סילבוס לקורס "מבוא לטופולוגיה"

האוניברסיטה העברית, סתיו 1995

מרצה: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.
שעות קבלה: ימי ראשון 12:00-13:00 או לפי קביעה מראש.
תחילת הקורס: יום ראשון ה-3 למרץ 1996.
משך הקורס: 14 פגישות של שעתיים בימי ראשון בשעה 10 בבוקר בבנין אינשטיין חדר 110, ו-13 פגישות של שעה אחת בימי חמישי בשעה 2 בצהריים בבניין לוין חדר 8.
מתרגל: זיו שמי, לובין 119, דואר אלקטרוני zivs@math.huji, טלפון בבית (למקרים דחופים בלבד) 785-362.
שעות התרגול: שני ב-17:00 וחמישי ב-15:00 בשפרינצק 213. בשתי השעות יועבר חומר זהה, וחובה להשתתף לפחות באחת מהן.

מטרת הקורס: השגת הבנה מעמיקה של המושג היסודי ביותר בטופולוגיה - מושג הרציפות, ושל מושגים אחרים הקשורים אליו - קשירות, קומפקטיות, וכדומה. הבנת החבורה היסודית, ומעט על המיון של משטחים ושל קשרים.

נושאי הלימוד:

1. מרחבים טופולוגיים ופונקציות רציפות.
2. תתי-מרחבים, מרחבי מכפלה ומנה.
3. מרחבים מטריים.
4. מרחבים קשירים ומשפט ערך הביניים.
5. מרחבים קומפקטיים ומשפט הערך המירבי.
6. קומפקטיות ושלמות במרחבים מטריים.
7. אקסיומת הבחירה, על-מסננים, התכנסות של על-מסננים, ומשפט טיכונוף.
8. משפט המיון של משטחים.
9. החבורה היסודית בכלל ושל המעגל בפרט, משפט נקודת השבת של בראור.
10. משפט ואן-קמפן ושימושים, הצגת וירטינגר לחבורה היסודית של המשלים של קשר.

ספרות:

1. J.R. Munkres, Topology - a First Course, Prentice-Hall, NJ 1975 (מקור עיקרי)
2. W.S. Massey, A Basic Course in Alg. Top., Springer-Verlag, NY (משני)
3. מקורות אחרים ע"פ הצורך.

בשעות התרגול (ולעיתים גם בשיעור) ינתנו תרגילים (להגשה בתוך שבוע). ציון התרגיל יהווה 15% מהציון הכולל בקורס.

מבוא לטופולוגיה, 3 במרץ 1996

רציפות:

$\forall x_0\in\mathbb{R}\ \forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in\mathbb{R}\ |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\epsilon$

רעיון: לנסח מחדש בעזרת קבוצות פתוחות, למצוא תכונות ולהכליל.

<u>הגדרה</u> $U\subseteq\mathbb{R}$ פתוחה אם $x_0\in U \Rightarrow \exists\epsilon>0$ s.t. $B_\epsilon(x_0)\subseteq U$ כאשר
$B_\epsilon(x_0)=\{x: |x-x_0|<\epsilon\}$

<u>דוגמאות</u> $[0,1]$, $(0,1)$

<u>טענה</u> f רציפה אם״ם $f^{-1}(U)$ פתוחה לכל U פתוחה.

<u>תכונות</u> 1. $\emptyset,\mathbb{R}$
2. $\cup$
3. $\cap$

<u>הגדרה</u> טופ׳. $(X,\mathcal{T})$

<u>הגדרה</u> פונקציה רציפה. <u>דוגמא</u> הרכבה של פונקציות רציפות היא רציפה.

<u>דוגמאות</u> טריוויאלית, דיסקרטית, רגילה על $\mathbb{R}^n$.

<u>הגדרה</u> בסיס לטופולוגיה: $\mathcal{B}$ כך ש:
1. $\forall x\in X\ \exists B\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B$
2. $B_{1,2}\in\mathcal{B},\ x\in B_1\cap B_2 \Rightarrow \exists B_3\in\mathcal{B}$ s.t. $x\in B_3\subseteq B_1\cap B_2$

<u>דוגמאות</u> $\{(a,b)\}$ $\mathcal{B}$ שונים
$\{[a,b)\}$
טופולוגית הסדר.

<u>משפט</u> 1. $X,\mathcal{B} \Rightarrow$ א. קיימת טופולוגיה מינימלית $\mathcal{T}_\mathcal{B}$ המכילה את $\mathcal{B}$
ב. $U\in\mathcal{T}_\mathcal{B} \Leftrightarrow \forall x\in U\ \exists B\in\mathcal{B}\ x\in B\subseteq U$
ג. $\mathcal{T}_\mathcal{B}=$ {איחודי כל האיברים}
2. $X,\mathcal{T}$. $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{T}$ הוא בסיס <u>של</u> $\mathcal{T}$ אם״ם מקיים התנאי.

<u>הגדרה</u> $\mathcal{T}_1\neq\mathcal{T}_2$ אזי $\mathcal{T}_1$ חזקה (גדולה, עדינה) מ-$\mathcal{T}_2$ ו-$\mathcal{T}_2$ חלשה (קטנה, גסה) מ-$\mathcal{T}_1$

תרגיל 1 - טופולוגיה.

1) יהי X מרחב טופולוגי, $A\subseteq X$ (תת קבוצה) ונניח שלכל $x\in A$ יש קבוצה פתוחה U כך ש- $x\in U\subseteq A$, הראה ש-A קבוצה פתוחה.

2) יהי $Y=[-1,1]$ בטופולוגיה היחסית המושרית מ-$\mathbb{R}$ (כלומר קבוצה היא פתוחה ב-Y אם ורק אם היא חיתוך של Y עם קבוצה פתוחה של $\mathbb{R}$) קבע לגבי כל אחת מהקבוצות הבאות, האם היא פתוחה:

א) $A=\{x \mid \frac{1}{2}<|x|<1\}$ ב) $B=\{x \mid \frac{1}{2}<|x|\leq 1\}$

ג) $C=\{x \mid \frac{1}{2}\leq|x|\leq 1\}$ ד) $D=\left\{x \;\middle|\; \begin{matrix} 0<|x|<1 \\ 1/x\notin\mathbb{Z}\end{matrix}\right\}$

3) יהי X קבוצה, נגדיר

$$\mathcal{F}=\{A\subseteq X \mid X\setminus A \text{ סופית}\}$$

א) האם $\mathcal{F}$ טופולוגיה על X?

ב) מתי $\mathcal{F}$ הינה הטופולוגיה הדיסקרטית על X?

4) יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים, $f:X\to Y$ פונקציה כלשהי, $x_0\in X$, נאמר ש-f רציפה בנקודה x_0 אם לכל קבוצה פתוחה $f(x_0)\in V\subseteq Y$ יש קבוצה פתוחה $x_0\in U\subseteq X$ כך ש- $f(U)\subseteq V$.

הוכח: f רציפה (במובן שהוגדר בכיתה) $\iff$ f רציפה בכל $x\in X$, לכל $x\in X$.

מבוא לטופולוגיה, 7 במרץ 1996

מטרת היום: עוד דוגמאות לטופולוגיות.

תזכורת: 1. ~~טופולוגיה~~ טופולוגיה, פונקציה רציפה

2. הטופולוגיה הרגילה על $\mathbb{R}$. (דוגמה: דיסקרטית, גדולה, קטנה, טריוויאלית, משלים סופי, מעורבת)

3. בסיס לטופולוגיה.

משפט 1. בהינתן $(X,\mathcal{B})$ קיימת $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ עם תכונות:

א. מינימלית שמכילה את $\mathcal{B}$ (ויחידה כזו)

ב. $V\in \mathcal{T}_{\mathcal{B}} \iff \forall x\in V\ \exists B\in\mathcal{B}\ x\in B\subseteq V$

ג. אוסף כל האיחודים.

בהינתן $(\mathcal{T},X)$ בסיס

דוגמה: טופולוגית הסדר: $\mathcal{B}=\{(a,b),[a_0,b),(a,b_0]\}$

1. קבוצה סדורה לגמרי: $x\neq y \iff x<y$ או $y<x$

~~קבוצה סדורה~~

ב. רציונליים.

$\mathbb{Z}\otimes\{0,1\}$ דוגמה א.

ג. $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ בסדר מילוני.

טופולוגיית המכפלה: א. $\pi_{X\times Y}$ רציפות:

$$X\times Y \xrightarrow{\pi_X} X,\qquad X\times Y \xrightarrow{\pi_Y} Y$$

ג. $f,g: Z\to X,Y$ רציפות $\Leftarrow$ $f\times g: Z\to X\times Y$ רציפה

משפט קיימת טופולוגיה יחידה כזו.

הוכחה: א. יחידות

ב. קיום. בסיס הוא $\{U\times V: \dots\}$

טופולוגיה משרה: א. $Y\subset X$, $i: Y\hookrightarrow X$ רציפה.

ב. משפט קיימת ויחידה.

ג. תכונות פשוטות:

1. $Z\subset Y\subset X$ (משפט 3.16 בספר)

2. $A\times B\subset X\times Y$

f רציפה $\Leftarrow$ g רציפה.

$$\begin{tikzcd} & Z \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[rr, hook] & & X \end{tikzcd}$$

מבוא לטופולוגיה, 10 במרץ 1996

דוגמה של $\mathbb{R}$, הטופולוגיה שבסיסה $[a,b)$ $\mathcal{T}_{\text{קרן}}$

משפט: רציפות ע"פ טופולוגיה זו $\Longleftrightarrow$ רציפות מימין.

ומי-רגיל. תרגיל: $F:(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{רגיל}})\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_{\text{קרן}})$ (תרגיל)

$F:(\mathbb{R},\mathcal{T}_1)\to(\mathbb{R},\mathcal{T}_2)$: משמאל? רציפה?

$F:\mathcal{T}_2\to\mathcal{T}_1$ מימין? רציפה?

טופולוגית המכפלה והטופולוגיה המושרה בשיעור הקודם.

קבוצות סגורות ושלוש התכונות שלהן.

$Int_{\mathcal{T}} A=\mathring{A}$; $cl_{\mathcal{T}} A=\bar{A}$

משפט: $x\in\bar{A}$ אמ"מ כל סביבה (בסיסית) של x חותכת את A

הגדרה: נקודת גבול היא נקודה המקיימת $x\in\overline{A-\{x\}}$

משפט: $\bar{A}=A\cup A'$, ואיחוד לאו דווקא זר.

דוגמאות: $A=\{\frac{1}{n}\}$; $A=\mathbb{Q}$

מרחבי האוסדורף (T_2): הגדרה.

דוגמאות: 1. $\mathbb{R}$ הוא T_2

2. $\mathcal{T}=(n,\infty)$ לא

מה חסר? נקודה

משפט: קבוצה בת איבר אחד היא סגורה במרחב האוסדורף

משפט: X T_2 ו- $x\in A'$ $\Longleftrightarrow$ כל סביבה של x חותכת את A ב-∞ נקודות.

משפט: 1. תת מרחב של T_2

2. מכפלה של T_2

3. תמונה מרחבית של T_2 היא T_2

משפטים שבלל זה:
"בסיס וסגורות"
"סגירות בתת-מרחב"
"טופולוגיה הסגור."

תרגיל 2 — טופולוגיה.

1) יהא $\mathbb{R}_\ell$: $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הנוצרת ע"י קטעים מהצורה $[a,b)$, $a<b$.

א) הראה שהטופ' עדינה יותר מהטופ' הרגילה על $\mathbb{R}$ וכן ש- $\{[a,b) \mid a<b\}$ הינן בסיס של קבוצות פתוחות וסגורות לטופ' של $\mathbb{R}_\ell$.

ב) הראה ש- $\mathbb{R}_\ell$ אינו דיסקרטי וכן קטע סגור $[a,b]$ אינו קבוצה פתוחה בטופ'!

2) יהא X מ"ט (= מרחב טופולוגי), $A\subseteq X$ צפופה (כלומר $\overline{A}=X$), $U\subseteq X$ ק"פ (= קבוצה פתוחה)

אזי: $U \subseteq \overline{A\cap U}$

3) א) הראה ש- $\mathbb{R}_\ell\times\mathbb{R}_\ell$ אינו דיסקרטי.

ב) האלכסון $\{(x,y)\in\mathbb{R}_\ell^2 \mid x=-y\}$ דיסקרטי בטופ' היחסית המושרית מ- $\mathbb{R}_\ell^2$.

4) יהיו X, Y מרחבים טופולוגיים, $X=A_1\cup A_2$

$f_i: A_i\to Y$ רציפות ונניח ש- $f_1|_{A_1\cap A_2}=f_2|_{A_1\cap A_2}$

הוכח שאם A_1, A_2 סגורות אזי $f:X\to Y$

המוגדרת ע"י
$$f(x)=\begin{cases} f_1(x) & x\in A_1 \\ f_2(x) & x\in A_2\end{cases}$$
רציפה.

ובנוסף: ב)

5) $A=\{0\}\cup\{x\in\mathbb{R} \mid |x|>1\}$ בטופ' הסדר והיחסית

נראה שהטופ' שונות.

א) הטופ' היחסית והסדר (a,b) הקטעים לסדר קווי הטופ' נותן אותה טופ'.

מבוא לטופולוגיה, 14 למרס 1996

1. השיעור הבא - בסמי-נצק 214
2. טעות במבחן הטופולוגיה המושרה/סדר.
3. $Y\subset X$ הטופולוגיה על Y היא היחידה שעבורה לכל Z, $f:Z\to Y$, $f:Z\to Y$ רציפה אמ"ם $f:Z\to X$ רציפה.

תזכורת: $int_{\mathcal{T}} A=\mathring{A}$; $cl_{\mathcal{T}} A=\bar{A}$

<u>תכונות:</u> $\mathring{\mathring{A}}=\mathring{A}$; $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$, $\bar{A}^c=int(A^c)$, $cl A^c=\mathring{A}^c$, ...

אם $A\subset B$ אז $\bar{A}\subset\bar{B}$ ו- $\mathring{A}\subset\mathring{B}$, $A=\bar{A}$ אמ"ם A סגורה.

<u>דוגמאות:</u> 1. $x\in\bar{A}$ אמ"ם כל סביבה (בסיסית) של x חותכת את A.

2. $A'=\{\text{נק' הצטברות של } A\}=\{x: x\in\overline{A-\{x\}}\}$

דוגמאות: 1. [illegible] 2. $\mathbb{Q}$

$\bar{A}=A\cup A'$

~~<u>משפט</u> הבאים שקולים: f: 1. f רציפה 2. $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$ 3. $f^{-1}(\text{סגורה})=\text{סגורה}$~~

נושאים שנדלג עליהם: 1. "בסיס לסגורות" 2. "סגירות בתת מרחב" 3. אופרטור הסגור.

הגדרת האוסדורף/ T_2 דוגמאות: 1. $\mathbb{R}$ הוא T_2 2. $\mathcal{T}=(a,\infty)$ לא T_2

<u>משפט</u> במרחב האוסדורף, קבוצות סופיות הן סגורות.

<u>משפט</u> 1. מכפלה של מרחבי T_2 הוא T_2.
2. תת מרחב של T_2 הוא T_2.
3. טופולוגית הסדר היא T_2 לכל סדר.

<u>משפט</u> X T_2 ו- $x\in A'$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של x חותכת את A ב- ∞ נקודות.

הוכחת 2⇐3: יהי $x\in\bar{A}$ צ"ל $f(x)\in\overline{f(A)}$
1⇐3: צ"ל $f^{-1}(A)$ סגורה. תהי $x\in\overline{f^{-1}(A)}$ אזי $f(x)\in f(\overline{f^{-1}(A)})\subset\overline{f(f^{-1}(A))}\subset\bar{A}=A$
כלומר $x\in f^{-1}(A)$

מבוא לטופולוגיה, 17 במרץ 1996

טענה הבאות: 1. f רציפה
2. $f(\bar{A}) \subset \overline{f(A)}$
3. f^{-1}(סגורה) היא סגורה.

תהי A סגורה, נב' $f^{-1}(A)$ סגורה.
תא' $x \in \overline{f^{-1}(A)}$
$f(x) \in f(\overline{f^{-1}(A)}) \subset \overline{f(f^{-1}(A))} \subset \bar{A} = A$

הערה הרכבה של רציפות היא רציפה.

הגדרה מרחב נקרא האוסדורף (T_2) אם .... – – –
יש גם T_0, T_1, T_3, $T_{3\frac{1}{2}}$, T_4

דוגמאות 1. $\mathbb{R}$
2. $\mathcal{B} = (a, \infty)$

משפט 1. מכפלה של T_2 היא T_2
2. תת-מרחב של T_2 הוא T_2
3. טופ' הסדר היא T_2

מכפלות אינסופיות $\prod_{\alpha \in I} X_\alpha = \{(p_\alpha)_{\alpha\in I} : p_\alpha \in X_\alpha\} = \{p : I \to \bigcup X_\alpha : \overset{\forall}{\alpha}\ p_\alpha \in X_\alpha\}$

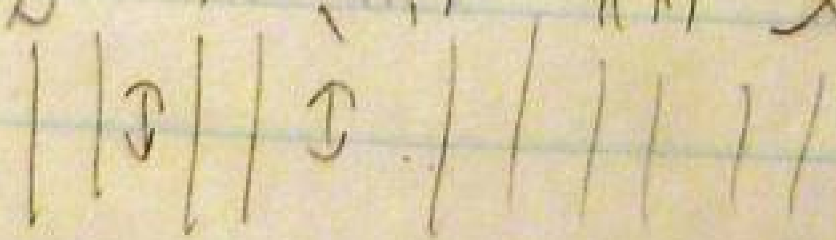
דוגמאות $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ – חשוב בתורת ההסתברות –
$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ –
$\prod_{n\in\mathbb{N}} [0,n]$

אפשרות א לבחור את הבסיס ל $\mathcal{B} = \{\prod U_\alpha : U_\alpha \in \mathcal{T}_\alpha\}$ "טופולוגית הקופסאות"

אפשרות ב להבטיח את הדרישות: א. $\pi_\alpha : \prod X_\alpha \to X_\alpha$ רציפה לכל α.
ב. $f : Z \to \prod X_\alpha$ רציפה אם לכל α $\pi_\alpha \circ f$ רציפה.
"טופולוגית המכפלה" ("טופולוגיית הגלילים")

טענה טופולוגית הקופסאות לא מקיימת את ב. דוגמה: האלכסון $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

משפט טופולוגיית המכפלה קיימת והיא יחידה, ובסיסה $\mathcal{B} = \{\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_1) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_n)\}$



משפט 1. X_α T_2 לכל α $\Leftarrow$ $\prod X_\alpha$ T_2 בשתי הטופולוגיות.
2. X_α קשירות לכל α $\Leftarrow$ $\prod X_\alpha$ קשירות בשתי הטופולוגיות.
3. X_α דיסקרטיות לכל α $\Leftarrow$ $\prod X_\alpha$ דיסקרטית בקופסאות, אך לא דיסקרטית בטופ' המכפלה.

הגדרה מטריקה. 1. Pos 2. Sym 3. Δ. דוגמאות: א. $\mathbb{R}^n$, ב. דיסקרטית, ג. $\{0,1\}^\infty$, ד. $C(X)$

הגדרה $B_r(x)$, הטופ' המושרית. ; מרחב מטריזבילי.

משפט מרחב מטריזבילי הוא תמיד T_2.

משפט $\prod X_i$ מטריזבילי אמ"מ X_i מטריזבילי לכל i.
מנייה המכפלה.

1ג

תרגיל 3 – טופולוגיה

1. א. הוכח ל- $\tau = \{\phi\} \cup \{X \subseteq \mathbb{R} \mid \mathbb{R} \setminus X \text{ סופי}\}$ יש בסיס בן מנ"ה?

ב. אם ל- $\{X_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ (מ"ט) יש בסיס בן מנייה (לכל i) אזי גם ל- $\prod_{i \in \mathbb{N}} X_i$ בטופ' <u>המכפלה</u> יש בסיס בן מנ"ה.

ג. אם ל- X (מ"ט) יש בסיס בן מנ"ה, אזי לכל $Y \subseteq X$ (בטופ' היחסית) יש גם בסיס בן מנ"ה.

ד. ל- $\mathbb{R}_l$ אין בסיס בן מנ"ה.

2. מרחב X נקרא <u>ספרבילי</u> אם יש $D \subseteq X$ צפופה בת מנ"ה.

א. האם $\mathbb{R}, \mathbb{R}_l$ ספרבילים?

ב. האם הדוגמא מ- 1א ספרבילית?

ג. ל- X יש בסיס בן מנ"ה $\Leftarrow$ X ספרבילי?

3. האם ההפך (ל-ג) נכון?

3. א. אם $\{X_i\}_{i \in I}$ מ"ט, $A_i \subseteq X_i$ אזי <u>בטופ' הקופסאות</u>

על- $\prod_{i \in I} X_i$ מתקיים $Int(\prod_{i \in I} A_i) = \prod_{i \in I} Int(A_i)$

ב. האם בטופ' המכפלה אותו דבר נכון?

4. יהא X מרחב האוסדורף, I קבו' (אינדקסים) אזי $\Delta_X = \{(x)_{i \in I} \mid x \in X\}$ סגורה ב- $\prod_{i \in I} X_i$.

ע' 2

5 (רשות)

אם $A, B \subseteq \mathbb{R}$ צפופות בנות מנ"ה אזי

צפופ' היחסי' A, B הומיאומורפיים, <u>כלומר:</u>

יש $f: A \to B$ רציפה, פתוחה חח"ע ועל.

מבוא לטופולוגיה, כו למרץ 1996

תזכורת: 2 טופולוגיות על מרחבי מכפלה אינסופיים.

__הגדרה__ מטריקה: 1. pos 2. sym 3. Δ

__דוגמאות__ א. $\mathbb{R}^n$

ב. דיסקרטית

ג. l^∞

ד. $C_0(X)$

__הגדרות__ $B_r(x)$, הטופולוגיה המטרית, מרחב מטריזבילי.

__הערה__ לא כל מרחב הוא מטריזבילי, ואם הוא כבר כן, המטריקה לא רחוקה מלהיות יחידה.

__משפט__ תת-מרחב של מטריזבילי הוא מטריזבילי

מטריזבילי הוא תמיד T_4

__משפט__ $\prod_{i=1}^{\infty} X_i \neq \emptyset$ מטריזבילי במכפלה אם"ם X_i מטריזבילי לכל i

__רעיון ההוכחה__ $D(x,y)=\sup \frac{d(x_i,y_i)}{i}$.

[illegible] __הגדרנו__ התכנסות של סדרה.

__משפט__ תהי $A\subset X$. א. אם $\{x_n\}\subset A$ ו- $x_n\to x$ אזי $x\in\bar{A}$

ב. אם X מטריזבילי ו- $x\in\bar{A}$, אזי קיימת $A\ni x_n\to x$.

__מסקנה__ $\mathbb{R}^\omega$ אינו מטריזבילי בקופסאות.

__הוכחת המסקנה.__ $A=\{(x_i): x_i>0\}$, $P=(0,0,\ldots 0)$

א. $P\in\bar{A}$ ב. אין סדרה $P_n\in A$ מתכנסת ל-P.

~~הוכחת המשפט~~

__משפט__ $f:X\to Y$ (כאשר X מטריזבילי) רציפה אם"ם $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$

מבוא לטופולוגיה, 24 למרץ 1996.

<u>הגדרת התכנסות</u>

<u>משפט</u> תהי $A\subset X$. א. אם $\{x_n\}\subset A$ ו- $x_n\to x$ אזי $x\in\bar{A}$

ב. אם X מטריזבילי ו$x\in\bar{A}$, אזי קיימת $\{x_n\}\subset A$ עם $x_n\to x$

״בכל מרחב, הסגור הסדרתי מוכל בסגור, ובמרחב מטריזבילי הם שווים״

משפט: $f: X\to Y$ (כשX מטריזבילי) היא רציפה אמ״ם $x_n\to x \Rightarrow f(x_n)\to f(x)$

<u>מסקנה</u> $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}_{box}$ אינו מטריזבילי. <u>הוכחה</u> $A=\{(x_i): x_i>0 \ \forall i\}$, $p=(0,0\ldots0)$

א. $p\in\bar{A}$

ב. אין סדרה $p_n\in A$ המתכנסת ל- p.

<u>משפט</u> ~~אם~~ X_i מטריזבילי לכל i אזי $X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$ מטריזבילי במכפלה. עבור $X_i\neq\emptyset$

<u>הוכחה</u> נקח $D(x,y)=\sup_i \frac{\bar{d}_i(x_i,y_i)}{i}$ כאשר $x=(x_i)\in X$. צ״ל.

א. כל סביבה של x בטופ׳ המכפלה מכילה סביבה מטרית.

ב. כל סביבה מטרית של x מכילה סביבה בטופ׳ המכפלה.

א: נקח $r<\min$ ...

ב. עבור i גדול אין מגבלות.

<u>הגדרה</u> קבוצה סגוחה, מרחב קשיר: אין בו סגוחות חוץ מ- $\emptyset, X$

ב. לא ניתן להציגו כאיחוד זר של 2 לא ריקות פתוחות.

<u>הגדרה</u> תת קשירה.

<u>משפט</u> $X\subset\mathbb{R}$ היא קשירה אמ״ם היא קטע או קרן/הכל

<u>הוכחה</u> X קשירה ואינה קטע או קרן - קיימות x,y,z, $x<z<y$, $x,y\in X$, $z\notin X$

X קטע או קרן: נניח $U\subset X$ סגוחה, $x\in U$, $y\in X\setminus U$.

בה״כ $x<y$. נגדיר $V=U\cap[x,y]$ סגוחה ב-$[x,y]$, ויהי $z=\sup V$ אזי $x\le z\le y$

אם $z<y$ אזי מסגירות $z\in U$ ומפתיחות $\exists\varepsilon$ $z+\varepsilon\in U$ סתירה.

או $z=y$ מסגירות $y=z\in U$ סתירה.

(תרגיל: [illegible] קבוצה ימני)

<u>משפט</u> תמונה רציפה של קשירה היא קשירה.

<u>משפט</u> ערך הביניים.

מבוא לטופולוגיה, 28 במרץ 1996

תזכורת: סגורה, קשירה, קשירות ב-$\mathbb{R}$, תמונה רציפה של קשירה היא קשירה, משפט ערך הביניים.

קשירות במרחבי מכפלה:

למה אם A_α קשירות ו $\bigcap A_\alpha \neq \emptyset$, אזי $\bigcup A_\alpha$ קשירה.

משפט אם X ו-Y קשירים, אזי $X\times Y$ קשיר.
[נובע משפט ערך הביניים ב-$\mathbb{R}^n$]

הוכחה

$$X\times Y = \bigcup_{x_0\in X}\left[(X\times\{y_0\})\cup(\{x_0\}\times Y)\right]$$

משפט אם A קשירה ו- $A\subset B\subset \bar{A}$, אזי B קשירה.

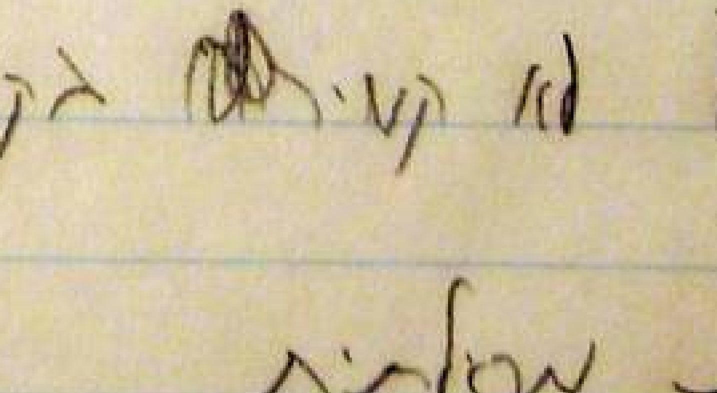
הוכחה נניח $C\subset B$ סגורה לא ריקה. מפתיחות, C חותכת את A. מסגירות וקשירות, $A\subset C$. מסגירות, $C=B$.

משפט $\prod X_\alpha$ קשירה (בגלגלון) אם"ם X_α קשיר לכל α

דוגמא $\mathbb{R}^\omega$ לא קשירה בקופסאות.

הגדרה קשירות מסילתית.

משפט קשירות מסילתית $\Rightarrow$ קשירות

דוגמא  קשירה אך לא קשירה מסילתית.

משפט X_α קשיר מסילתית $\Rightarrow$ $\prod X_\alpha$ קשיר מסילתית בגלגלון.

דוגמא $\mathbb{R}^\omega$ לא קשיר מסילתית בקופסאות.

מבוא לטופולוגיה, 14 לאפריל 1996

יובל דיבר על "חיתוך בן מניה של צפופות פתוחות במרחב מטרי שלם הוא צפוף"

דוגמאות: 1. לא קיימת פונקציה שהיא רציפה רק על הרציונליים.
2. קיימת פונקציה רציפה שאינה גזירה בשום מקום.

מבוא לטופולוגיה, 18 לאפריל 1996

במרחב מטרי שלם קבוצה שהיא חיתוך בן מניה של פתוחות צפופות היא "גדולה", "ממלאת את המרחב".

דוגמא $C[0,1]$ - פונקציות רציפות על $[0,1]$ במטריקה $d(f,g)=\sup|f-g|$ עם ערך ממשי.

$V_n = \{f\in C[0,1] : \exists\ 0=x_1<\dots<x_k=1$ שעבורם $\left|\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\right|>n\}$

1. V_n פתוחה
2. V_n צפופה
3. $\bigcap V_n$ - פונקציות שאין גזירות בשום נקודה.

תזכורת: קשירות

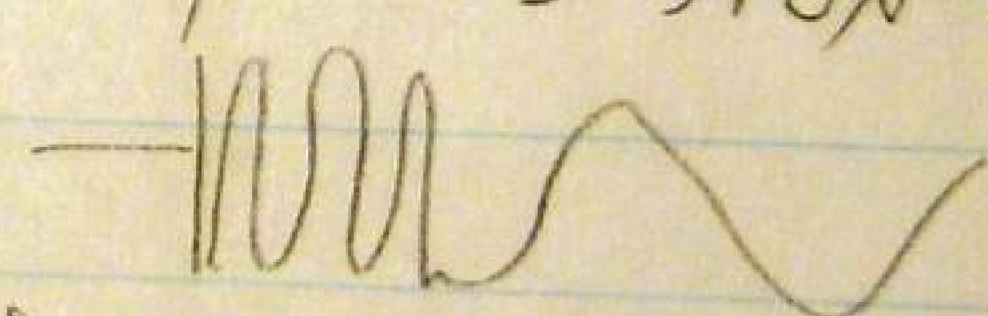
$\prod X_\alpha$ קשירה בגלילים אך לא בטו-תאום קופסאות.

הגדרה קשירות מסילתית

משפט קשירות מסילתית $\Rightarrow$ קשירות.

דוגמא

$\{(x,\sin\frac{1}{x}) : x>0\} \cup \{(0,y) : |y|\le 1\} \cup \{(x,0) : x<0\}$ =



קשירה אך לא קשירה מסילתית.

משפט X_α קשיר מסילתית $\Rightarrow$ $\prod X_\alpha$ קשירה מסילתית בגלילים

דוגמא $\mathbb{R}^\omega$ לא קשיר מסילתית בקופסאות.

מרחבים קומפקטיים.

מבוא לטופולוגיה, 21 לאפריל 1996

של A ב-X

קומפקטיות - הגדרה בעזרת כיסוי פתוח, קומפקטיות

משפט: פונקציה רציפה על מרחב קומפקטי היא חסומה.

משפט $[0,1]$ הוא קומפקטי

הוכחה $U=\{U_\alpha\}$

$x_0=\sup\{x\in[0,1] :$ $[0,x]$ ניתן לכיסוי ע"י מספר סופי של U_α-ים $\}$

1. $x_0>0$ (נכסה סביב $[0,1)$)
2. $x_0=1$
3. גמרנו

דוגמא $\mathbb{R}$ לא קומפקטי, $(0,1]$ לא קומפקטי

משפט 1. תת קבוצה סגורה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית.
2. תת קבוצה קומפקטית של מרחב בה"ד היא סגורה.

למה ניתן להפריד קב' קומפקטיות מנקודות זרות.

מסקנה $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ סגורה וחסומה.

משפט תמונה רציפה של מרחב קומפקטי היא קומפקטית

משפט משפט הערך המקסימלי.

משפט $X\times Y$ קומפקטי $\Leftrightarrow$ X,Y קומפקטיים (עוד לא רק)

הוכחה 1. נניח, הכיסוי הוא ע"י קב' קופסיות. $W_\alpha=U_\alpha\times V_\alpha$

2. לכל $x\in X$ קיימת סביבה N_x כך ש- $N_x\times Y$ ניתן לכיסוי ע"י מספר סופי של W_α-ים.

3. סיום המשפט.

התנאים הבאים:
1. רציפות במ"ש.
2. הלמה של לבג.

מסקנה $A\subset\mathbb{R}$ קומפקטית $\Leftrightarrow$ A סגורה וחסומה.

תרגיל 1. קב' קנטור קומפקטית
2. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}\cong C$
3. $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ לא קומפקטית דרך...

תרגיל 5 - טופולוגיה.

1. אם למרחב X יש בסיס בן-מנייה אזי לכל בסיס $\mathcal{B}$ של X יש $\mathcal{B}^* \subseteq \mathcal{B}$, $\mathcal{B}^*$ בסיס בן מנייה של X.

2. הראה שכל קבוצה פתוחה ב-$\mathbb{R}$ היא איחוד בן מנייה של קטעים פתוחים זרים בזוגות.

3. (a) אם X מ"ט, $f: X \to \mathbb{R}$ כלשהי, אזי קב' נקודות הרציפות של f היא קבוצה G_δ (כלומר: חיתוך של מס' בן מנ"ה של קבוצות פתוחות).

(b) ~~לא קיימת $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ כך שקבוצת נק' הרציפות של f היא בדיוק $\mathbb{Q}$. (הראה ש-$\mathbb{Q}$ אינה קב' G_δ)~~

$f \in C^\infty[0,1]$ כך שלכל x יש n כך ש- $f^{(n)}(x)=0$ $\Leftarrow$ f פולינום.

4. יהא X מרחב מטרי שלם ותהא $\mathcal{F} \subseteq C(X, \mathbb{R})$ ($C(X,\mathbb{R})$ - אוסף הפונקציות הרציפות מ-X ל-$\mathbb{R}$) כך ש- לכל $x \in X$ $\mathcal{F}_x = \{ f(x) \mid f \in \mathcal{F} \}$ חסומה, אזי יש קבוצה פתוחה $U \subseteq X$, ויש $M>0$ כך ש- $|f(x)| \le M$ $\forall f \in \mathcal{F}$ $\forall x \in U$.

5. אם X מרחב כך שלכל $x \in X$ יש סביבה המהווה מרחב בר (כטופ' היחסית) אזי X מרחב בר.
(Y מרחב בר אם: לכל $A_n \subseteq Y$ סגורות, $n \in \mathbb{N}$, A_n ללא פנים $\Leftarrow$ $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ גם ללא פנים)

6. (שאלת רשות)
היש פונקציה רציפה $f: [0,1] \to \mathbb{R}$ כך שאין תת קטע שבו f עולה חלש (בכל תת קטע) או יורדת חלש?

7. אם X מטרי קשיר, $|X| \ge 2$ $\Leftarrow$ $|X| \ge 2^{\aleph_0}$.

תרגיל 7 — טופולוגיה. (מגיש: עד 3 [illegible] בן-נון)

1) א) הוכח: $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{\aleph_0}$.

רמז: הרחב ל-$\beta\mathbb{N}$ סדרה שטווחה הוא כל הרציונליים בקטע $I=[0,1]$ (זכור שתמונה רציפה של קומפקטי היא קומפקטית)

ב) $|\beta\mathbb{N}| \geq 2^{(2^{\aleph_0})}$ (השתמש בעובדה ש-I^I ספרבילי והמשך כמו ב-א)

2) לא קיימת פונקציה על סדרות על ℓ^∞ (חסומות) המקיימת:

א) $L(a+b)=L(a)+L(b)$ לכל a,b

ב) $L(\{a_n\})=L(\{a_{n+1}\})$ לכל סדרה חסומה $\{a_n\}$.

ג) $L(a)\in\{$הגבולות החלקיים של $a\}$ (רמז: הסתכל על הסדרה $0,1,0,1,\ldots$ והזזתה)

3) X מטרי קומפקטי, $T: X\to X$ מקיימת $d(Tx,Ty) < d(x,y)$ $\forall x\neq y$

הוכח: אז יש x_0 יחיד ש-$Tx_0=x_0$

רמז: הסתכל על הפונקציה $f(x)=d(x,Tx)$

4) כמו כן: X מטרי קומפקטי. $d=\sup\{d(x,y) \mid x,y\in X\}$

הוכח: א) $d<\infty$

ב) יש x_0,y_0 ב-X כך ש-$d(x_0,y_0)=d$

מבוא לטופולוגיה, 28 אפריל 1996.

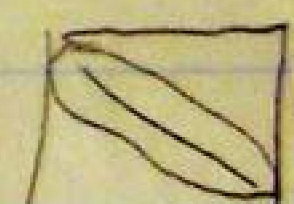
גז הוכח: יהי $F \subset \mathcal{P}(\prod X_\alpha)$ קב' סגורות בעל תכונת החיתוך הסופי. צ"ל $\bigcap_{S \in F} S \neq \emptyset$

$\Phi = \{ F \subset F' \subset \mathcal{P}(\prod X_\alpha)$ בעלות תכונת החיתוך הסופי $\}$ F^*: איבר מקסימלי ב Φ

תכונות: 1. F^* סגור תחת חיתוכים סופיים

2. אם U חותכת כל קבוצה ב-F^* אזי $U \in F^*$

מוטיבציה



$\bar{x} = (x_\alpha)$ כאשר $x_\alpha \in \bigcap_{S \in F^*} \overline{\pi_\alpha(S)} \neq \emptyset$ מקומפקטיות X_α

טענה $\bar{x} \in \bigcap_{S \in F^*} \bar{S}$

הוכחה: יהי $U_\alpha \subset X_\alpha$ פתוחה $\ni x_\alpha \Leftarrow U_\alpha$ חותך כל $\pi_\alpha(S) \Leftarrow$ $\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)$ חותך כל $S \in F^* \Leftarrow \pi_\alpha^{-1}(U_\alpha) \in F^*$ $\Leftarrow$ כל סביבה של (x_α) שייכת ל F^*

משפט טיכונוף הוא משפט "מפוקפק". הוכחתו מסתמכת על אקסיומת הבחירה: אם $X_\alpha \neq \emptyset$ לכל $\alpha \in I$, אזי גם $\prod X_\alpha \neq \emptyset$. $\Leftarrow$ החוסן של צורן

מאחר שמשפט טיכונוף הוא לא "נגיסה" קיום ההוכחה לא מראה שהמשפט "נכון", אלא רק שאין לו דוגמה נגדית במתמטיקה נגישה".

אקסיומת הבחירה היא מפוקפקת: 1. משפט טרסקי
2. נקודה ויתכן מוזרים

$f: (\mathcal{P}(\mathbb{R}) \setminus \{\emptyset\}) \to \mathbb{R}$

$f(A) \in A$? מה

קל לסגורים, לקטעים, לפתוחים, לבר-התכונות את $\mathbb{Q}$ ...

משפט טיכונוף "מלא מכוי להיות נכון":
משפט (באנך ?) קיימת פונקציה
$\text{Lim}: \{$סדרות חסומות$\} \to \mathbb{R}$
עם 1. $\text{Lim} = \lim$ כאשר $\lim$ קיים
2. $\text{Lim}(a_n + b_n) = \text{Lim}\, a_n + \text{Lim}\, b_n$, $\text{Lim}(c \cdot a_n) = c \cdot \text{Lim}\, a_n$
3. $\text{Lim}\, a_n \cdot b_n$
4. אם f רציפה $f(\text{Lim}\, a_n) = \text{Lim}\, f(a_n)$

"קיימת" מתמטי: אין לבני סיכוי להציג את הקיום. לעולם הדבר זו אומר סיכוי לדוגמה.

הגדרה הקומפקטיפיקציה סטון-צ'ך של X היא זוג $(\beta X, i: X \to \beta X)$ טיבוני
שם 1. βX מרחב קומפקטי האוסדורף
2. כל פונקציה (רציפה) $f: X \to Y$ כש-Y קומפקטי נורמלי
יש הרחבה רציפה יחידה $\tilde{f}: \beta X \to Y$

$\mathbb{N} \xrightarrow{f} Y$, $\beta\mathbb{N}$

משפט: אם X רגולרי לחלוטין אזי יש לו קומפקטיפיקציה יחידה

הגדרת המשפט מן הנושא המקום. ...

$X_\alpha \quad \alpha \in I$

$F \in 2^{\prod X_\alpha} = P(\prod X_\alpha)$

$\downarrow$

סגורות תחת
תכונת החיתוך
הסופי

$\Phi = \{$ כל ה-F' המרחיבות את F, והסגורות תכונת החיתוך הסופי (לא) סגורות $\}$

$F^* = \text{max elem. of } \Phi$

1. סגור לחיתוכים סופיים
2. אם קב' חותכת את כל איברי F^* st. היא ב-F^*.

$S_\alpha = \bigcap_{S \in F^*} \overline{P_\alpha(S)}$

ע"פ קומפקטיות X_α, $\phi \neq S_\alpha$. יהי

$x_\alpha \in S_\alpha$

$\bar{x} = (x_\alpha)$

$\bar{x} \in \bigcap_{S \in F^*} \bar{S}$

צ"ל

עד כאן נעשה

צ"ב $\langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2} .. U_{\alpha_n} \rangle$ סביבה בסיסית של $\bar{x}$

ע"פ בחירת x_α, כל U_{α_i} חותך כל $P_{\alpha_i}(S)$

ולכן $P_{\alpha_i}^{-1}(U_{\alpha_i})$ חותך כל $S \in F^*$ ולכן

ולכן $P_{\alpha_i}^{-1} U_{\alpha_i} \in F^*$ ולכן $\langle U_{\alpha_1}, U_{\alpha_n} \rangle \in F^*$

מבוא לטופולוגיה, 2 במאי 1996

משפט (גרסה של הלמה של אוריסון) אם X קומפקטי ו- $x\neq y\in X$, אז יש $f:X\to I$ רציפה עם $f(x)=0$; $f(y)=1$

למעשה, אפשר להחליף את x בקבוצה סגורה A עם $y\notin A$ — יוכח בהמשך.

למעשה, אפשר להחליף את y בקבוצה סגורה B עם $A\cap B=\emptyset$.

זה משפט מחוץ לחק.

משפט כל מ"ט קומפקטי X ניתן לשכון בקוביה $I^{\mathcal{F}_X}$

הוכחה $\mathcal{F}_X=\{f:X\to I \text{ רציפה}\}$, ע"י $\tau_X:X\to I^{\mathcal{F}_X}$

$$(\tau_X(x))_f=f(x)$$

צ"ל רציפות, סגירות, חח"ע.

הגדרה X רגולרי לחלוטין אם לכל $A\subset X$ סגורה ולכל $y\notin A$ יש רציפה $f:X\to I$ עם $f(A)=0$, $f(y)=1$

טענה מרחב X הוא רגולרי לחלוטין אמ"מ $\{[f\neq 0] : f\in\mathcal{F}_X\}$ בסיס לטופולוגיה.

משפט אם X רגולרי לחלוטין, אז $\tau_X:X\to I^{\mathcal{F}_X}$ שיכון.

מסקנה לכל מ"ט רגולרי לחלוטין X יש מ"ט קומפקטי שמכיל אותו: $\beta X=\overline{\tau_X(X)}$

משפט βX הוא קומפ' סטון-צ'ך של X.

צ"ל 1. βX קומפקטי האוסדורף ומכיל את X.

2. כל פונקציה רציפה $g:X\to Y$ (Y קומפקטי האוסדורף) ניתנת להרחבה יחידה $\tilde{g}:\beta X\to Y$

א. יחידות: נובעת כי X צפופה ב- βX

ב. אם $g:X\to I$: $\beta X\subset X^{\mathcal{F}_X}\xrightarrow{\pi_g} I$

ג. $g:X\to Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta X & \xrightarrow{\tilde{g}} & I^{\mathcal{F}_Y} \end{array}$$

$$\tilde{g}(\beta X)=\tilde{g}(\overline{X})\subset\overline{g(X)}\subset\overline{Y}=Y$$

מבוא לטופולוגיה, 5 במאי 1996.

משפט (גרסה של אוריסון) X קומפקטי, A,B סגורות זרות ⇐ יש רציפה $f: X \to I$ עם $f(A)=0$ ו- $f(B)=1$.

בניה: $\mathcal{F}_X = \{f: X \to I \text{ רציפה}\}$; $\iota: X \to I^{\mathcal{F}_X}$ ע"י $(\iota(x))_f = f(x)$

נניח שכבר X "רגולרי לחלוטין".

הגדרה $\beta X = \overline{\iota(X)}$ (מ"ט קומפקטי שמכיל את X)

משפט βX הוא קומפ' סטון-צ'ך של X. כלומר:

1. βX קומפקטי האוסדורף ומכיל את X.
2. כל רציפה $g: X \to Y$ (Y קומפקטי האוסדורף) ניתנת להרחבה יחידה $\tilde{g}: \beta X \to Y$

א. יחידות כי X צפופה ב- βX.

ב. אם $g: X \to I$ אז $X \hookrightarrow \beta X \xrightarrow[\iota]{} I^{\mathcal{F}_X} \xrightarrow{\pi_g} I$

ג. $g: X \to Y$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{g} & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \beta X & \xrightarrow{\tilde{g}} & I^{\mathcal{F}_Y} \end{array}$$

$\tilde{g}(\beta X) = \tilde{g}(\overline{X}) \subset \overline{g(X)} \subset \overline{Y} \subset Y$

אולי היה כדאי להביא זאת מספר אחרת.

משפט קומפ' סטון-צ'ך של מ"ט רגולרי לחלוטין קיימת ויחידה.

נימוק: 1. [illegible] Lim

2. הלמה של אוריסון:

הגדרה מ"ט X נקרא נורמלי אם $A,B \subset X$ סגורות זרות ⇐ קיימות U,V פתוחות זרות עם $A \subset U,\ B \subset V$

משפט 1. כל מרחב מטרי הוא נורמלי.
2. כל מ"ט קומפקטי הוא נורמלי.

הלמה של אוריסון אם X נורמלי ו- $A,B \subset X$ סגורות זרות, אזי יש רציפה $f: X \to I$ עם $f(A)=0$ ו- $f(B)=1$.

הוכחה: א. לכל רציונלי $0 \le q \le 1$ מוצאים פתוחה U_q עם $A \subset U_q \subset B^c$ וגם $q<r \Rightarrow \overline{U_q} \subset U_r$

ב. מרחיבים $U_{<0} = \phi$ ו- $U_{>1} = X$ ומגדירים $f(x) = \inf\{q : x \in U_q\}$

ג. F מקיימת את הדרוש.

ד' 1

תרגיל 8 - טופולוגיה.

1) יהי X רגולרי לחלוטין אזי X קשיר $\Longleftrightarrow$ βX קשיר.
(רמז: לכוון ($\Longleftarrow$) התבוננו בפונקציות רציפות מ- X ל- $\{0,1\}$ בדיסקרטי)

2) הגדרה: קוביית הילברט: $I^{\aleph_0}$ ($I=[0,1]$)

א) קוביית הילברט הינה מרחב מטרי, ספרבילי, קומפקטי.

ב) אם X רגולרי לחלוטין עם בסיס בן מניה $\Longleftarrow$ קיימת $\mathcal{F}^* \subseteq \mathcal{F}_X$, בת מניה, כך ש- $\{[f\neq 0]\}_{f\in\mathcal{F}^*}$ הינו בסיס לטופולוגיה של X.

ג) הסק כי כל מרחב רגולרי לחלוטין עם בסיס בן מניה ניתן לשכון בקוביית הילברט, ובפרט מטרי.

3) א) אם X קומפקטי מקומית האוסדורף אזי X_α (הקומפקטיפיקציה החד-נקודתית של X) הינו T_2
והסק ש- X_α רגולרי לחלוטין.

ב) הראה ש- X קומפקטי מקומית האוסדורף $\Longleftarrow$ X רגולרי לחלוטין (רמז: תת מרחב של רגולרי לחלוטין הינו גם)

4) רשות: יהא X רגולרי לחלוטין, Y קומפקטי האוסדורף,
$f: X \to Y$ הומאומורפיזם של X על $f[X]$

תהי $F : \beta X \longrightarrow Y$ ההרחבה הרציפה היחידה

של f ל- βX , הוכח:

$$F(\beta X \setminus X) \subseteq Y \setminus f[X]$$

תרגיל 9 - טופולוגיה.

$\boxed{\text{רשות}}$

1. **משפט טיצה:** (Tietze)

אם $f: A\to\mathbb{R}$ רציפה, $A\subseteq X$ סגורה, X נורמלי

אזי יש $\tilde{f}: X\to\mathbb{R}$ רציפה המרחיבה את f.

הוכחה מודרכת:

א. הנ"ל f חסומה. (בתור הומיאומורפיזם של $(-1,1)$ עם $\mathbb{R}$)
ואז $\|f\|_A\leq 1$

ב. **למה:**
קיימת $\tilde{f}_1: X\to\mathbb{R}$ רציפה כך ש- $\|\tilde{f}_1-f\|_A\leq\frac{2}{3}$, $\|\tilde{f}_1\|_X\leq\frac{1}{3}$

(כאשר $\|\ \|_A$ הוא נורמת ה-sup ב-A)

ג. בנה סדרת פונקציות $\{\tilde{f}_n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ע"י שימוש חוזר
בלמה כך ש- $\left\|\sum_{i=1}^{n}\tilde{f}_i-f\right\|_A\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\|\tilde{f}_n\|_X\leq\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

($\tilde{f}_n: X\to\mathbb{R}$ רציפות) והראה ש- $\sum_{i=1}^{\infty}\tilde{f}_i$ מתכנס במ"ש על X.

2. א. $\mathbb{R}_\ell$ נורמלי.

ב. אם X מרחב נורמלי ספרבילי, $F\subseteq X$ בדידה סגורה
אזי - $2^{|F|}\leq 2^{\aleph_0}$, ובפרט $|F|<2^{\aleph_0}$. (ראה רמז בעמוד הבא)

ג. הסק ש- $\mathbb{R}_\ell\times\mathbb{R}_\ell$ אינו נורמלי.

3. אם X מטרי קומפקטי, Y מטרי, $f: X\to Y$
רציפה אזי f רציפה במ"ש.

4. דוגמא למרחב קומפקטי, לא קומפקטי סדרתית: $\beta\mathbb{N}$.

הדרכה:

הראה שלסדרה (למשל) $a_n=n$ אין ~~תת~~ תת סדרה מתכנסת
ב- $\beta\mathbb{N}$. (רמז: הראה שקיום לגבול של סדרה טבעית כלשהי...
אשר מתכנסת ב- $\beta\mathbb{N}$ אזי החל ממקום מסוים מקום
הנה קבועה; השתמש בתכונת ההרחבה)

(26)

הנגד ל (2) (ב):

לכל F ו- $F_0 \neq \phi$ יהיו נ"ב פתוחות זרות ב- X U, V

כך ש- $U \supseteq F_0$, $V \supseteq F \setminus F_0$, והמגון ב- $U \cap D$.

הפונקציה שההתאמה $U \cap D \mapsto F_0$ הינה חח"ע.

מבוא לטופולוגיה, 9 במאי 1996

הלמה של אוריסון: 1. הגדרה של נורמלי.

משפט 1. כל מטרי הוא נורמלי.

2. כל קומפקטי הוא נורמלי.

(לא) נכון: מכפלה של נורמליים היא נורמלית

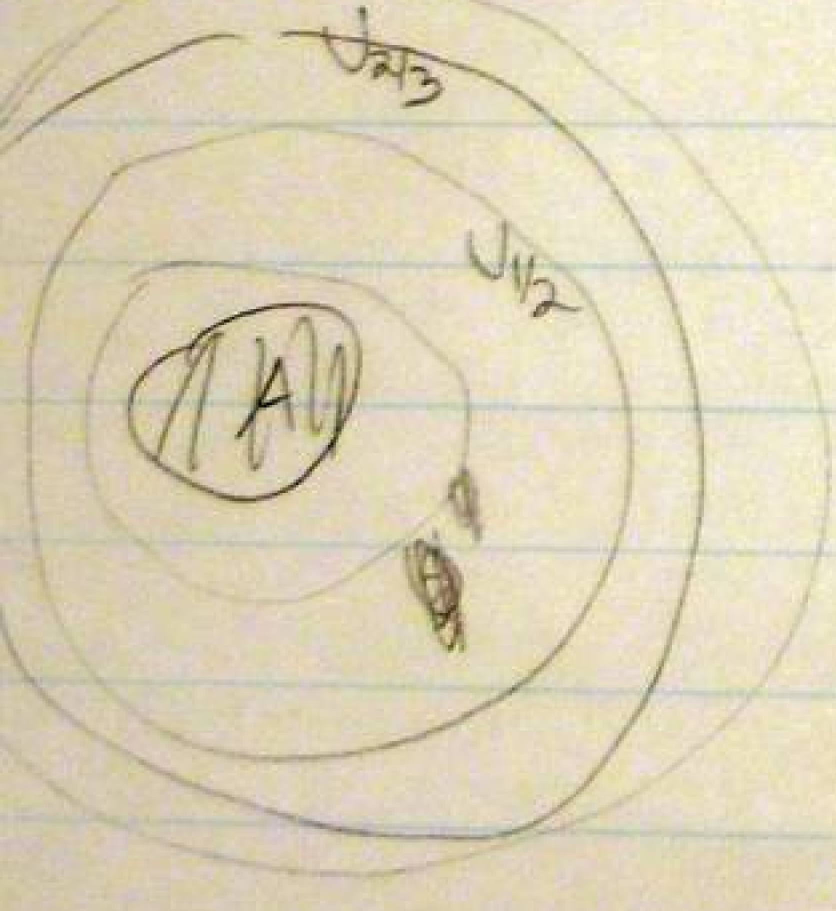
תת מ' של נורמלי הוא נורמלי.

הלמה של אוריסון: אם X נורמלי ו- $A,B\subset X$ סגורות זרות, אזי יש $f:X\to I$ רציפה עם $f(A)=0$ ו- $f(B)=1$

הוכחה א. לכל רציונלי $0\le q\le 1$ מייצרים פתוחה U_q כך $A\subset U_q\subset B^c$ וגם $q<r \Rightarrow \overline{U_q}\subset U_r$

(i) $U_1=B^c$

(ii) $A\subset U$, $B\subset V$ מכלל זרות $U_0=U$



(iii) באינדוקציה, נניח מצאנו $U_1, U_0, U_{1/2}, U_{2/3}, U_{1/3}$ ורוצים למצוא את $U_{3/5}$

יש כאן שימוש דרסטי בלמה של אורסון הילדותית.

אז יש בגלל נר' שמפרידה את $\overline{U_{1/2}}$ מ- $U_{2/3}^c$

ב. מרחיבים ומגדירים $U_{<0}=\emptyset$, $U_{>1}=X$

$$f(x)=\inf\{q: x\in U_q\}$$

ג. f מקיימת את הנדרש.

משפט טיאצה: אם $A\subset X$ סגורה, X נורמלי, ו- $f:A\to I$ רציפה, אז יש ל-f הרחבה לכל X.

הוכחה:

מבוא לטופולוגיה 12 במאי 1996.

<u>משפט</u> במרחב מטרי X השקולים:

עוד ב מטרי

1. X קומפקטי
2. X נקודות-הצטברות-קומפקטי - לכל תת אינסופית של X יש נק' הצטברות.
3. X קומפקטי סדרתית: לכל סדרה ב-X יש תת-סדרה מתכנסת.
4. X "חסום לחלוטין" ומתקיימת בו הלמה של לבג
5. X ~~...~~ חסום לחלוטין ושלם.

<u>הוכחות</u>: 1 ⇐ 2 ק"ל

3 ⇐ 2 ק"ל

<u>הגדרה</u> (תזכורת) חסום לחלוטין אם לכל ε קיים כיסוי סופי בכדורים ברדיוס ε.

למה של לבג: אם U כיסוי פתוח, קיים δ כך שכל כדור ברדיוס δ מוכל באחד מאיברי U (אפשר גם "בכדור בקוטר δ")

<u>4⇐3</u> א. X חסום לחלוטין.

ב. <u>למה</u> לכל רציפה ב-X ... יש מקסימום.

<u>משפט שהוכחנו</u>.

$f(x) = \sup\{\delta :$ קיים $U \in \mathcal{U}$, $B_\delta(x) \subset U\}$

f רציפה כי אם x זז מרחק 0.001, f(x) יכולה לקטון לכל היותר 0.001

4 ⇐ 1. U ⇐ קיים δ ⇐ $X = \bigcup B_\delta(x_i)$ ⇐ ...

<u>הגדרה</u> מ"מ נקרא שלם אם כל סדרת קושי בו מתכנסת. X 3⇐5.

<u>משפט</u> לכל מ"מ X יש השלמה יחידה - מ"מ שלם בו X משוכן איזומטרית ובו X צפוף.

<u>משפט</u> שלם + חסום לחלוטין ⇐ קומפקטי.

<u>משפט</u> קומפקטי מטרי ⇐ שלם <u>הוכחה</u>: מקומפקטיות סדרתית. <u>הוכחה</u> מספיק להראות קומפקטיות סדרתית.

תצפית: אין שום קולה היום.

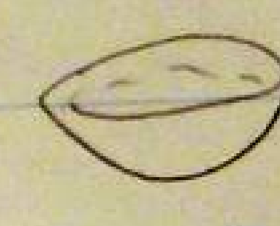
מבוא לטופולוגיה, ~~25~~ 26 חשוון 1996.

תכנית משחק:
1. הגדרה
2. דוגמאות: ... מקרה ישר ב-$\mathbb{R}^3$
3. נוסח משפט המיון ורעיון ההוכחה.
4. משפט השילוש ורעיון ההוכחה.
5. מרחבי מנה והדבקות המשולשים ...
6. הוכחת משפט המיון
7. מספר אוילר ומציאת ... של ...

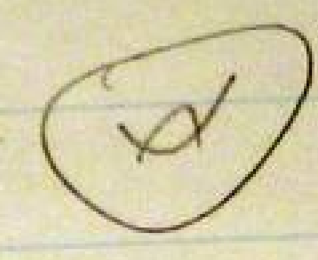
הגדרה יריעה דו-ממדית: לכל נקודה יש סביבה שהיא הומאומורפית לדיסק ב-$\mathbb{R}^2$

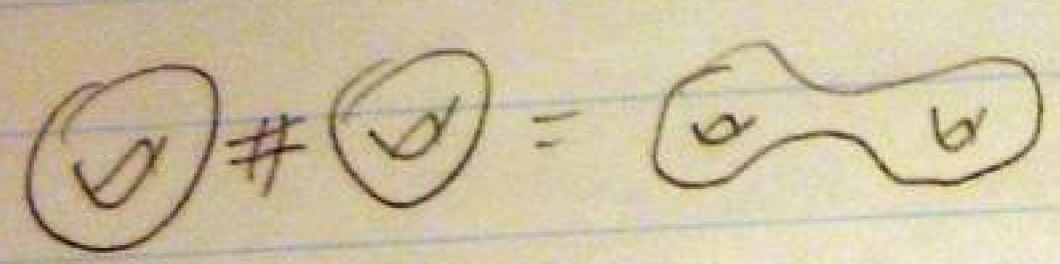
משטח: יריעה דו-ממדית.

דוגמאות S^2 ;

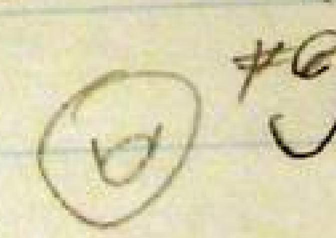


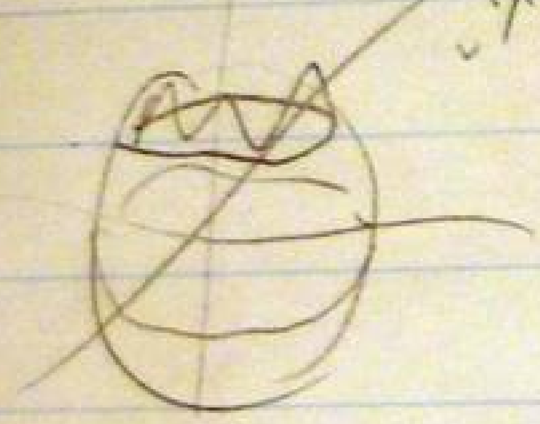
; T^2





$\#^g T$: משטח מגנוס g.

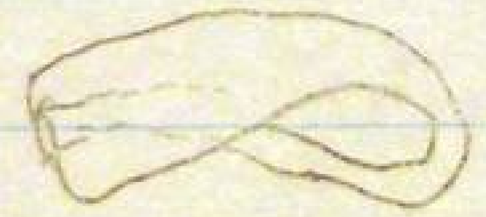




שיכון ב-$\mathbb{R}^3$ דרך הרגל: המישור הפרויקטיבי P^2

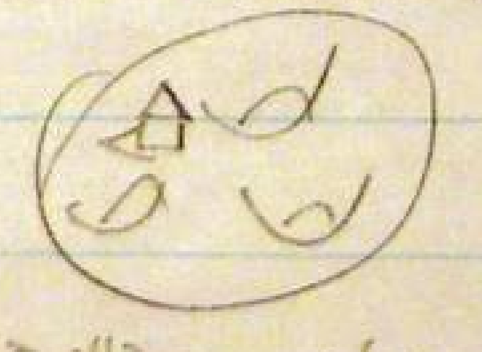
רצועת Möbius

$P^2 \# P^2 \# P^2$



בקבוק קליין:

משפט כל משטח קומפקטי קשיר הומאומורפי לאחד מ-: 1. S^2
2. $\#^g(T^2)$ עבור g
3. $\#^g(P^2)$ עבור g



רעיון: מראים שכל משטח הוא אוסף של מצולעים, וחוקרים את הקומבינטוריקה.

הגדרה שילוש של משטח S: משפחה סופית של שיכונים $\Delta \to S$ ... (ניתן כך לדבר על "משולשים", "צלעות", "קודקודים") כך שכל שני "משולשים" שונים
משותפתם הוא 1. ריק
או 2. קודקוד משותף אחד.
3. צלע משותפת אחת

$S = \bigcup \Delta$

משפט (Radó, 1925) לכל משטח קומפקטי קשיר יש שילוש.

רעיון ההוכחה: $S = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, $U_i \cong \mathbb{R}^2$

1. מסמנים שילוש את דיסק U_1 תוך התחשבות בגבולות ...
2. אחר כך ממשיכים לסמן ולשלש את דיסק U_2 ...
3. ממשיכים את הקודמים והשלמתם את דיסק U_3.

על נאחד ...

מבוא לטופולוגיה 30 במאי 1996.

תזכורת: יחס שקילות, מחלקת שקילות, $X/\sim$. דוגמה $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$

תכונה של $X/\sim$ כך ש

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr] & \\ X/\sim \arrow[rr, "F"] & & Y \end{tikzcd}$$

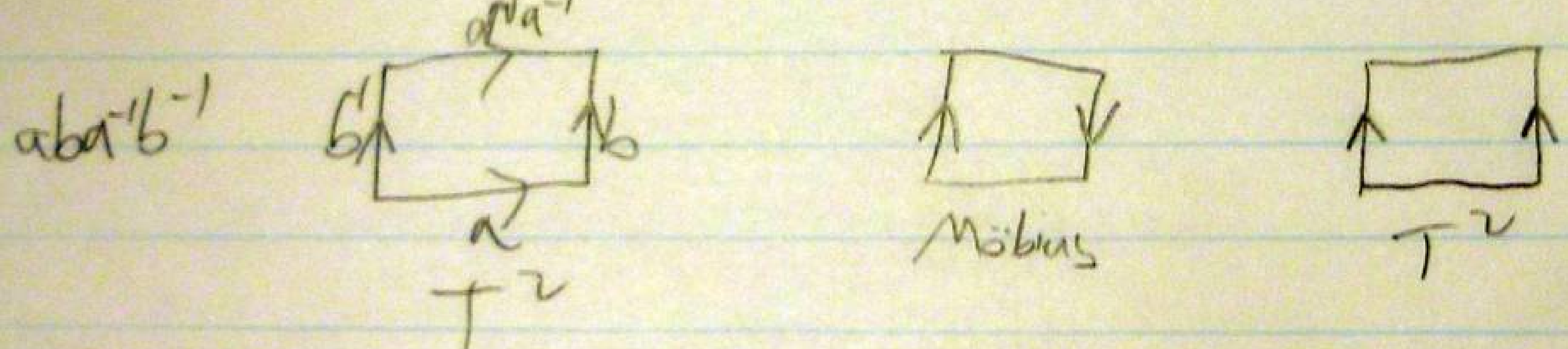
$F : X/\sim \to Y$ רציפה אמ"מ $F \circ \pi$ רציפה.

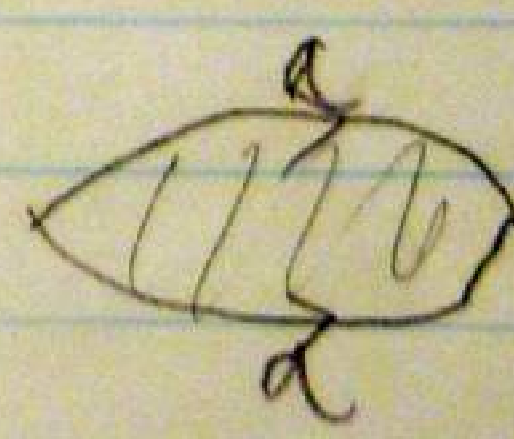
<u>משפט</u> קיימת כזו והיא יחידה. הפתוחות הן $\{U \subset X/\sim \,:\, \pi^{-1}(U)$ פתוחה ב-$X\}$

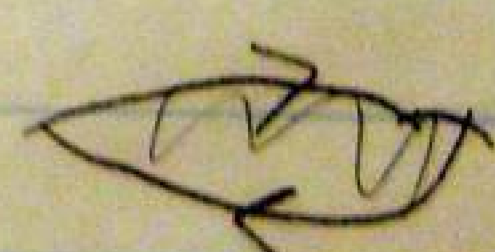
<u>טענה</u> X קומפקטי $\Rightarrow$ $X/\sim$ קומפקטי

X האוסדורף $\Leftarrow$ $X/\sim$ האוסדורף ???

<u>דוגמאות</u>



$S^2 \Leftarrow aa^{-1}$ 

$P^2 \Leftarrow aa$ 

סכום קשיר: ...

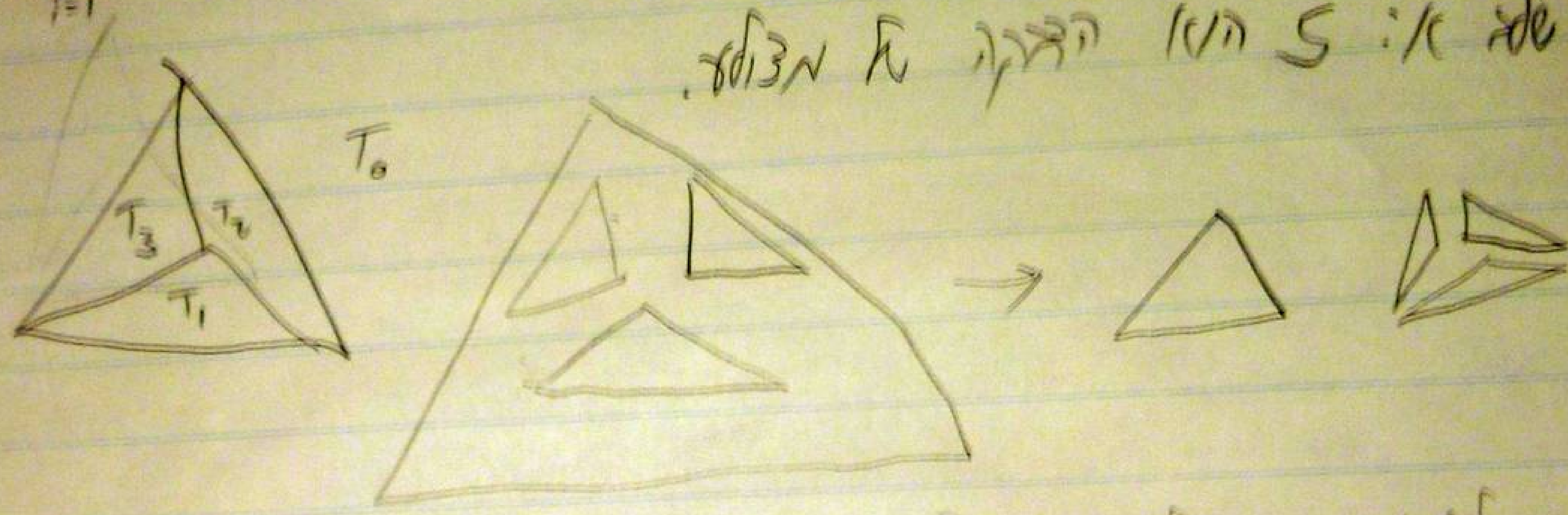
<u>משפט המיון</u> כל משטח קומפקטי קשיר הוא הומאומורפי לאחד מ-

1. aa^{-1}
2. $a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1} \dots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}$
3. $a_1a_1a_2a_2a_3a_3 \dots a_ga_g$

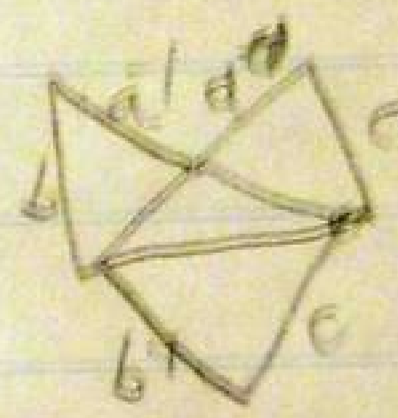
מבוא לטופולוגיה, ט' ביוני 1996

<u>תוצאות</u> שלמדנו: כל משטח קומפקטי קשיר הומאומורפי ל- aa^{-1}, $\prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}$; $\prod_{i=1}^{g} a_i a_i$

<u>הוכחה</u> שלב א': S הינו הדבקה של משולשים.

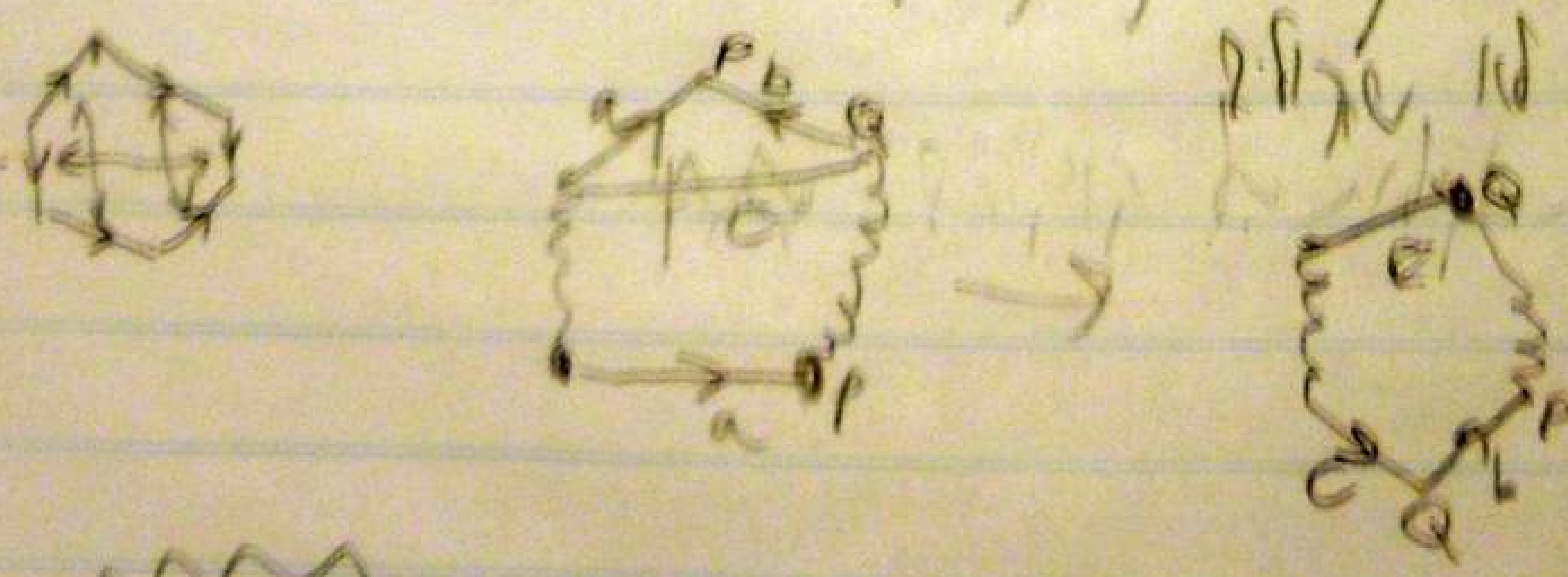


(מתחילים מאחד המשולשים, ואז כל פעם מדביקים משולש נוסף לאורך צלע
אחת (להדביק משולש נוסף ביותר מצלע אחת [illegible]
מיותר).

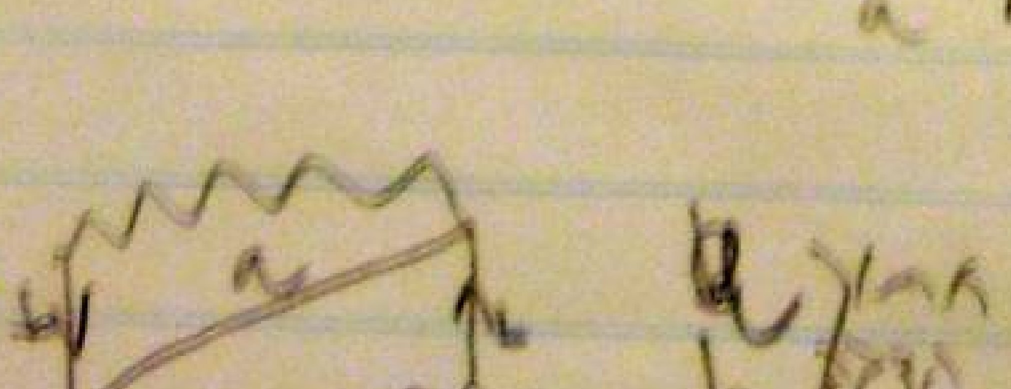


<u>שלב ב</u> חיסול aa^{-1} (היכן צמדים סמוכים מבוטלים)
"מסוג ראשון"

<u>שלב ג</u> ניתן להניח שכל הקדקודים מצוירים זהים $abca^{-1}c^{-1}b^{-1}$
בהכרח יש סמוך לו שכולו
[illegible]



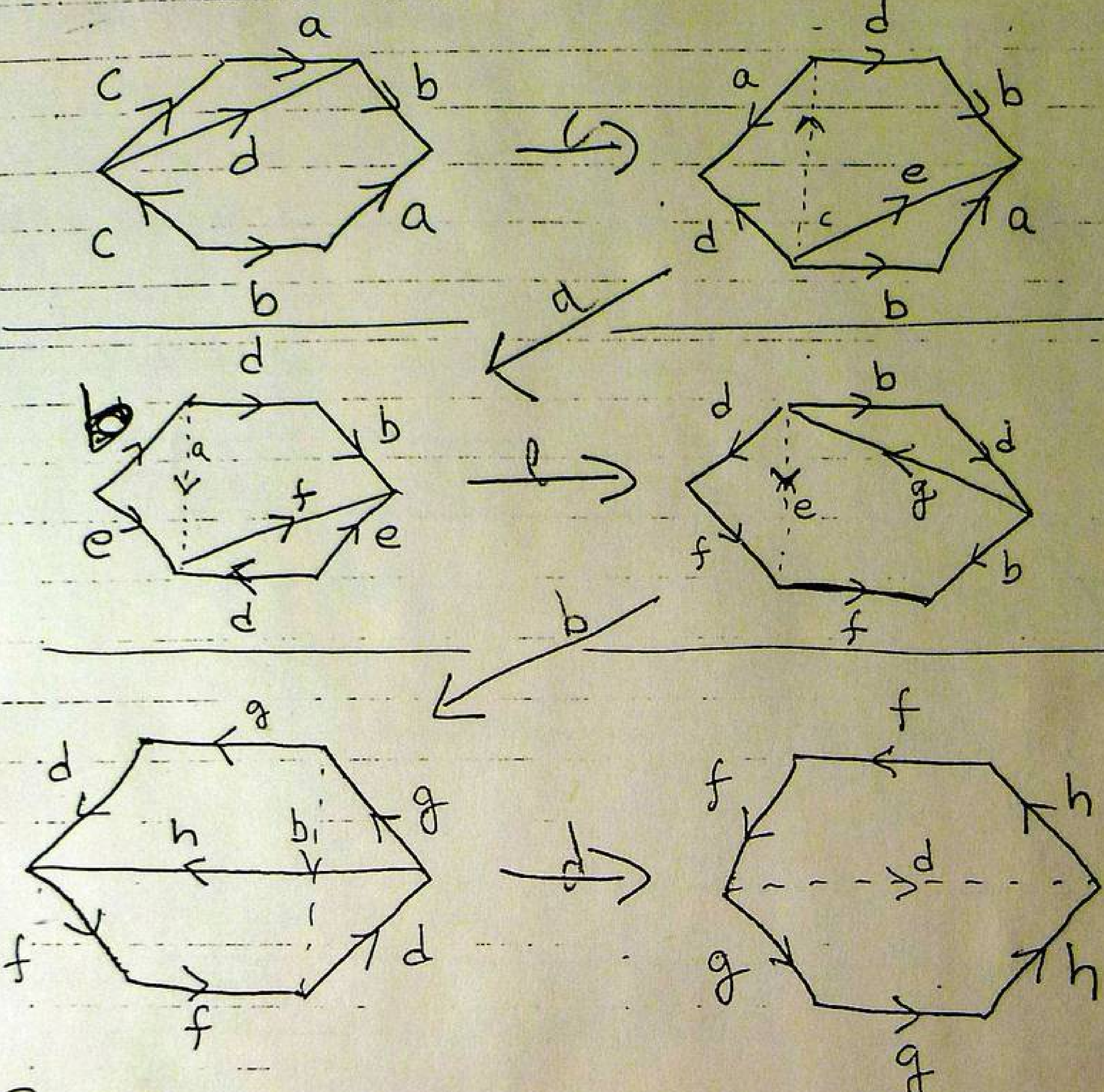
Q אחד יותר
P - אחד פחות



<u>שלב ד</u> ניתן לקבל זוג מסוג שני לסמוכים:

אם לא נותרו צמדים מסוג ראשון וגמרנו. אחרת:
~~[illegible]~~ $a \dots b \dots a^{-1} \dots b^{-1}$
~~[illegible]~~ יש c בין שני חלקי a ומפרידים b. [illegible]

$T^2 \# \mathbb{P}^2$

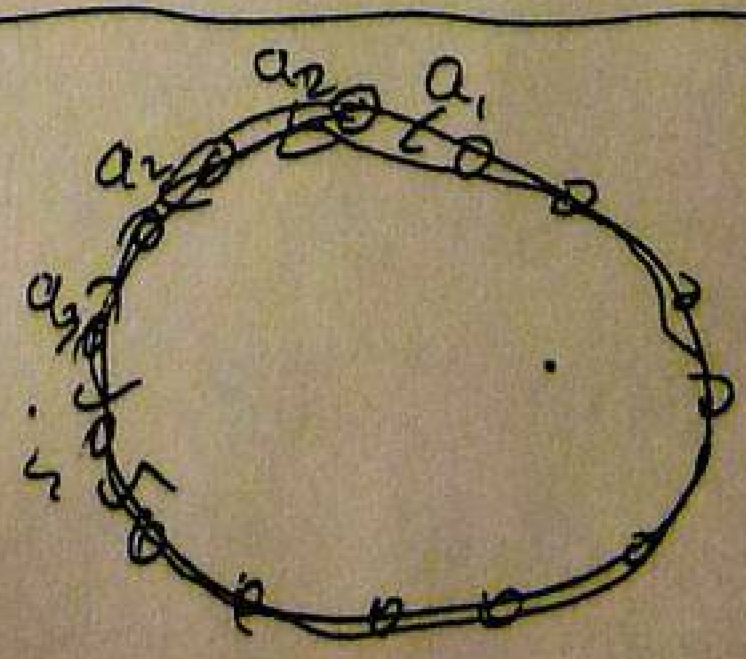


$\simeq \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}$

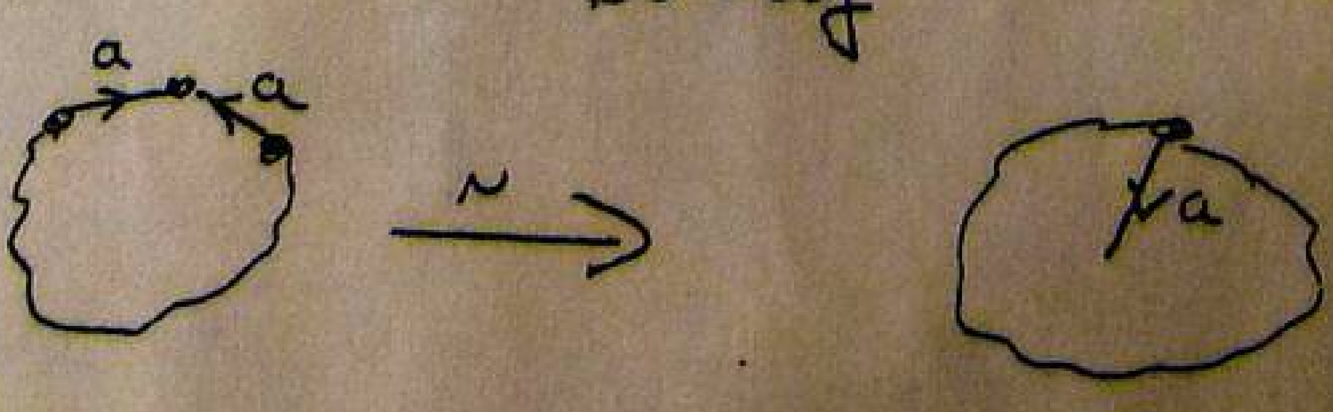
TH: A COMPACT SURFACE $S \simeq S^2$ or $\mathbb{P}^2$ or $\mathbb{T}^2$
or $\mathbb{P}^2 \# \cdots \# \mathbb{P}^2$ or $\mathbb{T}^2 \# \cdots \#$

Proof

1° $S \xrightarrow{\text{triangulation}}$



2° ELIMINATE every $\cdots aa^{-1} \cdots$ (Except if aa^{-1}.



מבוא לטופולוגיה, 6 ביוני 1996

תזכורת: הוכחנו שכל משטח הוא אחד מ- ...

אבל אולי שניים מהם שווים? דוגמא $\mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2 \# T^2$

צריך שמורות ($\mathbb{Z}$) $\longrightarrow$ {אוסף כל המשולשים

אם הגדרה חלוקה מדויקת

הגדרה מאפיין אוילר $\chi(S,\{P_i\}) = v - e + f$

מהדוגמאות: $\chi\left((T^2)^{\# g}, \prod_{i=1}^{g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1}\right) = 2-2g$

$\chi\left((\mathbb{P}^2)^{\# g}, \prod_{i=1}^{g} a_i a_i\right) = 2-g$

משפט אפיון אוילר לא תלוי בחלוקה

מרחב המצבים

שימוש $\chi(\text{תלויק}) = 6\cdot 2^4 - 6\cdot 2^5 + 2^6 = -32 = 2-2\cdot 17$

(אבל גם $2-34$)

(עיון התוכחה – צריך את המשפט שלכל שתי חלוקות יש עידון משותף.)

הגדרה: כיוון של משטח, משטח אוריינטבילי.

טענה: מרחב המצבים של ג'וק הוא אוריינטבילי.

הגדרת חבורה

דוגמאות: $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q}^*$, זוויות ($S^1$), מטריצות הפיכות, S_n, החבורה החופשית.

יוצרים ויחסים.

דוגמאות: $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$; $\langle a : a^2 = 1 \rangle =$ חבורה עם 2 איברים ; $\langle a,b : a^2=b^2=1, aba=bab \rangle$

ערל שער-קלוגר

מבוא לטופולוגיה 9 ביוני 1996

תכנית החבורה היסודית:
שיעור 1. חבורה של חבורות: הגדרה ותכונות בסיסיות. חישוב $\pi_1(S^1)$
שיעור 2. משפט נק' השבת של בראואר. תכונות יסודיות. יחס לשקילות הומוטופיה.
שיעור 3. משפט ואן-קמפן ודוגמאות.
שיעור 4. הוכחת ואן-קמפן.

הגדרת חבורה

דוגמאות: $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}^*$, זוויות (S^1), מטריצות הפיכות מעל הממשיים, חבורה החופשית

יוצרים ויחסים

דוגמאות: $\langle a \rangle = \mathbb{Z}$; $\langle a : a^2 = 1 \rangle =$ חבורה ציקלית מסדר 2

S_3 : $\langle a,b : a^2=b^2=1 ; aba=bab \rangle$

הומומורפיזם של חבורות. דוגמאות: det, exp.

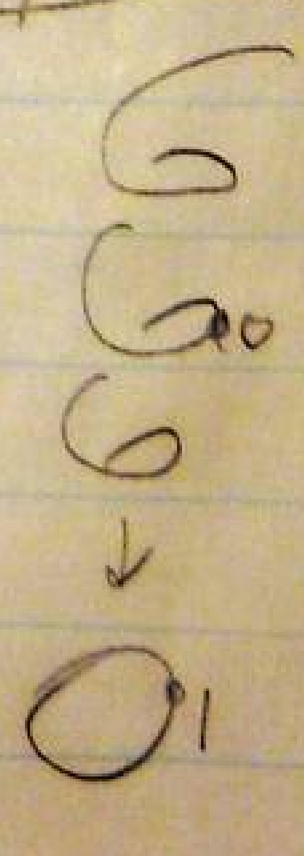
הגדרה מסילה; הומוטופיה של מסילות; זהו יחס שקילות.

הגדרה $\pi_1(X,b)$ בקבוצה; חוק הכפל...

דוגמאות $\pi_1(D^2,0) = \{0\}$; $\pi_1(\mathbb{R}^n,0)=0$

משפט $\pi_1(S^1,1)=\mathbb{Z}$

למה עיקרית יהי $e:\mathbb{R}\to S^1$ ע"י $e(x)=e^{2\pi i x}$. לכל מסילה $\gamma:[0,1]\to S^1$ עם $\gamma(0)=1$ יש הרמה רציפה יחידה למסילה $\tilde\gamma:[0,1]\to\mathbb{R}$ עם $\tilde\gamma(0)=0$ ועם $\gamma=e\circ\tilde\gamma$.



הוכחת המשפט מהלמה: תהי $[\gamma]\in\pi_1(S^1,1)$. נגדיר $\operatorname{ind}\gamma=\tilde\gamma(1)$

טענות: 1. $\operatorname{ind}\gamma\in\mathbb{Z}$

2. $\operatorname{ind}\gamma$ תלוי רק במחלקת ההומוטופיה של γ (לוודא שיש ...)
ולכן $\operatorname{ind}:\pi_1(S^1,1)\to\mathbb{Z}$ מוגדר היטב.

3. ind הוא על.

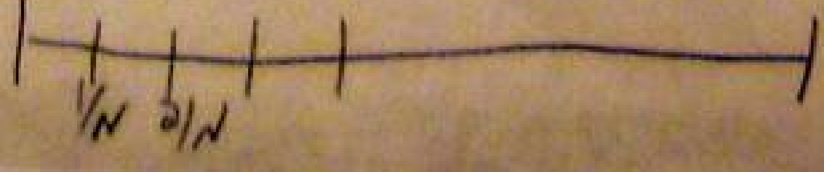
4. ind הוא חח"ע.

5. ind הוא הומומורפיזם של חבורות.

הוכחת הלמה העיקרית: יהי $\{U_i\}$ כיסוי של S^1 בפתוחות ההומיאומורפיות לקטעים. $\{\gamma^{-1}(U_i)\}$ כיסוי פתוח של $[0,1]$, ויהי $\frac{1}{N}$ מספר לבג של כיסוי זה... יהי N כך ש $\frac{1}{N}$

הערה: זו ההתחלה של "תורת הכיסויים"

טענה. נניח יש הרמה יחידה עד $\frac{k}{N}$. אזי בנ"ל עד $\frac{k+1}{N}$.



תרגיל 11 - טופולוגיה

(1) נסתכל על המשפחות:

$f_1(x,c)=\frac{1}{1-x^2}+c$, $f_2(x,c)=\frac{\operatorname{sign} x}{1-x^2}+c$ כאשר

$x\in(-1,1)$, ל-f_i $i=1,2$ נגדיר יחס שקילות

על המישור $P=[-1,1]\times\mathbb{R}$ ע"י $(x_1,y_1)\overset{E_i}{\sim}(x_2,y_2)$

$\iff$ $x_1=x_2=1$ או $x_1=x_2=-1$ או אם $-1<x_1,x_2<1$

ו-$(x_1,y_1),(x_2,y_2)$ נמצאות על $f_i(x,c)$ לאותו c

(כלומר $\exists c\,(f_i(x_1,c)=y_1 \wedge f_i(x_2,c)=y_2)$)

(א) הראה שהמישור P מחולק ביחס שקילות E_2 "הומו" לקטע $[-1,1]$.

(ב) תאר סדיר (יותר) של המישור P מחולק ביחס שקילות E_1, והראה שמרחב המנה הנוצר אינו האוסדורף.

(2) מהם המשטחים הבאים: (בצורה הקנונית: S^2 או $(\mathbb{P}^2)^{\#g}$ או $(\mathbb{T}^2)^{\#g}$)

(א) $c^{-1}b^{-1}a^{-1}cba$

(ב) $abcdec^{-1}da^{-1}b^{-1}e^{-1}$

(ג) $a_1a_2\cdots a_n a_1^{-1}a_2^{-1}\cdots a_{n-1}^{-1}a_n$

תרגיל 10 טופולוגיה

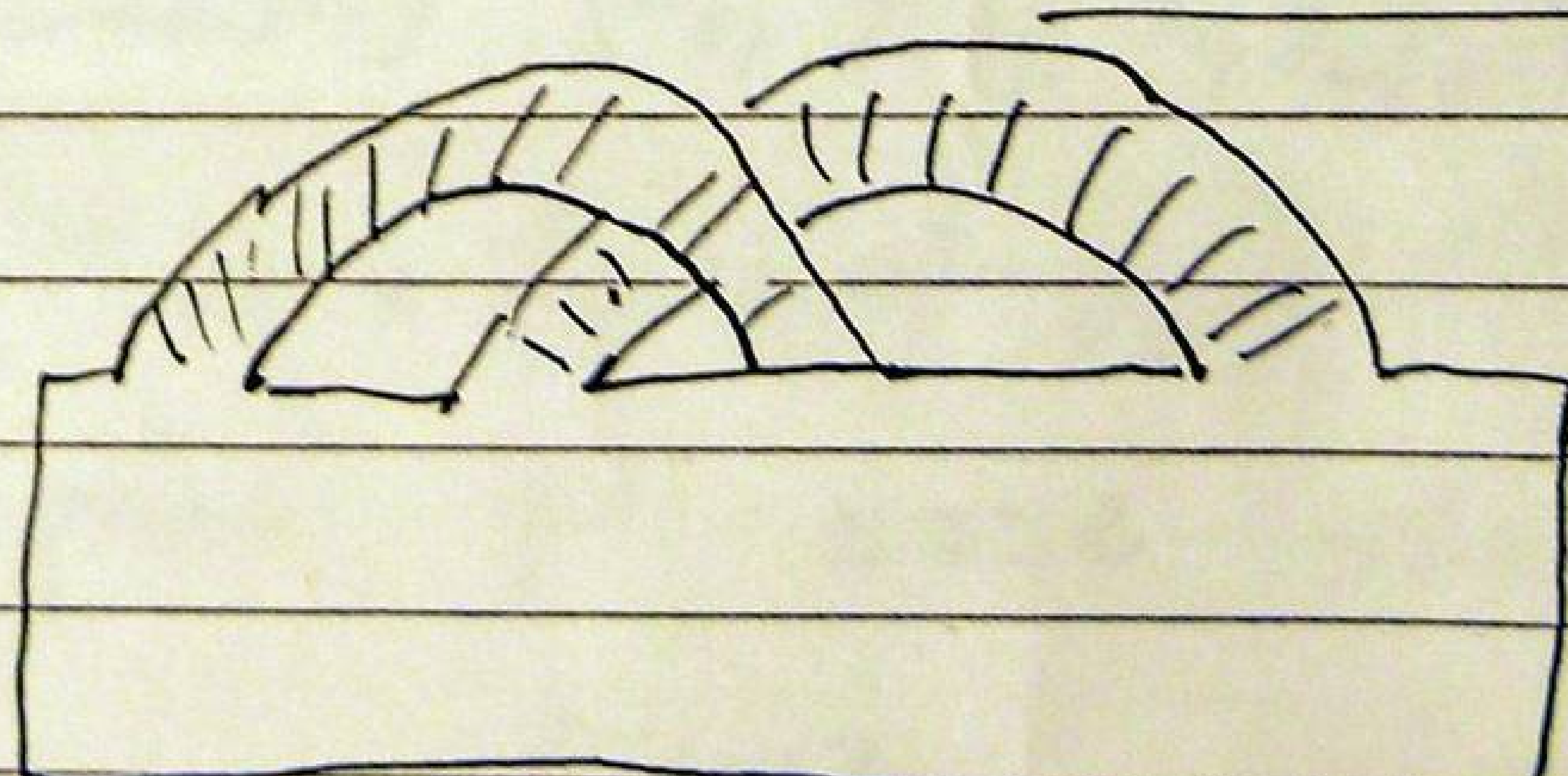
1. למה הומיאומורפי S^2 פחות דיסק פתוח דיסק סגור קלן בו? הסק ש- $S^2 \not\cong \mathbb{P}^2$

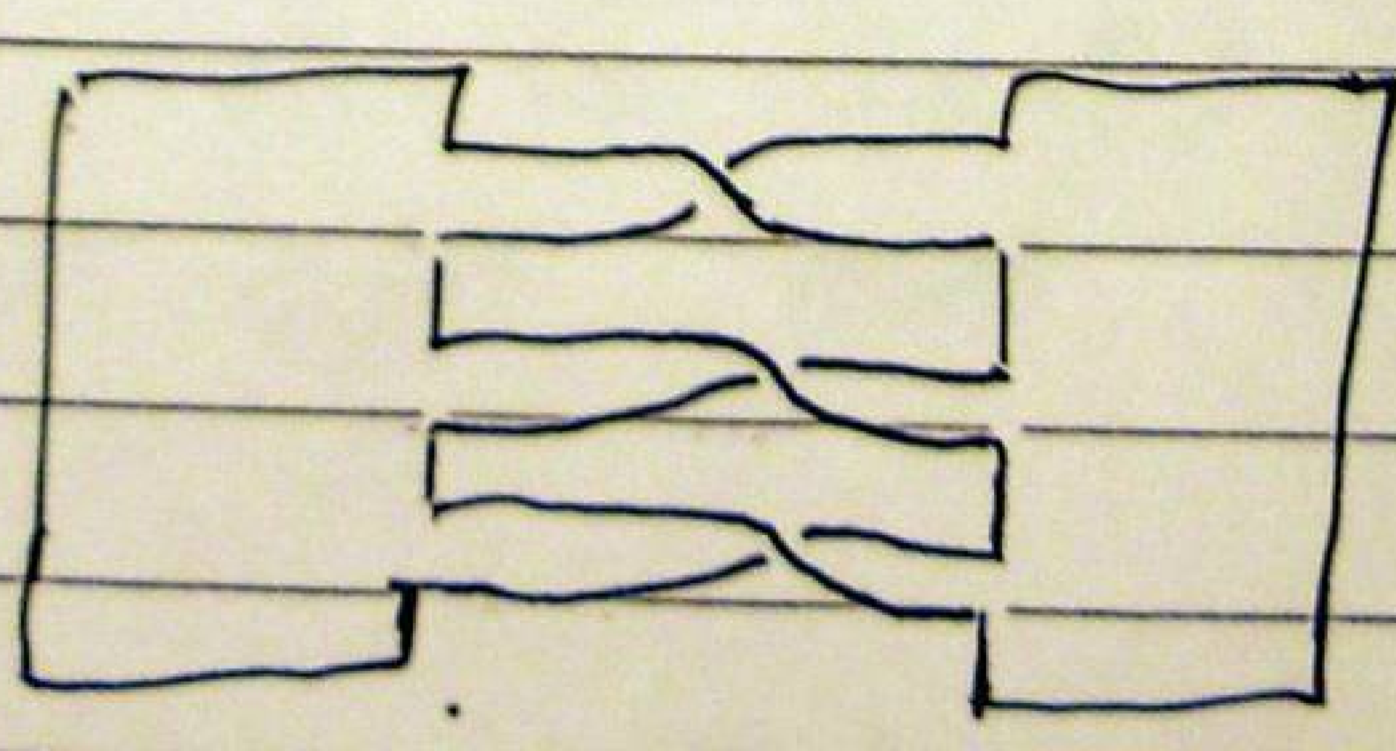
2. א) הראה שניתן להציג את בקבוק קליין כהדבקה (אינטואיטיבית) של שני רצועות מביוס.

ב) הראה ש- בקבוק קליין $\cong \mathbb{P}^2 \# \mathbb{P}^2$

3. הראה שטורוס פחות דיסק קלן הומיאומורפי

לציורים הבאים:

א) 

ב) רשמו: 

מבוא לטופולוגיה 13

1996 דוני

משפט עק' הסרת על האוור

העתק חיבורית

$\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$

13/6

$\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$

משפט נק' השבת של ברואר.

מבוא לטופולוגיה, 16 ביוני 1996

שיעור הרצאה.

לחזור על חלק את המצב להוכחת $\pi_1(S^1)=\mathbb{Z}$,

להשלים ההוכחה.

<u>בעיה</u> מהו $\pi_1(\circledcirc)$

מיפויי הומוטופיה ; המיפוי המושרה על π_1

שקילות הומוטופית של מרחבים

<u>דוגמאות</u> $\pi_1(\text{Möbius})$, $\pi_1(S^1\times I)$

<u>משפט</u> $\pi_1(X\times Y)=\pi_1(X)\times\pi_1(Y)$

<u>מסקנה</u> $\pi_1(T^2)=\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

מהו $\pi_1(T^2\#T^2)$? $\pi_1(P^2)$? ...

<u>משפט ואן קמפן</u>: $X=U\cup V$, U,V פתוחות קשירות-מסילתית

וגם $U\cap V$ קשירה מסילתית, $b\in U\cap V$ $\Rightarrow$

$\pi_1(X)=$ ~~[illegible]~~ אז:

$\pi_1(U)*_{\pi_1(U\cap V)}\pi_1(V)=$

$\pi_1(U\cap V)\xrightarrow{\varphi_1}\pi_1(U)$, $\pi_1(U\cap V)\xrightarrow{\varphi_2}\pi_1(V)$

$\langle\pi_1(U)\cup\pi_1(V)$: יחס: $\pi_1(U)$, $\pi_1(V)$

$\varphi_1(\gamma)=\varphi_2(\gamma)$

לכל $\gamma\in\pi_1(U\cap V)$ $\rangle$

<u>דוגמאות</u>: S^2; ∞; T^2; $(T^2)^{\#g}$; P^2; [illegible]

~~שיעור מבחן~~ שעות קבלה.

מבוא לטופולוגיה 20 ביוני 1996 יום שני <u>9-2</u>

בחינה: יום רביעי 10/7/96 אולם 7 בניין כימיה, 2 שעות, תקוותי 3

הבחינה על כל החומר פרט לשבוע. יהיו שאלות מעל, מהשיעור ומקוריות -

6-8 שאלות ללא בחירה, אל תכנן הנחה.

בחינה קשה, בדיקה רכה.

משפט ון-קמפן: $X=U_1\cup U_2$ כאשר U_i פתוחות וקשירות מסילתית וגם $U_1\cap U_2$ קשירה מסילתית ~~...~~ ⇐

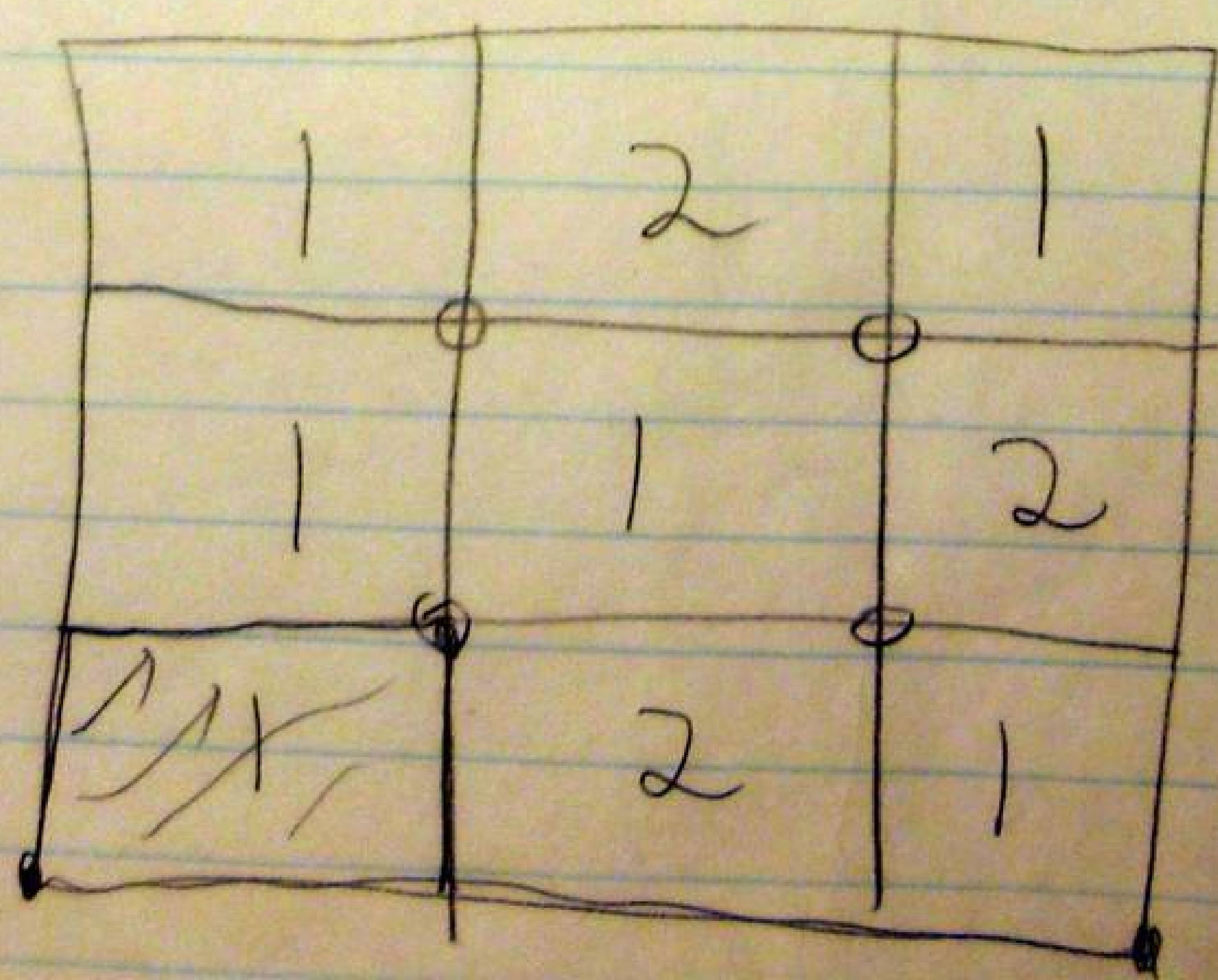
$$\pi_1(X)=\pi_1(U_1) *_{\pi_1(U_1\cap U_2)} \pi_1(U_2) = \left\langle \begin{matrix}\text{יוצרים}\\ \pi_1(U_i)\\ i=1,2\end{matrix} \;;\; \begin{matrix}\text{יחסים}\\ \pi_1(U_i),\ i=1,2\\ \varphi_{1*}(\gamma)=\varphi_{2*}(\gamma)\\ \text{לכל } \gamma\in\pi_1(U_1\cap U_2)\end{matrix} \right\rangle$$

כאשר

$$\begin{tikzcd} & U_1 \arrow[dl, "\varphi_1"'] \\ U_1\cap U_2 \arrow[dr, "\varphi_2"'] & \\ & U_2 \end{tikzcd}$$

<u>דוגמאות:</u> ∞, S^2, T^2, $T^2\# T^2$, $\mathbb{RP}^2$, פינים

הוכחת משפט ון-קמפן



האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בטופולוגיה (80516)

מועד ב׳ תשנ״ו

המורה: ד״ר ד. בר-נתן

הזמן: 3 שעות

בחר/י 7 מתוך 8 השאלות.

1. בהינתן יחס שקילות ~ על מרחב טופולוגי X, הגדר/י את טופולוגיית המנה על $X/\sim$ והוכח/י שטופולוגיה זו קיימת והיא יחידה.

2. נניח X מרחב טופולוגי $A \subset X$ קבוצה צפופה $\left(\overline{A} = X\right)$ ו- $U \subset X$ קבוצה פתוחה. הראה/י ש-

$$U \subset \left(\overline{A \cap U}\right)$$

3. הראה/י שמרחב טופולוגי X הוא האוסדורף אם ורק אם האלכסון $\Delta = \{(x,x) : x \in X\} \subset X \times X$ סגור ב- $X \times X$.

4. הראה/י ש- R^N אינו קשיר בטופולוגיית הקופסאות.

5. הוכח/י שכל מרחב טופולוגי האוסדורף קומפקטי ניתן לשיכון בתוך קוביה.

6. מהו המשטח המיוצג ע״י הזיהויים הבאים? הסבר/י בפירוט את שיקולך:

א. $abcdd^{-1}b^{-1}c^{-1}efe^{-1}a^{-1}f^{-1}$

ב. $aabbcdc^{-1}ed^{-1}e^{-1}$

7. א. הוכח/י שאם X ו- Y מרחבים מנוקדים אזי

$$\pi_1(X \times Y) = \pi_1(X) \times \pi_1(Y)$$

ב. מהי $\pi_1(T^2)$?

8. הראה/י שמרחב מטרי שלם וחסום לחלוטין הוא קומפקטי סדרתית. (ראשית, הגדר/י את 4 המושגים המופיעים במשפט).

ב ה צ ל ח ה !!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

בחינה בטופולוגיה (80516)

מועד א' תשנ"ו

המורה: ד"ר ד. בר-נתן

הזמן: ~~2~~ 3 שעות

בחר/י 7 מתוך 8 השאלות.

1. הגדר/י את טופולוגית המכפלה על המכפלה של שני מרחבים טופולוגיים X ו-Y, והוכח/י שטופולוגיה זו קיימת והיא יחידה.

2. הראה/י שהטופולוגיה על הממשיים שבסיסה הקטעים החצי פתוחים $\{[a,b)\}$ היא עדינה מהטופולוגיה הרגילה של הממשיים, אולם היא אינה הטופולוגיה הדיסקרטית.

3. תהי X קבוצה ו- T טופולוגיה קומפקטית האוסדורף עליה. תהי T_1 טופולוגיה נוספת כלשהיא על X. הראה/י ש:
   א. אם $T_1 \subset T$, אזי T_1 אינה האוסדורף.
   ב. אם $T_1 \supset T$, אזי T_1 אינה קומפקטית.

4. תהי A_n סדרה של קבוצות קשירות במרחב טופולוגי X, ונניח ש- $A_n \cap A_{n+1} \neq \varnothing$ לכל n.

   הראה/י ש- $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ היא קבוצה קשירה.

5. א. הגדר/י את קומפקטיפיקציית סטון-ציק βX של מרחב טופולוגי X, והוכח/י שאם βX קיימת אזי היא יחידה.
   ב. האם יתכן ש- $\beta IN - IN$ היא נקודה בודדת?

6. הוכח/י (באמצעות זיהויים על מצולעים או בעזרת הסבר גיאומטרי) ש-

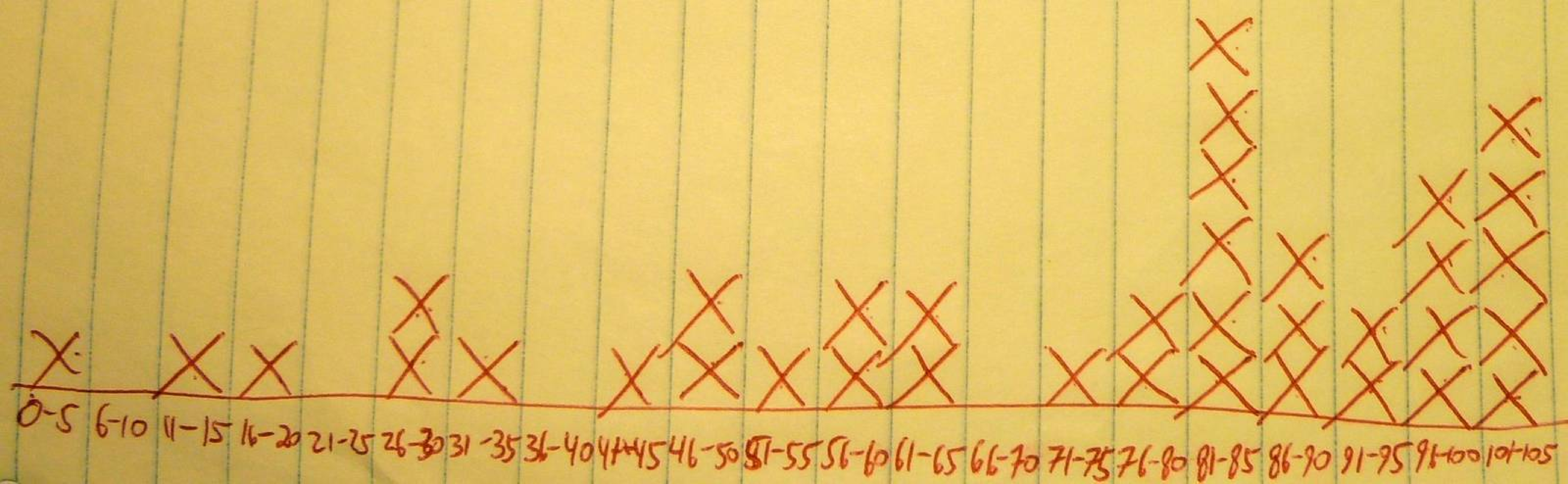
$$P^2 \# P^2 \# P^2 \cong T^2 \# P^2$$

7. יהי D^2 דיסק היחידה במישור, ויהי X המרחב הטופולוגי המתקבל מזיהוי כל נקודה על שפת D^2 עם תמונתה תחת סיבוב הדיסק ב 90°.

א. האם X הוא משטח?

ב. מהי $\pi_1(X)$?

8. הראה/י שלא קיימת פונקציה $F: R \to R$ שקבוצת נקודות הרציפות שלה היא בדיוק Q במידה ואת/ה משתמש/ת במשפט כבד כלשהוא במהלך ההוכחה, נסח/י אותו בפירוט.


0-5
6-10
11-15
16-20
21-25
26-30
31-35
36-40
41-45
46-50
51-55
56-60
61-65
66-70
71-75
76-80
81-85
86-90
91-95
96-100
101-105

טופולוגיה 1996 מועד ג' – מפרט ניקוד.

1. הגדרה: 5 | דוגמה: 10 (קיום 5 יציאות 5/5)

4/5 ללא מילים

4/15 שגוי, אבל מופיעה הטופולוגיה הנכונה: $U\in\mathcal{T}$ אמ"מ $f^{-1}(U)$ פתוחה

6. א. $P \xrightarrow{a} Q \xrightarrow{b} Q \xrightarrow{c} Q \xrightarrow{d} R \xleftarrow{d^{-1}} Q \xleftarrow{b^{-1}} Q \xleftarrow{c^{-1}} Q \xrightarrow{e} P \xrightarrow{f} P \xleftarrow{e^{-1}} Q \xleftarrow{a^{-1}} P \xleftarrow{f^{-1}} P$

$\chi = v-e+f = 3-6+1 = -2$

$T^2\#T^2$

ב. $P \xrightarrow{a} P \xrightarrow{a} P \xrightarrow{b} P \xrightarrow{b} P \xrightarrow{c} Q \xrightarrow{d} Q \xleftarrow{c^{-1}} P \xrightarrow{e} Q \xleftarrow{d^{-1}} Q \xleftarrow{e^{-1}} P$

$\chi = v-e+f = 2-5+1 = -2 \in P^2\#P^2\#P^2\#P^2$

$P^2\#P^2\#T^2$ (-2)

12/15 תוצאות נכונות, בירור חן קלוש!

7. 10: הוכחה. 5: חישוב.

3/15 אין הוכחה, חישוב אינטואיטיבי ללא גאומטריה.

8. הגדרות: 2 לכל הגדרה: מ"מ – 1, חסום לחלוטין – 2, שלם – 2, קומפקטי סדרתית – 2

(-1) אין הסבר מדוע הגדרת השלמות היא קושי.

טופולוגיה מועד מיוחד

3 שעות, 7 מתוך 8 שאלות.

1. הגדר את טופולוגיית המכפלה על $\prod_{\alpha\in I} X_\alpha$ והוכח שהיא T_2 אם"ם X_α הוא T_2 לכל α.

2. הוכח שפונקציה f היא רציפה אם"ם $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$ לכל קבוצה A.

3. הראה שמרחב טופולוגי קומפקטי T_2 הוא תמיד נורמלי.

4. הראה שאם X,Y לא ריקים, אז מכפלתם קשירה אם"ם כל אחד מהם קשיר.

5. הראה ש- βN מרחב לא בן-מניה.

6. הוכח שכל משטח הנתון ע"י זיהוי צלעות של מצולע ניתן להיכתב מחדש כזיהוי צלעות של מצולע שכל קודקודיו מזוהים לנקודה אחת.

7. הראה שאם X מטרי קומפקטי, Y מטרי, ו- $f:X\to Y$ רציפה, אזי f רציפה במידה שווה.

8. חשב את החבורה $\pi_1(R^3\setminus S^1)$.

בהצלחה!

מדור מיון והערכה

מחלקת מנהל תלמידים

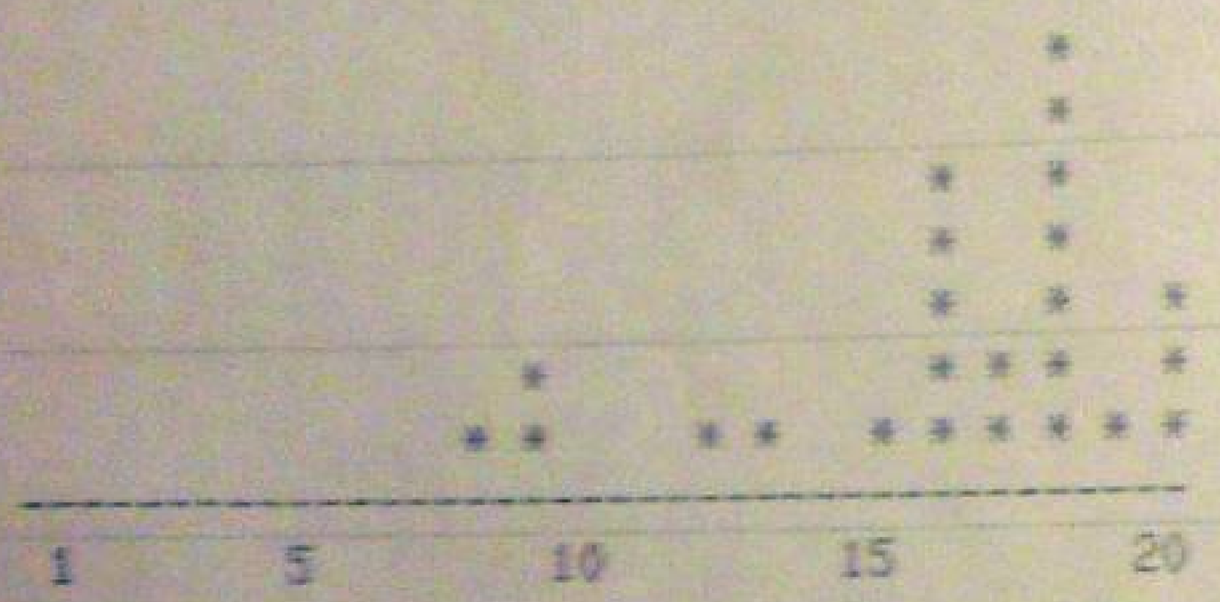
משאל הערכת הוראה

שם המורה: ד"ר דדוד בר-נתן ת.ז: 22165849 שם הקורס: מבוא לטופולוגיה סמסטר ב תשנ"ו

מספר הקורס: 80516 אפיון הקורס: בוגר-חובה מספר משיבים למשאל: 25 מספר רשומים לקורס: 62 החוג: מתמטיקה

אחוז משיבים: 40%

השאלות		מספר משיבים	ממוצע	סטית תקן	חציון	שכיח	ענו "לא רלבנטי"
תרומת הקורס:	הקניית ידע	25	15.7	3.0	16	17	0
	תרומת תרגיל/מעבדה	25	13.4	3.7	15	16	0
	תרומת עבודות בית	25	13.8	3.3	15	16	0
תכנון וארגון:	תכנון וארגון הקורס	25	15.6	3.2	16	12	0
	תרומת חומר הקריאה	8	13.4	3.6	14	17	17
דרך ההוראה:	העברת שיעור מעניינת	25	16.8	3.2	18	20	0
	ארגון השיעורים	25	15.6	3.8	16	20	0
	הרצאה ושיתוף תלמידים	22	16.7	2.6	17	20	3
יחס מורה תלמיד:	תגובות המורה להערות	23	17.7	2.2	18	20	2
	יחס נאות של המורה	25	18.3	2.1	19	20	0
הערכה כללית לקורס		24	16.0	3.4	17	18	
הערכה כללית למורה		25	16.7	3.5	18	19	



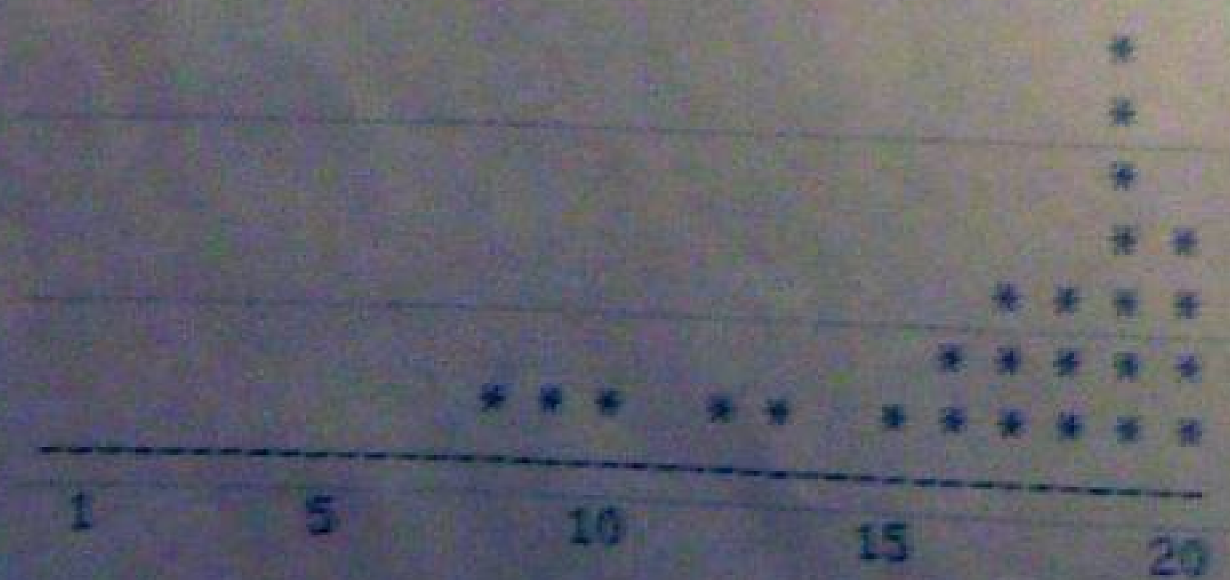
התפלגות ההערכה הכללית לקורס (*= 1 תלמידים)

נורמות להשוואת ההערכות הכלליות

הערכה לקורס: נורמת קורסי " בוגר-חובה" בחוג : ממוצע 15.0 ס.תקן 4.3 431 משיבים

הנורמה הכללית בחוג: ממוצע 15.0 ס.תקן 4.3 551 משיבים

50% מהציונים הממוצעים של "ההערכה הכללית לקורס" בקורסי החוג היו נמוכים משלך.



התפלגות ההערכה הכללית למורה (*= 1 תלמידים)

הערכה למורה: נורמת קורסי " בוגר-חובה" בחוג : ממוצע 15.5 ס.תקן 5.0 429 משיבים

הנורמה הכללית בחוג: ממוצע 15.5 ס.תקן 4.8 550 משיבים

63% מהציונים הממוצעים של "ההערכה הכללית למורה" בקורסי החוג היו נמוכים משלך.

התאמת הקורס לתלמיד - התפלגות מספר המשיבים

על "כמות חומר הקריאה" השיבו: 4% "רבה מדי", 4% "רבה", 16% "מתאימה", 8% "מעטה", 0% "מעטה מדי". (68% "לא רלבנטי")

על "קצב הקורס" השיבו: 8% "מהיר מדי", 8% "מהיר", 79% "מתאים", 4% "איטי", 0% "איטי מדי".

על "רמת הקורס" השיבו: 8% "גבוהה מדי", 12% "גבוהה", 80% "מתאימה", 0% "נמוכה", 0% "נמוכה מדי".