1550	291	478,080	10206	1669	- 5.9%	%	-99	7	1
נוב,220 C	20	4	25.0	20	15	403	6,665	23245	0	100.0%	32.1%	0	0	0
נוב,220 P	2520	-246	-8.9	2700	2520	83	214,060	4958	2659	- 5.2%	%	-100	9	0
נוב,230 C	13	0	0.0	15	13	26	347	19051	0	100.0%	38.2%	0	0	0
נוב,230 P	3668	-111	-2.9	3680	3640	62	226,560	2371	3652	0.4%	39.8%	-100	9	0
ינו,001 C	19165	281	1.5	19180	19000	56	1,069,700	1256	19082	0.4%		100	0	0
ינו,120 C	0	0	*****			0	0	0	7572	*		100	-5	0
ינו,190 C	1224	157	14.7	1270	1110	250	286,700	2775	1052	16.3%	21.5%	74	-8	30
ינו,190 P	330	-61	-15.6	390	300	397	130,830	6121	251	31.5%	18.6%	-26	-1	30
ינו,200 C	658	68	11.5	660	590	668	410,320	6484	501	31.3%	20.3%	49	-7	36
ינו,200 P	700	-160	-18.6	790	690	623	456,450	6983	668	4.8%	16.9%	-52	0	36
ינו,210 C	335	56	20.1	335	290	832	260,135	5956	192	74.5%	20.8%	25	-5	28
ינו,210 P	1424	-106	-6.9	1440	1410	92	130,500	2737	1325	7.5%	19.4%	-75	4	29
ינו,220 C	140	24	20.7	140	125	106	14,470	4480	59	137.3%	20.5%	9	-2	15
ינו,220 P	2158	-82	-3.7	2260	2100	158	341,420	816	2160	- 0.1%	15.9%	-91	6	15
ינו,230 C	60	21	53.8	60	60	2	120	2675	14	328.6%	21.0%	3	0	7
ינו,230 P	3062	-158	-4.9	3180	3040	123	379,260	665	3082	- 0.6%	%	-97	9	7

מקרא: P = PUT ;C = CALL

* – נתון לא רלוונטי

שווי B&S – נוסחה להערכת אופציות על בסיס חמישה משתנים: שער נכס הבסיס (מדד מעו"ף), שער הריבית, מחיר הסיסוש וסטיית התקן של התשואה. כל המשתנים מוצגים על בסיס שנתי.

סטיית תקן גלומה – סטיית התקן אשר בהצבתה בנוסחת B&S נקבל את מחיר הסגירה.

DELTA – שעור השינוי בשווי האופציה הנובע מעליית מדד המעו"ף בנקודה – בהנחה ששאר המשתנים הקובעים את שווי האופציה נשארים קבועים.

THETA – שעור השינוי בשווי האופציה הנובע מקיצור התקופה לסיסוש ביום אחד – בהנחה ששאר המשתנים הקובעים את שווי האופציה נשארים קבועים.

VEGA – שעור השינוי בשווי האופציה הנובע מעליית סטיית התקן באחוז – בהנחה ששאר המשתנים הקובעים את שווי האופציה נשארים קבועים.

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים

האוניברסיטה העברית, אביב 1997

<u>מס' הקורס:</u> 80719.

<u>המרצה:</u> דרור בר-נתן, בנין אינשטיין חדר 309, טלפון 02-658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.ac.il.

<u>שעות קבלה:</u> כל יום, כל היום, אבל רק אם אני פנוי.

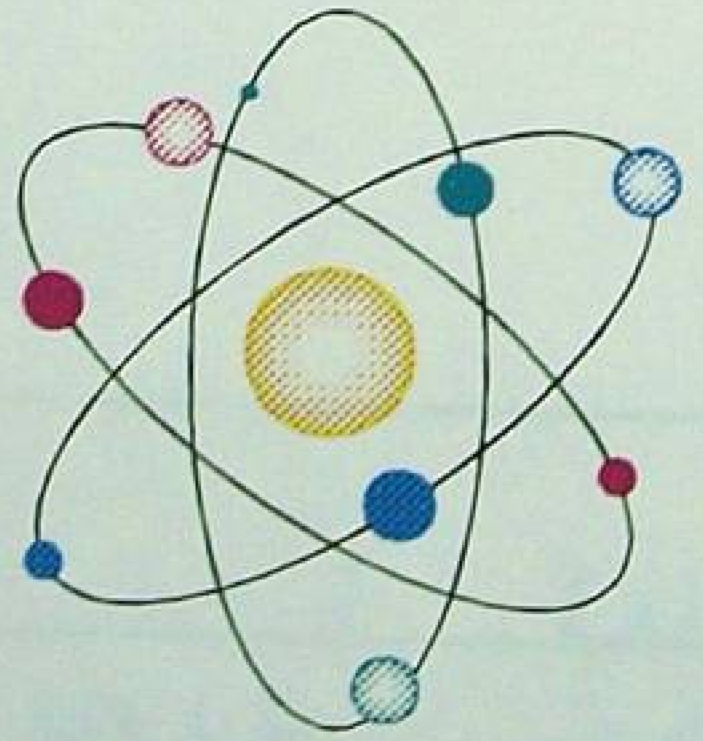
<u>שעות הקורס:</u> ימי רביעי 14:00-16:00 בינתיים. ננסה לשפר ע"פ דרישות הנוכחים ואולי גם לפצל לשתי פגישות שבועיות.

<u>מטרת הקורס:</u> לעזור למתמטיקאים להבין את העקרונות הבסיסיים (והחשובים) ביותר בפיסיקה. השפה תהיה נוחה למתמטיקאים, אולם לא אנסה לשמור על דיוק מתמטי מלא - זו אינה המטרה. הכלי: ננסה להבין עד כמה שניתן את הספקטרום של אטום המימן. אני מקווה שהנושא ישמור עלינו מרוכזים בכיוון אחד, אבל גם יחייב אותנו ללמוד ולהבין את הפיסיקה הרבה שמסביבו.

<u>מטרה משנית:</u> המרצה עצמו רוצה ללמוד את כל הנושאים האלו. חזית הידע שלו כרגע היא מקבילה לחומר הנדרש. אילו היא הייתה ניצבת, היינו במצב חסר סיכוי. אבל כך, כל שנדרש מהמרצה הוא מאמץ נוסף לאורך מספר רב של תחומים מפוזרים היטב בזמן, ויש תקוה.

<u>השיטה:</u> צירוף המטרה העיקרית והמטרה המשנית יחייב הרבה שיתוף פעולה מצד הסטודנטים! ננסה לעקוב ביחד אחרי המאמר Everything You Always Wanted to Know About the Hydrogen Atom (But Were Afraid to Ask) מאת Randal C. Telfer (ראי של אתר האינטרנט של המאמר נמצא ב- http://tipesh.ma.huji.ac.il) וללמוד לאורך הדרך את כל מה שנצטרך ללמוד.

<u>נושאי הלימוד:</u> (תכנית אופטימית) השלמת אינטגרציה על מסלולים מסמסטר א', חשבונות קוואנטיים ישנים ע"פ Bohr, מרכז המסה, קרינה אלקטרומגנטית, פתרון משוואת Schrodinger והקשר עם הצגות של SO(3), חשבונות ספין וחשבונות יחסותיים נאיוויים, משוואת Klein-Gordon ומשוואת Dirac, תורת ההפרעות, דיאגרמות Feynman, תורת Chern-Simons ושמורות של יריעות וקשרים (אם כבר אנחנו כאן) נירמול מחדש, אלקטרודינמיקה קוואנטית, ההזזה של Lamb, אפקטים נוספים.



Hydrogen, (H), gaseous element, discovered by Henry CAVENDISH in 1766. The first element on the PERIODIC TABLE, hydrogen is colorless, odorless, tasteless, slightly soluble in water, and highly explosive. The hot flame produced by a mixture of oxygen and hydrogen is used in welding and in melting quartz and glass. Normal hydrogen is diatomic (see ALLOTROPY). The most abundant element in the universe, hydrogen is the major fuel in fusion reactions of the SUN and other STARS. Atmospheric hydrogen has three isotopes: protium (nucleus: one proton), the most common; deuterium, or heavy hydrogen (nucleus: one proton and one neutron), used in particle accelerators and as a tracer for studying chemical-reaction mechanisms; and tritium (nucleus: one proton and two neutrons), a radioactive gas used in the hydrogen bomb, in luminous paints, and as a tracer. Hydro
use is in the synthesis of AMMONIA

Everything You Always Wanted to Know About the Hydrogen Atom (But Were Afraid to Ask)

Randal C. Telfer
Johns Hopkins University

May 6, 1996

Abstract

A thorough review of the structure of the hydrogen atom will be presented with emphasis on the quantum-mechanical principles involved rather than calculational detail, which will be minimized. First, the relationship of the Heisenberg uncertainty principle to the hydrogen atom will be discussed briefly. This is followed by a discussion of the energy level structure of the hydrogen atom, including fine structure, in the context of the quantum-mechanical theories of Bohr, Schrödinger, and Dirac. Finally, smaller-order corrections to these theories will be discussed, including the Lamb shift, hyperfine structure, and the Zeeman effect.

1 The Uncertainty Principle

Before discussing specifics about the structure of the hydrogen atom, it is interesting to note what information about the hydrogen atom can be derived just from the Heisenberg uncertainty principle. A familiar form of the uncertainty principle looks like the following:

$$\Delta x \Delta p_x \sim \hbar, \tag{1}$$

where Δx and Δp_x are the uncertainty in the x-component of the position and momentum of a particle, respectively. Consider an electron in a classical circular orbit in the xy-plane. It is then reasonable to write $\Delta x \sim r$, where r is the radius of the orbit. Assuming a state of minimum uncertainty, Δp_x is then known from the uncertainty principle, and it should be roughly equal

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים - תכנית מקורית:

השלמת אינטגרציה של מסלולים ו-BS. 1

עקרון אי-הוודאות, תורת Bohr, קדימה ויגדות 2

מרכז מסה, רדוקציה סימפלקטית, תנועת חלקיק טעון בשדה א-מ. 3

תורת ההצגות של SO(3) ע״פ BtD 4

פתרון משוואת שרדינגר לאטום המימן. 5

ספין 1 6

ספין 2 7

משוואת דירק 8

דירק 2 9

דיאגרמות פיינמן 10

CS 11

E-M 12

Lamb1 13

Lamb2 14

TABLE 1		
QUANTITY	NAME OF BASE SI UNIT	SYMBOL
Length	meter (or metre)	m
Mass	kilogram	kg
Time	second	s
Electric current	ampere	A
Thermodynamic temperature	kelvin	K
Amount of substance	mole	mol
Luminous intensity	candela	cd

TABLE 2		
QUANTITY	NAME OF SUPPLEMENTARY SL UNIT	SYMBOL
Plane angle	radian	rad
Solid angle	steradian	sr

Microsoft Table

Tables 1 and 2: International System of Units (SI Units)

International System of Units (French Le SystÚme International d'Unit's), name adopted by the Eleventh General Conference on Weights and Measures, held in Paris in 1960, for a universal, unified, self-consistent system of measurement units based on the MKS (meter-kilogram-second) system. The international system is commonly referred to throughout the world as SI, after the initials of SystÚme International. The Metric Conversion Act of 1975 commits the U.S. to the increasing use of, and voluntary conversion to, the metric system of measurement, further defining metric system as the International System of Units as interpreted or modified for the U.S. by the secretary of commerce.

At the 1960 conference, standards were defined for six base units and for two supplementary units; a seventh base unit, the mole, was added in 1971. The seven base units are listed in Table 1, and the supplementary units are listed in Table 2. The symbols in the last column are not abbreviations (hence, no periods are used), and they are exactly the same in all languages.

Length

The meter and the kilogram had their origin in the metric system. By international agreement, the standard meter had been defined as the distance between two fine lines on a bar of platinum-iridium alloy. The 1960 conference redefined the meter as 1,650,763.73 wavelengths of the reddish-orange light emitted by the isotope krypton-86. The meter was again redefined in 1983 as the length of the path traveled by light in vacuum during a time interval of 1/299,792,458 of a second.

Mass

When the metric system was created, the kilogram was defined as the mass of 1 cubic decimeter of pure water at the temperature of its maximum density (4.0° C/39.2° F). A solid cylinder of platinum was carefully made to match this quantity of water under the specified conditions. Later it was discovered that a quantity of water as pure or as stable as required could not be provided. Therefore the primary standard of mass became the platinum cylinder, which was replaced in 1889 by a platinum-iridium cylinder of similar mass. Today this cylinder still serves as the international kilogram, and the kilogram in SI is defined as a quantity of mass of the international prototype of the kilogram.

Time

For centuries, time has been universally measured in terms of the rotation of the earth. The second, the basic unit of time, was defined as 1/86,400 of a mean solar day (see DAY) or one complete rotation of the earth on its axis. Scientists discovered, however, that the rotation of the earth was not constant enough to serve as the basis of the time standard. As a result, the second was redefined in 1967 in terms of the resonant frequency of the cesium atom, that is, the frequency at which this atom absorbs energy: 9,192,631,770 Hz (cycles per second).

Temperature

The temperature scale adopted by the 1960 conference was based on a fixed temperature point, the triple point of water, at which the solid, liquid, and gas are in equilibrium. The temperature of 273.16 K was assigned to this point. The freezing point of water was designated as 273.15 K, equaling exactly 0° on the Celsius temperature scale. The Celsius scale, which is identical to the centigrade scale, is named for the 18th-century Swedish astronomer Anders Celsius, who first proposed the use of a scale in which the interval between the freezing and boiling points of water is divided into 100 degrees. By international agreement, the term Celsius has officially replaced centigrade.

Other Units

TABLE 3		
QUANTITY	NAME OF DERIVED SI UNIT	SYMBOL
Area	square meter	m^2
Volume	cubic meter	m^3
Velocity	meter per second	m/s
Acceleration	meter per second squared	m/s^2
Density	kilogram per cubic meter	kg/m^3
Current density	ampere per square meter	A/m^2
Magnetic field strength	ampere per meter	A/m
Specific volume	cubic meter per kilogram	m^3/kg
Luminance	candela per square meter	cd/m^2

TABLE 4			
QUANTITY	SPECIAL NAME OF DERIVED SI UNIT	SYMBOL	VALUE IN TERMS OF BASE OR SUPPLEMENTARY SI UNITS OR IN TERMS OF OTHER DERIVED SI UNITS
Frequency	hertz	Hz	1/s
Force	newton	N	$kg \cdot m/s^2$
Pressure, stress	pascal	Pa	N/m^2
Energy, work, quantity of heat	joule	J	N·m
Power	watt	W	J/s
Quantity of electricity	coulomb	C	A·s
Electric potential	volt	V	W/A
Capacitance	farad	F	C/V
Electric resistance	ohm	Ω	V/A
Conductance	siemens	S	A/V
Magnetic flux	weber	Wb	V·s
Magnetic flux density	tesla	T	Wb/m^2
Inductance	henry	H	Wb/A
Luminous flux	lumen	lm	cd·sr
Illuminance	lux	lx	lm/m^2
Activity (of radionuclides)	becquerel	Bq	1/s
Absorbed dose	gray	Gy	J/kg

Microsoft Table

Tables 3 and 4: Derived SI Units and Names

TABLE 5 MULTIPLICATION FACTOR	PREFIX	SYMBOL
1000 000 000 000 000 000 = 10^{18}	exa	E
1000 000 000 000 000 = 10^{15}	peta	P
1000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1000 000 000 = 10^{9}	giga	G
1000 000 = 10^{6}	mega	M
1000 = 10^{3}	kilo	k
100 = 10^{2}	hecto	h
10 = 10^{1}	deka	da
0.1 = 10^{-1}	deci	d
0.01 = 10^{-2}	centi	c
0.001 = 10^{-3}	milli	m
0.000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0.000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0.000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0.000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	atto	a

Microsoft Table

Table 5: Metric Prefixes

QUANTITY	NAME OF UNIT	UNIT SYMBOL	DEFINITION
Time	minute	min	1 min = 60 s
	hour	h	1 h = 60 min
	day	d	1 day = 24 h
Plane angle	degree	°	1° = (π/180) rad
	minute	'	1' = (1/60)°
	second	"	1" = (1/60)'
Volume	liter (or litre)	l	1 l = 1 dm^3
Mass	metric ton	t	1 t = 10^3kg

Microsoft Table

Table 6: Standard Quantities and Units

In SI, the ampere was defined as the constant current that, flowing in two parallel conductors one meter apart in a vacuum, will produce a force between the conductors of 2 × 10-7 newtons per meter of length.
In 1971 the mole was defined as the amount of substance of a system that contains as many elementary entities as there are atoms in 0.012 kilogram of carbon-12.
The international unit of light intensity, the candela, was defined as 1/60 of the light radiated from a square centimeter of a blackbody, a perfect radiator that absorbs no light, held at the temperature of freezing platinum.
The radian is the plane angle between two radii of a circle that cut off on the circumference an arc equal in length to the radius.
The steradian is defined as the solid angle that, having its vertex in the center of a sphere, cuts off an area of the surface of the sphere equal to that of a square with sides of length equal to the radius of the sphere.
The SI units for all other quantities are derived from the seven base units and the two supplementary units. Examples of some SI-derived units, expressed in terms of base units, are shown in Table 3. Some derived units are used so often that they have been assigned special names—usually those of scientists—as shown in Table 4.
One feature of SI is that it is a coherent system; that is, derived units are expressed as products and ratios of the base, supplementary, and other derived units without numerical factors. This results in some units being too large for ordinary use and others too small. To compensate, the prefixes developed for the metric system have been borrowed and expanded. These prefixes, given in Table 5, are used with all three types of units: base, supplementary, and derived. Examples are millimeter (mm), kilometer/hour (km/h), megawatt (MW), and picofarad (pF). Because double prefixes are not used, and because the base unit kilogram already contains a prefix, prefixes are not used with kilogram, although they are used with gram. The prefixes hecto, deka, deci, and centi are used only rarely, and then usually with meter to express areas and volumes. Because of established usage, the centimeter is retained for body measurements and clothing.
Certain units that are not part of SI are used so widely that it is impractical to abandon them. The units that are accepted for continued use in the U.S. with SI are listed in Table 6.
In cases where their usage is already well established, certain other units are allowed for a limited time, subject to future review: nautical mile, knot, angstrom, standard atmosphere, hectare, and bar.
See also METRIC SYSTEM; WEIGHTS AND MEASURES.

Further Reading

Electrical Units, units used to express quantitative measurements of all types of electrostatic and electromagnetic phenomena and of the electrical characteristics of components of electrical circuits . The basic electrical units are part of the centimeter-gram-second system , but because, in most cases, these units are either too large or too small for convenient measurement, a number of practical units have been adopted for use in engineering.

Basic Units
The elemental unit of electricity is the absolute charge on a single electron or proton. The symbol for this unit is e. The CGS unit of electrical charge is the electrostatic unit (esu), which is defined as the quantity of electricity that when concentrated at a point in a vacuum will repel a like charge 1 cm away with a force of 1 dyne. The esu equals the aggregate charge carried by 2,082,000,000 electrons or protons.
The basic units of electrical current or flow is the statampere, which is defined as a current of 1 esu/sec. The statvolt, the basic unit of electromotive force, or potential difference, is the difference in potential that exists between two points when 1 erg of work is required to force 1 esu of electricity between those two points.

Electromagnetic Units
Besides the electrostatic units of charge, current, and potential difference, a parallel group of basic electromagnetic units exists. The basic magnetic unit, comparable to the elemental unit of electricity, is the unit magnetic pole, defined as a point magnetic pole that in a vacuum will act on a similar pole 1 cm away with a force of 1 dyne. The unit used to measure the strength of magnetic fields is the oersted. A field that acts on a unit magnetic pole with a force of 1 dyne has a strength of 1 oersted. The electromagnetic unit of electric current is called the abampere. If a current of 1 abampere flows in a wire 1 cm long, the wire is pushed sidewise with a force of 1 dyne by a magnetic field of 1 oersted acting at right angles to the wire. The abcoulomb is the quantity of electricity passing any point in a circuit in 1 sec when a current of 1 abampere is flowing in the circuit. The abvolt, the electromagnetic unit of potential difference, is the potential difference between two points when 1 erg of work is necessary to move 1 abcoulomb of electricity from one point to the other. See also POTENTIAL ENERGY.
The mathematical relationships between the electrostatic and electromagnetic units are as follows: 1 esu equals 3.3356 × 10-11 abcoulombs; 1 statampere equals 3.3356 × 10-11 abamperes; and one statvolt equals 29,979,600,000 abvolts. This last figure is exactly equal to the velocity of light through a vacuum, which is expressed in centimeters per second, as predicted by the electromagnetic-wave theory developed by the British physicist James Clerk Maxwell.
See ELECTROMAGNETIC RADIATION.

Practical Units
The unit of electrical current in common use is the ampere, which is defined as 0.1 abamperes. The practical unit of electrical quantity is the coulomb, the amount of electricity passing a given point in a circuit in 1 sec when a current of 1 amp is flowing. The volt is the practical unit of potential difference. It is equal to 100 million abvolts and can be defined as the potential difference existing between two points when 1 joule (10 million ergs) of work is required to move 1 coulomb of electricity from one of the points to the other. The unit of electrical work is the watt. It represents the generation or use of electrical energy at the rate of 1 J/sec. The kilowatt is equal to 1000 watts.
Because of the difficulty of making measurements in terms of the absolute units, the practical units are also defined for purposes of practical standardization as follows: The ampere is the amount of current that will deposit 0.001118 g of silver per sec if passed through a silver nitrate solution; the ohm is the resistance of a column of mercury 106.3 cm in length and 1 sq mm in cross section at a temperature of 0° C (32° F); the volt is the electromotive force necessary to produce a current of 1 amp through a resistance of 1 ohm. The volt is also defined in terms of a standard voltaic cell, called the Weston cell, which has poles of cadmium amalgam and mercurous sulfate and an electrolyte of cadmium sulfate. A volt is defined as 0.98203 of the potential of this standard cell at 20° C (68° F).
In all the practical electrical units the conventional prefixes of the metric system are used to indicate fractions and multiples of the basic units. Thus a micromicrofarad is a trillionth of a farad, a microampere is a millionth of an ampere, a millivolt is a thousandth of a volt, a millihenry is a thousandth of a henry, a kilowatt is 1000 watts, and a megohm is 1 million ohms.

Resistance, Capacitance, Inductance
All components in electrical circuits exhibit one or more of the characteristics of resistance, capacitance, and inductance. The commonly used unit of resistance is the ohm, which is the resistance of a conductor in which a potential difference of 1 V causes a current flow of 1 amp. The capacitance of a condenser is measured in farads. A condenser of 1 farad capacitance will exhibit a change in potential difference of 1 V between its plates when 1 coulomb of electricity is transferred from one plate to the other. The henry is the unit of inductance. A coil has a self-inductance of 1 H when a change in current of 1 amp/sec produces a countervoltage of 1/V. In a transformer, or in any two magnetically coupled circuits, a mutual induction of 1 H is that inductance which will induce a voltage of 1 V in the secondary when there is a change of 1 amp/sec in the primary.
See also BATTERY; ELECTROCHEMISTRY.

Planck's Constant, fundamental physical constant, symbol h. It was first discovered (1900) by the German physicist Max Planck. Until that year, light in all forms had been thought to consist of waves. Planck noticed certain deviations from the wave theory of light on the part of radiations emitted by so-called blackbodies, or perfect absorbers and emitters of radiation. He came to the conclusion that these radiations were emitted in discrete units of energy, called quanta. This conclusion was the first enunciation of the quantum theory. According to Planck, the energy of a quantum of light is equal to the frequency of the light multiplied by a constant. His original theory has since had abundant experimental verification, and the growth of the quantum theory has brought about a fundamental change in the physicist's concept of light and matter, both of which are now thought to combine the properties of waves and particles. Thus, Planck's constant has become as important to the investigation of particles of matter as to quanta of light, now called photons. The first successful measurement (1916) of Planck's constant was made by the American physicist Robert Millikan. The present accepted value of the constant is h = 6.626 × 10-34 joule-second in the meter-kilogram-second system.

Electron, a type of elementary particle that, along with protons and neutrons, make up atoms and molecules. Electrons play a role in a wide variety of phenomena. The flow of an electric current in a conductor is caused by the drifting of free electrons in the conductor. Heat conduction is also primarily a phenomenon of electron activity. In vacuum tubes a heated cathode emits a stream of electrons that can be used to amplify or rectify an electric current (see RECTIFICATION; VACUUM TUBES). If such a stream is focused into a well-defined beam, it is called a cathode-ray beam (see CATHODE RAY). Cathode rays directed against suitable targets produce X rays; directed against the fluorescent screen of a television tube, they produce visible images. Also, the negatively charged beta particles emitted by some radioactive substances are electrons. See RADIOACTIVITY; X RAY; ELECTRONICS; PARTICLE ACCELERATORS.
Electrons have a rest mass of 9.109 x 10-28 grams, and an electrical charge of negative 1.602 x 10-19 coulombs (see ELECTRICAL UNITS). The charge of the electron is the basic unit of electricity. Electrons are classified as fermions because they have half-integral spin; spin is a quantum mechanical property of subatomic particles that indicates the particle's angular momentum. The antimatter version of the electron is the positron.

Contributed by:
Richard Hofstadter


```
Mathematica 3.0 for SPARC
Copyright 1988-96 Wolfram Research, Inc.
License valid through 29 Aug 1997.

In[1]:= << Miscellaneous`PhysicalConstants`

In[2]:= ElectronCharge

                   -19
Out[2]= 1.60218 10    Coulomb

In[3]:= ElectronMass

                   -31
Out[3]= 9.10939 10    Kilogram

In[4]:= PlanckConstantReduced

                   -34
Out[4]= 1.05457 10    Joule Second

In[5]:= VacuumPermittivity

                   -12
         8.85419 10    Ampere Second
Out[5]= ----------------------------
                 Meter Volt
```

מכניקה קלאסית, קוונטית וסטטיסטית, 16 לינואר 1996

תכנית השיעור: 1. תזכורת על המעבר: אינטגרל מסלולים ⇐ קוונטיזציה קנונית.

2. תזכורת אינטגרציה גאוסינית.

3. הבחנה: "כתוב כמו לא הדבק" על 2 מ-3 הנושאים הראשונים; תאריך?

4. יחס חילוף בקולוקוויום

5. מדוע זה רלוונטי ל-$g\dot{q}$?

7. מדוע זה רלוונטי ל-$Q\dot{P}$? בעצם, אני לא יודע.

8. אינטגרציה נוספת: הפיק הלעון מהשיעור הראשון.

9. אינטגרציה נוספת: חישוב התנע בעזרת המגמה.

נושא 5:

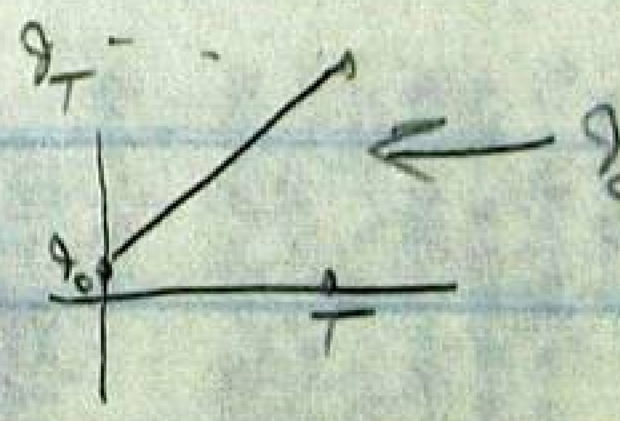
$$Q^n(t+\epsilon) - Q^n(t) = \sum_{j=1}^{n} Q^{j-1}(t)\left(Q(t+\epsilon)-Q(t)\right)Q^{n-j}(t+\epsilon)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} Q^{n-1}(t)\left[Q(t+\epsilon)-Q(t)\right] + \sigma^2(\ldots)$$

נושא 9: חלקיק חופשי: $S = \int \frac{1}{2}\dot{q}^2\, dt$

$$K(q_0, q_T) = \int_{\substack{q(0)=q_0 \\ q(T)=q_T}} \mathcal{D}q\, e^{-i\int \frac{1}{2}\dot{q}^2 dt} \propto e^{-iS(q_c)}$$

([illegible] / מהשיעור הראשון)



$$\Leftarrow \quad S(q_c) = \frac{(q_T - q_0)^2}{2T} \quad \Leftarrow$$

$$(U_T\psi_0)(q_T) = \int dq_0\, \psi_0(q_0)\, e^{-i\frac{(q_T-q_0)^2}{2T}} =$$

נניח T ענק, $q_T = pT$, ψ_0 מרוכזת בסביבת 0.

$$\frac{(q_T-q_0)^2}{2T} = \frac{(pT-q_0)^2}{2T} = \frac{p^2T^2}{2T} - pq_0 + \frac{q_0^2}{2T}$$

($\frac{p^2T^2}{2T}$: קבוע; pq_0 ↓ מעניין; $\frac{q_0^2}{2T}$ ↓ 0)

$$\propto \int dq_0\, e^{ipq_0}\, \psi(q_0) \Longrightarrow$$ טרנספ' פוריה

מכניקה קלאסית וקוואנטית למתמטיקאים 19 פברואר 1997

עברית

יום ראשון 17-18

\+ שלישי 13-14

עקרון אי-הוודאות: $\Delta p \Delta q \sim \hbar \Leftarrow p = \hbar / r$

$$E = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{r} = \frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

$$\Leftarrow \quad r = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2} \; ; \quad E = -\frac{1}{2}\frac{me^4}{\hbar^2 (4\pi\epsilon_0)^2}$$

כאשר:

$m = 9.109 \cdot 10^{-31}\, kg \qquad \hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ Joule Sec

$e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ Coul. $\qquad \epsilon_0 = 8.854 \cdot 10^{-12} \frac{Amp.\, Sec}{Met.\, Volt}$

$\pi = \frac{22}{7}$

$$r = 5.292 \cdot 10^{-11} \frac{Amp.\; Joule^2\, sec^3}{Coul^2\; kg\; Met.\, Volt}$$

למשל: 1. יחידות המידה של $\hbar$ ו-ℓ הן הגיוניות! $\left(Joule = kg \frac{Met^2}{sec^2}\right)$

2\. $ma = F = \frac{V}{L} \cdot C \Rightarrow kg \cdot \frac{Met}{Sec^2} = \frac{Volt}{Met} \cdot Coul$

$\Leftarrow \quad Volt = kg \cdot \frac{Met^2}{sec^2} \frac{1}{Coul}$

3\. $C = I \cdot t \Rightarrow Coul = Amp \cdot Sec$

$\Leftarrow \quad Amp = \frac{Coul}{Sec}$

ולכן

$$r = 5.292 \cdot 10^{-11}\; Meter = 0.5292\, \AA$$

$$E = -2.18 \frac{Coul^4\, kg\, Met^2\, Volt^2}{Amp^2\; Joule^2\; sec^4} \cdot 10^{-18} \qquad 4$$

הגדרה: eV האנרגיה שצריך כדי להזיז אלקטרון לאורך וולט אחד.

$= 1.602 \cdot 10^{-19}$ Joule

$$E = -13.606\; eV$$

$\ell_{esr} = 1.5788 \cdot 10^{14}$ [illegible] $\left(kg \frac{met^3}{sec^2}\right)^{1/2}$

המשך בכתב הספר הקודם.

[illegible] 23/2/97

$$F=\frac{1}{2}mv^2-U(r)$$

[illegible]

$$v^2=\dot r^2+r^2\dot\theta^2$$

$$F=\frac{1}{2}m(\dot r^2+\dot\theta^2r^2)-U(r)$$

[illegible]

$$P_\theta=\frac{\partial F}{\partial\dot\theta}=mr^2\dot\theta$$ ← תנע זוויתי J

$$P_r=\frac{\partial F}{\partial r}$$

$$H=\frac{1}{2}mv^2+U$$ ← אנרגיה. E

$$E=\frac{1}{2}m(\dot r^2+\dot\theta^2r^2)+U(r)=$$

$$=\frac{1}{2}m\left(\dot r^2+\frac{J^2}{m^2r^2}\right)+U(r)$$

$$\Rightarrow\quad \dot r^2=\frac{2E}{m}-\frac{J^2}{m^2r^2}-\frac{2U(r)}{m}$$

$$dt=\frac{dr}{\sqrt{\frac{2E}{m}-\frac{2U(r)}{m}-J^2/m^2r^2}}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\frac{J}{mr^2}\Rightarrow d\theta=\frac{J\,dt}{mr^2}$$

$$\Rightarrow d\theta=\frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2mE}{J^2}-\frac{2mU(r)}{J^2}-\frac{1}{r^2}}}\qquad *$$

$$U(r)=\frac{k}{r}$$ [illegible] - כעת

נסמן ה- [illegible]:

$$d\theta = \frac{du}{\sqrt{a-bu-u^2}}$$

$$d\theta = \frac{d(u+\frac{b}{2})}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}-(u+\frac{b}{2})^2}} = \frac{dz}{\sqrt{a'^2-z^2}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{z}{a'} + \theta_0$$

$$= \cos^{-1}\left(\frac{u+\frac{b}{2}}{\sqrt{a+\frac{b^2}{4}}}\right) + \theta_0$$

$$\Rightarrow \cos(\theta-\theta_0) = \frac{u+\frac{b}{2}}{\sqrt{a+b^2/4}}$$

נציב $u=\frac{1}{r}$ במשוואה * ונשאר

אם רוצים לקבל

$$-\theta = \cos^{-1}\frac{\frac{1}{r}+\frac{mk}{J^2}}{\sqrt{\frac{2mE}{J^2}+\left(\frac{mk}{J^2}\right)^2}} - \theta_0$$

נקבל $\Leftarrow$

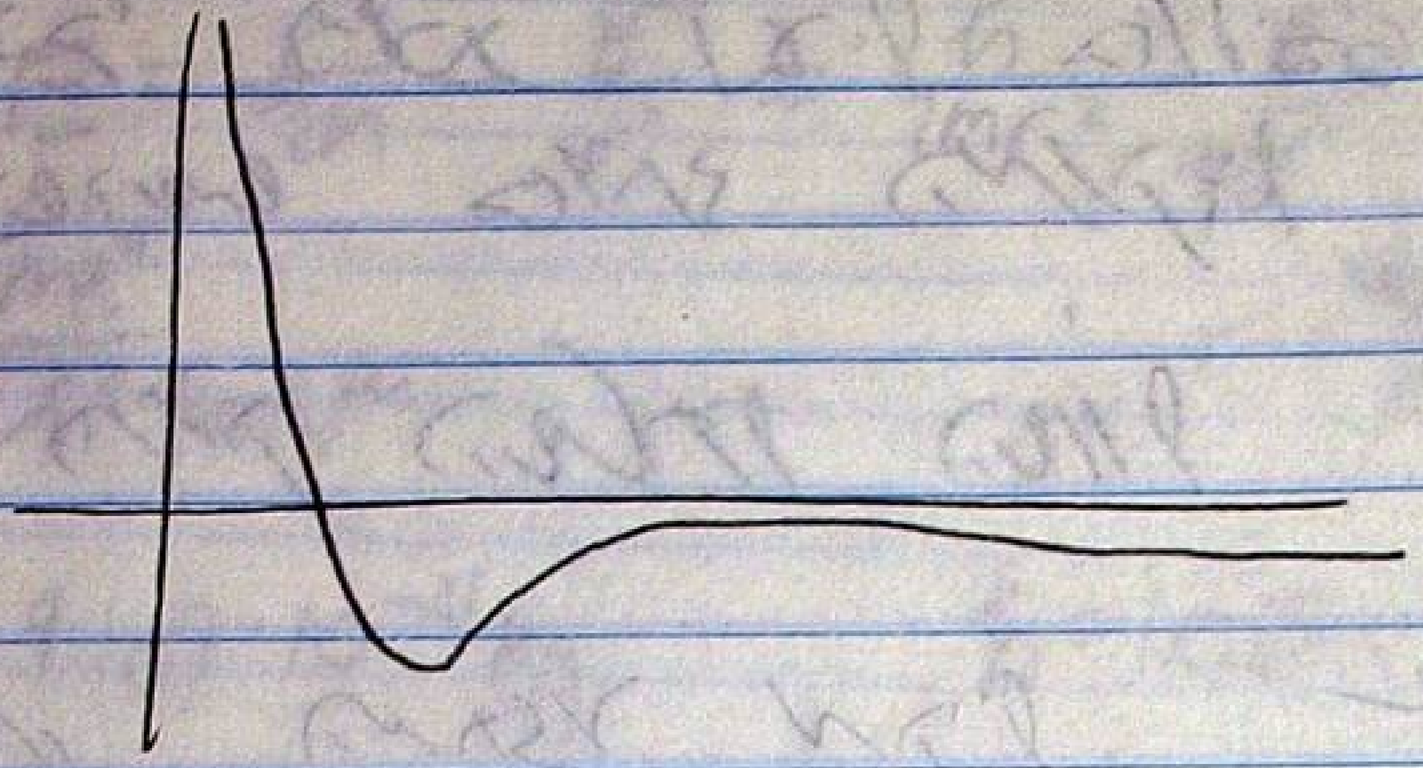
$$\cos(\theta_0-\theta) = \frac{\frac{J^2}{mkr}+1}{\sqrt{\frac{2J^2E}{mk^2}+1}} = $$

$\epsilon = \sqrt{\frac{2J^2E}{mk^2}+1}$ ו- $B = \frac{J^2}{mk}$ נגדיר

ונקבל

$$= \frac{B/r+1}{\epsilon}$$

שלפן גישות r של האנרגיה הפוט' האפקטיבית:
עבור $J \neq 0$



המשך:

$$\frac{\epsilon\cos\theta - 1}{B} = \frac{1}{r}$$

$x = r\cos\theta$ ונקבל

$$\epsilon x - r = B$$

$$-r = B - \epsilon x$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = B^2 - 2\epsilon B x + \epsilon^2 x^2$$

משוואה ריבועית!

היפרבולה: $\epsilon > 1$ $E > 0$

פרבולה $\epsilon = 1$ $E = 0$

אליפסה: $0 < \epsilon < 1$ $\min \frac{-J^2}{mk^2} < E < 0$

מעגל $\epsilon = 0$ $E = \min$

חוקי קפלר:-

1. כוכבי הלכת נעים באליפסות סביב השמש כשהשמש באחד המוקדים

2. חוק השטחים השווים

3. זמן המחזור מקיים $a^3 \propto T^2$

T - מחזור

a - הציר הארוך.

$$e_{esu}^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} = X \frac{\text{met}^3\,\text{kg}}{\text{sec}^2} = \text{kg}\,\text{met}^3/\text{sec}^2$$

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקים, 27 פברואר 1997

מודל האטום של Bohr:

<u>הנחה</u>: אלקטרונים נעים במסלולים מעגליים עם תנע זוויתי $L=n\hbar$

להזכיר: "פוטנציאל אפקטיבי": $V(r)-\frac{1}{2}\frac{J^2}{mr^2}$

כח צנטריפוגלי: $\frac{J^2}{mr^3}=m\frac{v^2}{r}$

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}=m\frac{v^2}{r} \quad ; \quad mvr=n\hbar$$

$$\Leftarrow \quad r=n^2\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} \quad ; \quad v=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 n\hbar}=\frac{\alpha}{n}c$$

עוד מתאים למידות האטום?

כאשר $\alpha=\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c}=\frac{1}{137.036}$ הוא קבוע המבנה הדק

ואז
$$E=K+V=\frac{1}{2}mv^2-\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}=-\frac{me^4}{32\pi^2\varepsilon_0^2\hbar^2 n^2}=\frac{-13.606\,eV}{n^2}$$

<u>תיקון קל</u>: $m\mapsto\mu=\frac{mM}{m+M}$ כאשר $M=1.6726231\cdot10^{-27}kg$ מסת הפרוטון.

$\frac{p_1^2}{2m}+\frac{p_2^2}{2M}+V(q_1-q_2)$; $\frac{p^2}{2\mu}+V(r)$

ומקבלים $\frac{-13.5983\,eV}{n^2}$

תוצאות ספקטרום המימן מדויק עד $3\cdot10^{-5}$

היש העניין בלמידות על נסיון?

חור גדול: קרינה!

הערה: היה נראה לו היינו מקבלים הכל מ- E&M:

תזכורת:

$$S(A)=\int_{\mathbb{R}^4}\frac{1}{2}\|dA\|^2_{(3,1)}+J\wedge A \qquad \begin{matrix} dJ=0 \\ dA=F \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} dF=0 \\ d{*}F=J \end{matrix}$$

$$F=E_x\,dx\wedge dt+\dots+B_x\,dy\wedge dz \qquad J=\rho\,dx\,dy\,dz-j_x\,dy\,dz\,dt$$

וקיבלנו

$$\operatorname{div}B=0 \qquad -\operatorname{div}E=\rho$$
$$\operatorname{curl}E=-\frac{\partial B}{\partial t} \qquad \operatorname{curl}B=-\frac{\partial E}{\partial t}+j$$

וכן $\frac{\partial\rho}{\partial t}+\operatorname{div}j=0$

<u>תיקונים</u>: $J\mapsto J/\varepsilon_0$, שינוי המטריקה (כלומר, הכפלת E במשוואות הימניות ב- $-\frac{1}{c^2}$)

אלקטרו-סטטיקה: במקרה של $j=0$ ו- $\rho=e\delta_0(x)$: $E=\frac{e}{4\pi r^2}\frac{\vec{r}}{|r|}$

חלקיק בשדה: $ds^2=c^2dt^2-(dx^2+dy^2+dz^2)$

$$S(q)=mc\int_{e_1}^{e_2}ds-\int_{e_1}^{e_2}eA \qquad ds=c\,dt\sqrt{1-v^2/c^2}$$

<u>כאשר $e=0$</u>: $p_x=\frac{\partial F}{\partial\dot{x}}=\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; $E=p\dot{q}-F=\frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$; $E=mc^2$

<u>כאשר $e\neq0$</u>:

$$\delta S=\int m\frac{\langle\dot{q},\delta\dot{q}\rangle}{\sqrt{1-v^2/c^2}}dt-e\int dA(\dot{q},\delta q) \qquad \dot{q}=\begin{pmatrix}1\\ \dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \quad \delta q=\begin{pmatrix}0\\ \delta x\\ \delta y\\ \delta z\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow\frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-\dot{x}^2/c^2}}\right)=e(E+\dot{q}\times B)$$

מכניקה קלאסית וקוונטית יחסותיות, ב פורת 1997

חלקיק בשדה

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \qquad S(q) = mc\int_{e_1}^{e_2} ds - \int_{e_1}^{e_2} eA$$

$$ds = c\,dt\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

כאשר $e=0$ $\quad P_x = \frac{\partial F}{\partial \dot x} = \frac{m\dot x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ את מי זה מעניין?

$E = mc^2$; $E = p\dot q - f = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$ את מי זה מעניין?

כאשר $e \neq 0$ $\quad \dot q = \begin{pmatrix} 1 \\ \dot x \\ \dot y \\ \dot z \end{pmatrix} \quad \delta q = \begin{pmatrix} 0 \\ \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix}$

$$\delta S = \int m \frac{\langle \dot q, \delta q \rangle}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} dt - e\int dA(\dot q, \delta q) \implies \frac{d}{dt}\left(\frac{m\dot x}{\sqrt{1-v^2/c^2}}\right) = e(E + \dot q \times B)$$

וגמרנו להסיק את חוק קולון!

אטום Bohr: $E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}\frac{1}{n^2}$; $r = n^2 \cdot \hbar^2/me^2$

תכנית שבוע: 1. המקרה הסימטרי ; 2. הצגת $SO(3)$; 3. המקרה הכללי ; 4. הערות.

$$V(r) = -\frac{e^2}{r} \qquad H = \frac{-\hbar^2}{2m}\Delta + V(r) \qquad ; \qquad i\hbar\frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi$$

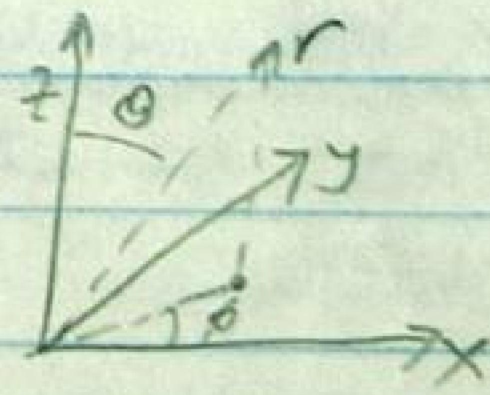
(במערכת יחידות שבה $4\pi\epsilon_0$ מתבטל!) $e = 2.30 \cdot 10^{-?}\ kg\ \frac{m^3}{sec^2}$

הפרדה רגילה: $-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi = \left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi$ ונשאר לפתור $\Psi = e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$

$$\Delta f = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial f}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial\phi^2}\right)$$

(רדיאלי) (זוויתי: דרך תורת החבורות)

$z = r\cos\theta$; $x = r\sin\theta\cos\phi$; $y = r\sin\theta\sin\phi$



משוואות:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(r\Psi) = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r}\right)\Psi$$

מנרמלים $\quad E = \frac{me^4}{2\hbar^2}\epsilon \quad ; \quad r = \frac{\hbar^2}{me^2}\rho \quad$ (זהו השיעור הראשון!)

ומקבלים $\frac{d^2(\rho\Psi)}{d\rho^2} = -\left(\epsilon + \frac{2}{\rho}\right)\rho\Psi$ או $F = \rho\Psi$, $\frac{d^2 F}{d\rho^2} = -\left(\epsilon + \frac{2}{\rho}\right)F$

ונציב $F = e^{-\alpha\rho}g(\rho)$ ומקבלים $0 = g'' - 2\alpha g' + \left(\frac{2}{\rho} + \epsilon + \alpha^2\right)g$ ובוחרים $\alpha^2 = -\epsilon$

ואז $g'' - 2\alpha g' + \frac{2}{\rho}g = 0$. מציבים $g(\rho) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\rho^k$

ומקבלים $a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1)}a_k$ $\quad \left[\Leftarrow a_k \sim \frac{(2\alpha)^k}{k!} \Leftarrow g \sim e^{2\alpha\rho} \quad ; \quad \Leftarrow F \sim e^{\alpha\rho} \text{ מתבדר!} \right]$

מצב רק אם $\alpha = \frac{1}{n}$ עבור אי-שלילי n , כלומר נקבל $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$

ואז $\Psi_n(\rho) = (Pol(\rho)) \cdot e^{-\frac{\rho}{n}}$ $\quad \Psi_1 = e^{-\rho}$

$\Psi_2 = \left(1 - \frac{\rho}{2}\right)e^{-\rho/2}$

ואנרגיה $E = -\frac{1}{n^2}$ $\quad \Psi_3 = \left(1 - \frac{2\rho}{3} + \frac{2}{27}\rho^2\right)e^{-\rho/3}$

מכניקה קלאסית וקוואנטית סמינריון 6 למרץ 1997

המשך שרדינגר במקרה הסטטי כבשיעור הקודם.

50/3) ב- Math 117 מה 27 באפריל 1994

Math 117, April 27 1994

Just a little on Rotations & spin

$\{p_i, q_j\} = \delta_{ij} \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^3) \oplus \ldots \; ; \; L^2(\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^n)$

How does one quantize angular momenta?

$$L_x = q_y p_z - q_z p_y$$
$$L_y = q_z p_x - q_x p_z$$
$$L_z = q_x \cdot p_y - q_y p_x$$

$(L = q \times p)$

$\{L_x, L_y\} = \{q_y p_z - q_z p_y, q_z p_x - q_x p_z\} = q_y p_x - q_x p_y = \theta_z$

$\{\theta_y, \theta_z\} = \theta_x$

$\{\theta_z, \theta_x\} = \theta_y$

$\{\theta_i, p_i\} = \ldots$

$\{\theta_j, p_i\} = \ldots$

easy quantization:

$L_i \longmapsto Q_j P_k - Q_k P_j \quad (\theta_i')$

~~not unique?~~

Get $[L_i', L_j'] = \theta_k'$

Prob: classify reps of $[\theta_i', \theta_j'] = \theta_k'$ in $\mathbb{C}^n$ by anti-self-adjoint matrices.

Sol'n: One in each dim; (+ direct sums)

1 spin-0

2 spin-1/2 electrons, ?

3 spin 1

cont. on → other side.

$H = 2i\theta_3'$ $\quad X^+ = i(\theta_1' + i\theta_2')$ $\quad X^- = i(\theta_1' - i\theta_2')$

$[H, X^+] = 2X^+ \quad [H, X^-] = -2X^-$

$[X^+, X^-] = -H$

$\Rightarrow v_0$ max vector (eigenval ℓ) ; $v_j = \frac{(-1)^j}{j!}(X^-)^j v_0$

$Hv_j = (\ell - 2j)x_j$

$X^- v_j = -(\ell+1)v_{j+1}$

$X^+ v_j = (\ell - j + 1)v_{j-1}$

$j = 0 \dots \ell$

טענה: אם $j = \ell + 1$ אז $v_j = 0$

הוכחה:

$\langle X^- v_\ell, X^- v_\ell \rangle = \langle v_\ell, X^+ X^- v_\ell \rangle = 0$

[illegible]

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים, 9 במרץ 1997

הצגת חוגי הרמוניות: $[L'_i, L'_j] = L'_k$ $(so(3))$

$$H = 2iL'_3 \qquad X^{\pm} = L'_1 \pm iL'_2$$

$$[H, X^+] = 2X^+ \qquad [H, X^-] = -2X^-$$

$$[X^+, X^-] = -H$$

$$Hv_0 = lv_0 \qquad v_j = \frac{(-1)^j}{j!}(X^-)^j v_0 \qquad V_l$$

$$Hv_j = (l-2j)x_j$$

$$X^-v_j = -(l+1)V_{j+1}$$

$$X^+v_j = (l-j+1)V_{j-1}$$

טענה $V_{l+1} = 0$

טענה V_l הצגה אי-פריקה.

$\Delta = -\sum L_i'^2 \qquad L_i = -(x_k\partial_j - x_j\partial_k)$

P_l : הפולינומים מדרגה l

$\mathcal{H}_l$: הרמוניים הומוגניים מדרגה l : הצגה של $so(3)$

$\dim \mathcal{H}_l = 2l+1 \qquad \dim P_l = \binom{l+2}{2}$

טענה $\mathcal{H}_l = V_{2l+1}$ הוכחה: $H(x_1+ix_2)^l = l(\ldots)$

$Y_{l-j} = (iX^-)^j Y_l \qquad Y_j = \qquad Y_l = (x_1+ix_2)^l$ יהי

טענה משנית

$Y_m(\theta,\phi) = e^{im\phi} P_m(\cos\theta)$

$z = r\cos\theta$
$x = r\sin\theta\cos\phi$
$y = r\sin\theta\sin\phi$

כאשר $P_m(s) = (1-s^2)^{-\frac{m}{2}} \frac{d^{l-m}}{ds^{l-m}}(1-s^2)^l$ ו- P_l לג'נדר

$P_l(t) = \frac{1}{2^l l!}\frac{d^l}{dt^l}(t^2-1)^l$

h הפולינום של לג'נדר

מכניקה קלאסית וקוונטית, סימטריות, 13 במרץ 1997

סדר: תזכורת על הצגות / הקזימיר / הרמוניות ספריות / הקזימיר על $\mathbb{R}^3$ / משוואת שרדינגר ופתרונה / פרטיות

תזכורת: הצגות אי־פריקות של h

$$[L'_i, L'_j] = L'_k \qquad H = 2iL'_3 \qquad X^\pm = L'_1 \pm iL'_2$$

הצגות א״פ: ממימד $l+1$: V_l

$Hv_0 = lv_0$

$$v_j = \frac{(-1)^j}{j!}(X^-)^j v_0 \qquad Hv_j = (l-2j)v_j$$

$$X^-v_j = -(j+1)v_{j+1}$$

$$X^+v_j = (l-j+1)v_{j-1}$$

$v_0 = (x_1+ix_2)^l$, $X^+v_0 = 0$, $Hv_0 = lv_0$

P_l: הפולינומים ממעלה l על $\mathbb{R}^3$ — $\dim P_l = \binom{l+2}{2}$

$\mathcal{H}_l = V_{2l}$ הרמוניים — $\dim \mathcal{H}_l = 2l+1$; $\Delta \neq -\sum L_i'^2$

הערה -

$$C = -\left(\sum L_i'^2\right) = \left(\frac{H}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(X^+X^- + X^-X^+\right)$$

פועל כ:

$$\frac{1}{4}(l-2j)^2 + \frac{1}{2}\left(+(j+1)(l-j) + (l-j+1)j\right) =$$

$$= \frac{1}{4}l^2 + l\left(-j + \frac{j+1}{2} + \frac{j}{2}\right) + j^2 - \frac{1}{2}\left(j(j+1) + j(j-1)\right)$$

$$= \frac{1}{4}\left(l(l+2)\right)$$

ולכן על $\mathcal{H}_l$ החלק הזוויתי של הלפלסיאן פועל כ- $-l(l+1)$

גילוי: $\Delta\psi = \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\psi) + \frac{1}{r^2}$(חלק זוויתי). נניח $\psi = R(r)Y(\theta,\phi)$, $Y \in \mathcal{H}_l$

$\Leftarrow$ נגיע למשוואה:

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2mr^2}\right)R$$

אחרי החלפת משתנים ($r = \frac{\hbar^2}{me^2}\rho$, $E = \frac{me^4}{2\hbar^2}\epsilon$); $F = \rho R$; $g = e^{\alpha\rho}F$ עם $\alpha^2 = -\epsilon$ ומעבר לטור:

$$a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1) - l(l+1)}a_k$$

ולכן יש פתרונות רק אם $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$ וכן $l \le n$!

מסקנה: ברמת האנרגיה $-\frac{1}{n^2}$ יש פתרונות עם תנע זוויתי כלשהו עד n; ולכל תנע כזה l יש $2l+1$ פתרונות כאלו.

מכניקה קלאסית וקוונטית, סמינרים, 11 ביולי 1997.

משוואת שרדינגר עבור R, כאשר $\psi = R(r)\cdot Y(\theta,\varphi)$; $Y \in \mathcal{H}_\ell$

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}(rR) = -\frac{2m}{\hbar^2}\left(E + \frac{e^2}{r} - \frac{\hbar^2 \ell(\ell+1)}{2mr^2}\right)R$$

החלפת משתנים: $r = \frac{\hbar^2}{me^2}\rho$, $E = \frac{me^4}{2\hbar^2}\epsilon$; $f = \rho R$; $g = e^{\alpha\rho} f$ עם $\alpha^2 = -\epsilon$

ומקבלים

$$a_{k+1} = \frac{2(\alpha k - 1)}{k(k+1) - \ell(\ell+1)} a_k \qquad a_1 = 0 !$$

יש פתרונות רק אם $\epsilon = -\frac{1}{n^2}$ וכן $n \geq k \geq \ell$!

מסקנה: הרמות האנרגיה $\frac{1}{n^2}$, יש פתרונות עם ערכים עבור ℓ מ-0 עד $n-1$ וכפולות $2\ell+1$ עבור כל ℓ.

$$\left(\begin{array}{c}\text{מתאפס כאשר}\\ k=\ell\end{array}\right) a_{k+1} = \left(\begin{array}{c}\text{מתאפס כאשר}\\ k=n\end{array}\right) a_k$$

דברים שעוד צריך להבין:

א. $\left(\{\frac{1}{2}p^2 - \frac{1}{q} \leq \epsilon\}\right) = \int_0^\infty dp\, 4\pi p^2 \cdot \frac{4}{3}\pi \left(\frac{1}{\frac{1}{2}p^2+\epsilon}\right)^3 \sim \frac{1}{\epsilon^{3/2}}$

$\frac{1}{2}p^2 + \epsilon \leq \frac{1}{q}$

$\frac{1}{\frac{1}{2}p^2+\epsilon} \geq q$

ב. אם יש כל כך הרבה פתרונות, מדוע יש כל כך מעט רמות אנרגיה?

ג. מדוע מצאנו את כל הפתרונות?

הערה: (משפט הפרעות) נניח $Av = \lambda v$. מה ניתן לומר על $A + \epsilon B$?

$$\lambda_\epsilon = \lambda + \epsilon \langle v, Bv \rangle$$

שני מקורות להפרעה: 1. אנרגיה יחסותית. 2. אלקטרון מייצר שדה מגנטי ומרגיש בו בעצמו.

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + \dots\right)$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \Rightarrow v = p\sqrt{\frac{1}{m^2 + p^2/c^2}}$$

$$\Leftarrow \quad E = c\sqrt{m^2c^2 + p^2}$$

$$= mc^2\sqrt{1 + \left(\frac{p}{mc}\right)^2}$$

$$= mc^2\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{p}{mc}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(\frac{p}{mc}\right)^4 \dots\right) = mc^2 + \frac{1}{2}\frac{p^2}{m} - \frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2} + \dots$$

$$\Delta E = \left\langle \psi, -\frac{1}{8}\frac{p^4}{m^3c^2}\psi \right\rangle = -\frac{1}{2mc^2}\langle \psi, (E^2 - 2EV + V^2)\psi \rangle =$$

$$\frac{p^2}{2m}\psi = (E - V)\psi \qquad = \alpha^4 mc^2 \frac{1}{4n^2}\left[\frac{2n}{\ell + \frac{1}{2}} - \frac{3}{4n}\right]$$

$$\alpha = e^2/\hbar c = \frac{1}{137}$$

$$\lambda_\epsilon = \lambda_0 + \epsilon \lambda_1 + \dots$$

$$V_\epsilon = V_0 + \epsilon V_1 + \dots$$

$$\underbrace{(A+\epsilon B)}_{SA} V_\epsilon = \lambda_\epsilon V_\epsilon \qquad \|V_\epsilon\|^2 = 1$$

$$AV_0 = \lambda_0 V_0$$

$$0 = \langle BV_0 + AV_1 - \lambda_0 V_1 - \lambda_1 V_0 , V_0 \rangle$$

$$= \langle BV_0, V_0 \rangle - \lambda_1 \|V_0\|^2$$

מכניקה קלסית וקוואנטית למתמטיקאים 20 למרץ 1997

שני מקרים לבעיות:

1. אנרגיה היא יחסותית.
2. האלקטרון הוא מגנט בשני דרכים שונות.

1. הערה בקשר הקודם.
אנרגיה יחסותית בקשר הקודם.

2. אינטרקציה ספין-מסלול: $\Delta H_{so} = \frac{e^2}{2m^2c^2r^3} L\cdot S$

$$L^t_i = L_i + S_i \qquad (L^t)^2 = L^2 + 2L\cdot S + S^2$$

$$(L\cdot S)\Psi = \frac{\hbar^2}{2}\left(l^t(l^t+1) - l(l+1) - s(s+1)\right)\Psi$$

הערות: 1. ההצגות הבסיסיות של $SO(3)$; $SU(2)\to SO(3)$
2. פירוק לגורמים של מכפלות טנזוריות.
3.

מכניקה קלאסית, קוונטית ויחסותית 30 אפר' 1997

יחסות: $E=c\sqrt{m^2c^2+p^2} \Leftarrow m^2c^4=E^2-c^2p^2$

קוונטיזציה: $p_i \mapsto -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_i}$, $E \mapsto i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \Rightarrow m^2c^4\psi=\hbar^2\underbrace{\left(-\frac{\partial^2}{\partial t^2}+c^2\Delta\right)}_{-c^2\Box}\psi$

$\Downarrow$

$$\left(\Box+\left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\right)\psi=0$$

$$\Box=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$$

זו משוואת קליין-גורדון והיא בעייתית...

לחילופין:
$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi=c\sqrt{m^2c^2-\hbar^2\Delta}\;\psi \quad ?$$

שאלה: היכן e_i ?
$$\left(\sum e_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right)^2=\Box$$

צריך: $e_0^2=1/c^2$; $e_i^2=-1$; $e_ie_j+e_je_i=0$

כלומר [illegible]: $(\sum\alpha_ie_i)^2=\|\alpha\|^2_{1,3}$

הגדרה: נתון V,Q מרחב ריבועי. $C(Q)$ אלגברה עם יחידה ועם $i_Q:V\to C(Q)$ המקיים $(i(x))^2=Q(x)\cdot 1$ עם התכונה האוניברסלית. (מעל $\mathbb{R}$)

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{i} & C \\ & \searrow^{j} & \vdots\,\exists!\varphi \\ & & A \end{array}$$

יחידות!

קיום: $C(Q)=T(V)/\{x\otimes x-Q(x)1\}$

דוגמאות: $C'_{0,1,2}=\mathbb{R},\ \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}_{\,e'_1=(1,-1)},\ \mathbb{R}(2)_{\left(\begin{smallmatrix}0&1\\1&0\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&-1\end{smallmatrix}\right)}$; $C_{0,1,2}=\mathbb{R},\mathbb{C},\mathbb{H}$

$$\mathbb{H}=\{1,i,j,k\}=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\-\bar b&\bar a\end{pmatrix}\right\}$$

משפט: $(V,P);(W,Q)\Rightarrow C(P\oplus Q)=C(P)\hat\otimes C(Q)$ ע"י F

$$F:V\oplus W\longrightarrow C(P)\hat\otimes C(Q)$$
$$F(v,w)=i_P(v)\otimes 1+1\otimes i_Q(w)$$

מסקנה: אם $\{e_i\}$ בסיס של V, אז $\{e_I : I\subset\{1,\dots,n\}\}$ בסיס של $C(Q)$

הוכחה: $n=1$: ברור. פרישה: נובע מ- $e_ie_j+e_je_i=Q(e_i+e_j)-Q(e_i)-Q(e_j)$

מימד: נובע מהמשפט הקודם ומ- $n=1$

משפט: $C_n\otimes C'_2\cong C'_{n+2}$ ע"י $\psi:V'_{n+2}\to C_n\otimes C'_2$

$$\psi(e'_i)=\begin{cases}e_{i-2}\otimes e'_1e'_2 & i>2\\ 1\otimes e'_i & i\le 2\end{cases}$$

$C'_n\otimes C_2\cong C_{n+2}$

משפטים: $\mathbb{R}(n)\otimes K=K(n)$

$\mathbb{R}(n)\otimes\mathbb{R}(m)=\mathbb{R}(mn)$

$\mathbb{C}\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$

$\mathbb{H}\otimes\mathbb{C}=\mathbb{C}(2)$

$\mathbb{H}\otimes\mathbb{H}=\mathbb{R}(4)$

מסקנה: הלוח המפורסם.

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים, 6 לאפריל 1997

n	C_n	e_i's
0	$\mathbb{R}$	—
1	$\mathbb{C}$	$e_1 = i$
2	$\mathbb{H}$	$e_1 = i$, $e_2 = j$
3	$\mathbb{H}\oplus\mathbb{H}$	$e_1 = (i, -i)$, $e_2 = (j, j)$, $e_3 = (k, -k)$
4	$\mathbb{H}(2)$	$e_1 = 1 \otimes i = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$, $e_2 = 1 \otimes j = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \otimes k = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes k = \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix}$
5	$\mathbb{C}(4)$	
6	$\mathbb{R}(8)$	
7	$\mathbb{R}(8)\oplus\mathbb{R}(8)$	
8	$\mathbb{R}(16)$	

C_n'	e_i'
$\mathbb{R}$	—
$\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}$	$e_1 = (1, -1)$
$\mathbb{R}(2)$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{C}(2)$	$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{H}(2)$	$e_1 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = 1 \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = i \otimes \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & j \\ -j & 0 \end{pmatrix}$
$\mathbb{H}(2)\oplus\mathbb{H}(2)$	
$\mathbb{H}(4)$	
$\mathbb{C}(8)$	
$\mathbb{R}(16)$	

עם המתכנן:

$$\mathbb{H}(2) \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}(4) \qquad i \mapsto \begin{pmatrix} i & \\ & -i \end{pmatrix} \quad j \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad k \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} i & & & \\ & -i & & \\ & & i & \\ & & & -i \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

$$e_2 \mapsto \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +1 \end{smallmatrix} \\ \begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & +1 \end{smallmatrix} & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_3 \mapsto \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & -k \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & i & & 0 \\ i & 0 & & \\ & & 0 & -i \\ 0 & & -i & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$e_4 \mapsto \begin{pmatrix} 0 & k \\ k & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & \begin{smallmatrix} & 1 \\ -1 & \end{smallmatrix} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

מכניקה קלאסית וקוונטית למתמטיקאים 10 לאפריל 1997

1. הרצאה מספר.

2. משוואת Dirac:

$$i\hbar\left(\sum_{i=0}^{3} e_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Psi = mc^2\Psi \qquad i\hbar \not{\partial}\Psi = mc^2\Psi$$

$$\sum e_i p_i \Psi = mc^2\Psi \qquad \not{p}\,\Psi = mc^2\Psi$$

צימוד מינימלי:

$$p_i \longrightarrow p_i - eA_i$$

הגבול הלא-יחסותי...

מכניקה קלסית וקוונטית סטטיסטית 13 באפריל 1997.

$$\not{\pi}\Psi = mc\Psi$$ משוואת דירק: $$\pi_\alpha = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x_\alpha} - eA_\alpha$$

משוואת דירק; $$e_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{i-} \\ \sigma_{i+} & 0 \end{pmatrix} \qquad e_0 = \frac{1}{c}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(-i\hbar\partial_t - eA_0)\Psi_+ = c\sum\sigma_{i-}(i\hbar\partial_{x_i} + eA_i)\Psi_- + mc^2\Psi_+$$

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\Psi_- = c\sum\sigma_{i+}(i\hbar\partial_{x_i} + eA_i)\Psi_+ + mc^2\Psi_-$$

$$(-i\hbar\partial_t - eA_0)\tilde{\Psi}_+ = c\sum\sigma_{i-}(i\hbar\partial_{x_i} + eA_i)\tilde{\Psi}_- \Leftarrow \Psi = e^{\frac{imc^2}{\hbar}t}\tilde{\Psi}$$

$$(i\hbar\partial_t + eA_0)\tilde{\Psi}_- = \underline{c\sum\sigma_{i+}(i\hbar\partial_{x_i} + eA_i)\tilde{\Psi}_+} + \underline{2mc^2\tilde{\Psi}_-}$$

הנחה:

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים, ו כשאי 1997.

המשך מה- 13 דירק:

נגדיר $\tilde{\Psi}_- = \frac{1}{2mc} \sum \sigma_{i+} (i\hbar \partial_{x_i} + eA_i) \tilde{\Psi}_+$

ולכן $(-i\hbar \partial_t - eA_0) \tilde{\Psi}_+ = \frac{1}{2m} \sum_{i,j} \sigma_{i-} \sigma_{j+} (i\hbar \partial_{x_i} + eA_i)(i\hbar \partial_{x_j} + eA_j) \tilde{\Psi}_+$

יחסים: $\sigma_{i-} \sigma_{i+} = -1 \; ; \; \sigma_{i-} \sigma_{j+} + \sigma_{j-} \sigma_{i+} = 0 \,.$

נסמן $\gamma_k = \sigma_{i-} \sigma_{j+}$ ונקבל

$\gamma_i \gamma_j = \gamma_k$

$\gamma_k^2 = -1$

$\gamma_j \gamma_i = \sigma_k \sigma_i \sigma_j \sigma_k = -\sigma_i \sigma_j = -\gamma_k$

$$= \frac{1}{2m} \left(-\sum (i\hbar \partial_{x_i} + eA_i)^2 \Psi_+ + \sum \gamma_k [i\hbar \partial_{x_i} + eA_i , i\hbar \partial_{x_j} + eA_j] \right) \tilde{\Psi}_+$$

$=$

מכניקה [illegible] קוונטית רלטיביסטית, 4 במאי 1997

משוואת דירק: $\pi_\alpha = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \alpha} (-eA_\alpha)$

$$\pi \Psi = mc\Psi$$

$$(e_0 P_0 + \sum e_i P_i)\Psi = mc\Psi$$

$$\frac{1}{c^2} P_0 \Psi = mc e_0 \Psi - \sum \underbrace{e_0 e_i}_{F_i} P_i \Psi = mc e_0 \Psi - \sum F_i P_i \Psi$$

$$e_0 F_i = \frac{1}{c} e_i \qquad F_i e_0 = -\frac{1}{c} e_i \Rightarrow \{e_0, F_i\} = 0$$

מצא S כך ש-

$$e^{iS}(mc e_0 + \sum P_i F_i) e^{-iS} = \begin{pmatrix} \cdot & \\ & \cdot \end{pmatrix} = \lambda e_0$$

Bjorken & Drell
"Relativistic Quantum Mechanics"
Section 1 & 4

1.1 Formulation of a Relativistic Quantum Theory

Since the principles of special relativity are generally accepted at this time, a correct quantum theory should satisfy the requirement of relativity: laws of motion valid in one inertial system must be true in all inertial systems. Stated mathematically, relativistic quantum theory must be formulated in a Lorentz covariant form.

In making the transition from nonrelativistic to relativistic quantum mechanics, we shall endeavor to retain the principles underlying the nonrelativistic theory. We review them briefly:[1]

1. For a given physical system there exists a state function Φ that summarizes all that we can know about the system. In our initial development of the relativistic one-particle theory, we usually deal directly with a coordinate realization of the state function, the wave function $\psi(q_i \cdots, s_i \cdots, t)$. $\psi(q,s,t)$ is a complex function of all the classical degrees of freedom, $q_1 \cdots q_n$, of the time t and of any additional degrees of freedom, such as spin s_i, which are intrinsically quantum-mechanical. The wave function has no direct physical interpretation; however, $|\psi(q_1 \cdots q_n, s_1 \cdots s_n, t)|^2 \geq 0$ is interpreted as the probability of the system having values $(q_1 \cdots s_n)$ at time t. Evidently this probability interpretation requires that the sum of positive contributions $|\psi|^2$ for all values of $q_1 \cdots s_n$ at time t be finite for all physically acceptable wave functions ψ.

2. Every physical observable is represented by a linear hermitian operator. In particular, for the canonical momentum p_i the operator correspondence in a coordinate realization is

$$p_i \rightarrow \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial q_i}$$

3. A physical system is in an eigenstate of the operator Ω if

$$\Omega\Phi_n = \omega_n\Phi_n \tag{1.1}$$

where Φ_n is the nth eigenstate corresponding to the eigenvalue ω_n. For a hermitian operator, ω_n is real. In a coordinate realization the equation corresponding to (1.1) is

$$\Omega(q,s,t)\psi_n(q,s,t) = \omega_n\psi_n(q,s,t)$$

[1] See, for example, W. Pauli, "Handbuch der Physik," 2d ed., vol. 24, p. 1, J. Springer, Berlin, 1933. L. I. Schiff, "Quantum Mechanics," 2d ed., McGraw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955. P. A. M. Dirac, "The Principles of Quantum Mechanics," 4th ed., Oxford University Press, London, 1958.

4. The expansion postulate states that an arbitrary wave function, or state function, for a physical system can be expanded in a complete orthonormal set of eigenfunctions ψ_n of a complete set of commuting operators (Ω_n). We write, then,

$$\psi = \sum_n a_n\psi_n$$

where the statement of orthonormality is

$$\sum_s \int (dq_1 \cdots)\psi_n^*(q_1 \cdots, s \cdots, t)\psi_m(q_1 \cdots, s \cdots, t) = \delta_{nm}$$

$|a_n|^2$ records the probability that the system is in the nth eigenstate.

5. The result of a measurement of a physical observable is any one of its eigenvalues. In particular, for a physical system described by the wave function $\psi = \Sigma a_n\psi_n$, with $\Omega\psi_n = \omega_n\psi_n$, measurement of a physical observable Ω results in the eigenvalue ω_n with a probability $|a_n|^2$. The average of many measurements of the observable Ω on identically prepared systems is given by

$$\langle\Omega\rangle_\psi \equiv \sum_s \int \psi^*(q_1 \cdots, s \cdots, t)\Omega\psi(q_1 \cdots, s \cdots, t)(dq_1 \cdots) = \sum_n |a_n|^2\omega_n$$

6. The time development of a physical system is expressed by the Schrödinger equation

$$i\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t} = H\psi \tag{1.2}$$

where the hamiltonian H is a linear hermitian operator. It has no explicit time dependence for a closed physical system, that is, $\partial H/\partial t = 0$, in which case its eigenvalues are the possible stationary states of the system. A superposition principle follows from the linearity of H and a statement of conservation of probability from the hermitian property of H:

$$\frac{d}{dt}\sum_s \int \psi^*\psi(dq_1 \cdots) = \frac{i}{\hbar}\sum_s \int (dq_1 \cdots)[(H\psi)^*\psi - \psi^*(H\psi)] = 0 \tag{1.3}$$

We strive to maintain these familiar six principles as underpinnings of a relativistic quantum theory.