# סילבוס לקורס "משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים"

האוניברסיטה העברית, סתיו 1995

מרצה: דרור בר-נתן, אינשטיין 309, טלפון 658-4187, דואר אלקטרוני drorbn@math.huji.
שעות קבלה: ימי רביעי 13:00-14:00 או לפי קביעה מראש.
תחילת הקורס: יום חמישי ה-2 לנובמבר 1995 בשעה 13:00, בניין שפרינצק חדר 217, גבעת-רם. משך הקורס 14 פגישות שבועיות של שעתיים.
מתרגלת: נאווה מדבב, דואר אלקטרוני tanja@math.huji.
שעות התרגול: שני ב-14:00 בשפרינצק 28 ורביעי ב-15:00 בשפרינצק 29. בשתי השעות יועבר חומר זהה, וחובה להשתתף לפחות באחת מהן.

נושאי הלימוד:

1. דוגמאות למשוואות דיפרנציאליות רגילות בטבע.
2. שיטות פיתרון למשוואות מיוחדות: הפרדת משתנים, הצבה, משוואות הומוגניות, משוואות מדויקות, גורמי אינטגרציה, משוואות לינאריות הומוגניות ולא-הומוגנית, משוואות ברנולי וריקאטי.
3. משפטי קיום ויחידות לפתרון משוואות דיפרנציאליות רגילות כלליות. הכללות למערכות של משוואות ולמשוואות מסדר גבוה.
4. שיטות נומריות.
5. משוואות לינאריות הומוגניות ולא הומוגניות עם מקדמים קבועים. פרופיל הפאזה.
6. משוואות לינאריות מסדר גבוה עם מקדמים כלליים.
7. פתרון בעזרת טורי-חזקות, נקודות סינגולריות רגולריות.
8. משוואות בסל, הרמיט, צ׳ביצ׳ף, לג׳נדר, ומשוואות היפר-גיאומטריות.
9. אנליזה איכותית.

14 שיעורים הם ללא ספק מעט מידי זמן בשביל לכסות את כל הנושאים שלמעלה, ולפיכך נדלג על חלק מהם ע"פ מגבלות הזמן וע"פ רצוני ורצון התלמידים.

ספרות:


1. M. Sever, Ordinary Differential Equations, Boole Press Dublin.
2. Boyce & Di Prima, Elem. Diff. Eqns. & Boundary Value Probs., Wiley N.Y.
3. ש' אגמון, אנליזה קלסית, הוצאת אקדמון.
4. מקורות אחרים ע"פ הצורך.


בסוף כל שיעור וכן גם בחלק משעות התרגול ינתנו תרגילים, לפתרון עד יום הראשון השני שלאחר השיעור. ציון התרגיל יהווה 15% מהציון הכולל בקורס.

משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 1.

1. פתור/פתרי את המשוואות הבאות:

א. $y'+2xy=2xe^{-x^2}$

ב. $xy'+2y=\sin x \quad (x>0)$

ג. $x^3y'+4x^2y=e^{-x} \quad y(-1)=0$

ד. $xy'+(x+1)y=x \quad y(\ln 2)=1$

ה. $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{e^y-x} \quad y(1)=0$ רמז: אולי כדאי לפתור עבור x תחילה?

2. א. הראה/י שאם $y=\phi(x)$ פותר את המשוואה $y'+p(x)y=0$ (כאשר $p(x)$ היא פונקציה כלשהי), אזי גם $y=c\phi(x)$ הוא פתרון של אותה משוואה, לכל קבוע c.

ב. הראה/י שאם $y=y_1(x)$ הוא פתרון של $y'+p(x)y=0$
וכן $y=y_2(x)$ -"- $y'+p(x)y=g(x)$

אזי לכל קבוע c, $y=cy_1+y_2$ הוא פתרון של

$$y'+p(x)y=g(x)$$

משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 2
(להגשה ב- 19/11/95).

1. פתור/פתרי את המשוואות הבאות:

א. $xy' = \sqrt{1-y^2}$ ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x-e^{-x}}{y+e^{y}}$

ג. $x\,dx + ye^{-x}dy = 0$ עם $y(0)=1$

ד. $\frac{dy}{dx} = \frac{ax+b}{cx+d}$ כאשר $a,b,c,d$ קבועים.

ה. $\frac{dy}{dx} = -\frac{ax+by}{bx+cy}$ כאשר $a,b,c$ קבועים.

ו. $0=(e^x\sin y+3y)dx-(3x-e^x\sin y)dy$

ז. $x^2y^3+x(1+y^2)y'=0$ רמז: $\mu = y^\alpha/x$ עבור איזשהו $\alpha$.

ח. $dx+\left(\frac{x}{y}-\sin y\right)dy=0$

ט. $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$

י. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$

2. א. מהו התנאי לקיום גורם אינטגרציה התלוי רק ב-$y$ במשוואה

$$M(x,y)+N(x,y)y'=0\ ?$$

ב. הראה/י שאם $\frac{N_x-M_y}{xM-yN}$ תלוי רק ב-$x\cdot y$, אזי למשוואה הנ"ל יש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu=\mu(x\cdot y)$ ומצא/י נוסחה עבורו.

3. פתור/פתרי את המשוואה $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$ רמז: כדאי לעבור ל
$x_1=x+\alpha$
$y_1=y+\beta$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 3.
(להגשה ב- 26/11/95)

1. פתור/פתרי את המשוואות הבאות:

א. $(x^2+3xy+y^2)dx-x^2dy=0$     ב. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x}{2x-y}$

ג. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y-x+5}{2x-y-4}$    רמז: כדאי לנסות $x_1=x+\alpha$, $y_1=y+\beta$

ד. $y'=\frac{y^3}{1-2xy^2}$    $y(0)=1$

ה. $y'=\frac{x^2-1}{y^2+1}$    $y(-1)=1$

ו. $\frac{dy}{dx}=\frac{2y+\sqrt{x^2-y^2}}{2x}$

ז. $0=(\cos 2y-\sin x)dx-2\,tg\,x\sin 2y\,dy$

2. משוואת ריקטי היא המשוואה $y'=q_1(x)+q_2(x)y+q_3(x)y^2$

א. הראה/הראי שאם $y=y_1(x)$ הוא פתרון כלשהו של המשוואה, אזי ההצבה $y=y_1(x)+\frac{1}{v(x)}$ הופכת את הבעיה לבעיה לינארית ב-$v$, וכך ניתן למצוא את הפתרון הכללי.

ב. מצא/י את הפתרון הכללי של $y'=1+(x-y)^2$. רמז: $y_1=x$

3. מצא/י דוגמא לפונקציה לא גזירה המקיימת את תנאי ליפשיץ.

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים-סתיו 1995 - תרגיל מספר 4
(להגשה -> 3/12/95 לכל המאוחר)

1. בכתה הוכחנו יחידות למשפט פיקרד רק עבור $x \geq x_0$. הוכיחו יחידות גם עבור $x \leq x_0$.

2. נתונה המשוואה $y' = -2xy$ , $y(0) = 1$

א. מצאו פתרון מדויק בנקודה $x = 1$

ב. מצאו פתרון מקורב בנקודה $x=1$ תוך שימוש בשיטת אוילר עם $h = 1/3$ ועם $h = 1/10$

ג. כנ"ל בעזרת שיטת אוילר המשופרת עם $h = 1/3$.

ד. כנ"ל בעזרת שיטת רונגה-קוטה עם $h = 1/3$.

3*. מצאו את כל השיטות מהצורה

$$y_{n+1} = y_n + h\left[aF(x_n, y_n) + bF(x_n + \alpha h, y_n + \beta h F(x_n, y_n))\right]$$

($a, b, \alpha, \beta$ קבועים כלשהם) שהשגיאה המקומית בהם היא מסדר $h^3$.

4*. מצאו שיטת קירוב נומרית פשוטה מסוג Runge-Kutta

שהשגיאה המקומית בה היא מסדר $h^4$.

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מספר 5
(להגשה ב- 10/12/95 לכל המאוחר)

1. בכתה הוכחנו יחידות (משפט פיקרד) רק עבור $x \geq x_0$. הוכח/י יחידות גם עבור $x \leq x_0$.

1. נתונה המשוואה $y' = -2xy$ , $y(0)=1$

א. מצא/י פתרון מדויק בנקודה $x=1$

ב. מצא/י פתרון מקורב בנקודה $x=1$ ע"י שימוש בשיטת אוילר עם $h=1/3$ ועם $h=1/10$

ג. כנ"ל בעזרת שיטת אוילר המשופרת עם $h=1/3$.

ד. כנ"ל בעזרת שיטת רונגה-קוטה עם $h=1/3$.

*2. מצא/י את כל השיטות מהצורה

$$y_{n+1} = y_n + h\left[aF(x_n,y_n) + bF(x_n+\alpha h, y_n+\beta h F(x_n,y_n))\right]$$

($a,b,\alpha,\beta$ קבועים לבחור) שהשגיאה המקומית בהם היא מסדר $h^3$.

*3. מצא/י שיטת קירוב נוספת בשיטה מסוג Runge-Kutta

שהשגיאה המקומית בה היא מסדר $h^4$.

4. פתור/פתרי את המשוואות הבאות (פתרון כללי)

א. $y'' - 2y' + 2y = 0$

ב. $y'' + 2y' - 8y = 0$

ג. $9y'' - 6y' + y = 0$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 6
(להגשה ב-17/12/95 לכל המאוחר)

נתונות המערכות הבאות:

א.
$$\dot{x}=x-2y$$
$$\dot{y}=-2x+4y$$
$$x(0)=3 \quad y(0)=1$$

ב.
$$\dot{x}=x-5y$$
$$\dot{y}=2x-5y$$
$$x(0)=3 \quad y(0)=1$$

ג.
$$\dot{x}=y \qquad x(0)=1$$
$$\dot{y}=z \qquad y(0)=2$$
$$\dot{z}=-6x-11y-6z \qquad z(0)=-1$$

1. רשום/רשמי כל אחת מהן בצורה מטריציאלית.

2. מצא/י ערכים עצמיים ווקטורים עצמיים של כל אחת מהמטריצות המתקבלות.

3. לכסן/י את המטריצות הנ"ל.

4. חשב/י את $\exp(tA)$ עבור המטריצות הנ"ל.

5. פתור/י את המערכות הנתונות.

6* תרגיל בלתי תלוי:

א. הוכח/י שאם מטריצות A ו-B מקיימות $AB=BA$ אז:
$$\exp(A+B)=(\exp A)\cdot(\exp B)$$

ב. מצא/י דוגמא למטריצות שעבורן
$$\exp(A+B)\neq(\exp A)\cdot\exp(B)$$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 7
(להגשה ב- 24/12/95 לכל המאוחר)

1. צייר/י את פרופיל הפזה של המשוואות הבאות:

א. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y \\ \dot{y}=-x+4y \end{cases}$ ב. $\begin{cases} \dot{x}=4x-5y \\ \dot{y}=4x-4y \end{cases}$ ג. $\begin{cases} \dot{x}=x-2y \\ \dot{y}=-2x+4y \end{cases}$

ד. $\begin{cases} \dot{x}=-x+y \\ \dot{y}=-5x+3y \end{cases}$ ה. $\begin{cases} \dot{x}=3y \\ \dot{y}=x-2y \end{cases}$ ו. $\begin{cases} \dot{x}=x-5y \\ \dot{y}=2x-5y \end{cases}$

ח. $\begin{cases} \dot{x}=x+2y \\ \dot{y}=2x-4y \end{cases}$ ט. $\begin{cases} \dot{x}=-4x-2y \\ \dot{y}=5x+2y \end{cases}$ י. $\begin{cases} \dot{x}=-5x+4y \\ \dot{y}=-8x+7y \end{cases}$

2. תאר/י איכותית את התנהגות הפתרונות של המערכת

$$\begin{cases} \dot{x}=13+x-9y+\sin(2-2x-y+xy) \\ \dot{y}=7+2x-5y+\cos(x-1) \end{cases}$$

בסביבת הנקודה $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 8
(להגשה ב- 31/12/95 לכל היותר)

1. פתור/פתרי את המערכות הבאות וצייר/י את פרופיל הפאזה:

א. $\begin{cases}\dot{x} = 8x - y \\ \dot{y} = 4x + 4y\end{cases}$

ב. $\begin{cases}\dot{x} = -4x - y \\ \dot{y} = 4x - 8y\end{cases}$

ג.* $\begin{cases}\dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + y + z \\ \dot{z} = -x + 2z\end{cases}$

2. פתור/פתרי (פתרון מלא) את המערכות הבאות ע"י לכסון:

א. $V' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$

ב. $V' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

ג. $V' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} t^{-3} \\ -t^{-2} \end{pmatrix}$ $\quad t > 0$

3. בשתי המערכות הבאות נתון הפתרון הכללי של המשוואה ההומוגנית המתאימה. מצא/י פתרון כלשהו של המשוואות:
(ניתן להניח $t>0$)

א. $tV' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$ פתרון ההומוגנית: $V(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

ב. $tV' = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} -2t \\ t^4 - 1 \end{pmatrix}$ פתרון ההומוגנית: $V(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t^{-1} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} t^{2}$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 9
(להגשה ב- 7/1/96 לכל המאוחר)

1. פתור/פתרי את המערכות הבאות ע"י לכסון (פתרון מלא):

א. $v' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} e^t \\ t \end{pmatrix}$ ב. $v' = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} -\cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$

2. פתור/פתרי דרך מציאת מטריצה יסודית: $(t > 0)$

$$tv' = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} v + \begin{pmatrix} 1-t^2 \\ 2t \end{pmatrix}$$

פתרון ההומוגנית:
$v(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} t^{-1}$

3. פתור/פתרי ע"י נחוש:

א. $y'' + 4y = x^2 + 3e^x \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

ב. $y'' + 9y = x^2 e^{3x} + 6$

ג. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4$

3. פתור, כאשר $u'' + \omega_0^2 u = \cos \omega t$, $\omega^2 \neq \omega_0^2$

4. הוכח/י שאם $\Psi(t)$ היא מטריצה של פונקציות, שעמודותיה הוקטורים $v_1 \dots v_n$:
$\Psi(t) = \left( v_1(t) \,|\, v_2(t) \,|\, \dots \,|\, v_n(t) \right)$, אז:

$$(\det \Psi(t))' = \det(v_1' | v_2 | \dots | v_n) + \det(v_1 | v_2' | \dots | v_n) + \dots + \det(v_1 | v_2 | \dots | v_n')$$

*5. מהו האופרטור $e^{3D}$? במלים אחרות, אם $f$ פונקציה, מהו $(e^{3D}f)(t)$?

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 10
(להגשה ב- 14/1/96 לכל המאוחר)

1. מצאו את רדיוס ההתכנסות של הטורים

א. $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n$ ב. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{2^n} x^n$

ג. $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x+1)^n}{n^2}$ סביב $x=-\frac{1}{2}$

2. פתרו את המשוואה $(y')^2=1-y^2$ ; $y(0)=0$
תוך שימוש בטורי חזקות, עד למציאת המקדם של $x^5$ (כולל).
השוו עם הפתרון המדויק.

3. מצאו את נוסחת הנסיגה המגדירה את מקדמי טורי החזקות הפותרים את המשוואות הבאות:

א. $y''-xy'-y=0$ , $y(0)=1$ , $y'(0)=0$

ב. $y''-xy'-y=0$ $y(1)=1$ $y'(1)=0$

ג. $(1-x)y''+y=0$ $y(0)=0$ $y'(0)=1$

4. מה יהיה רדיוס ההתכנסות (לפחות) של הטור הפותר את

$(x^2-2x-3)y''+xy'+4y=0$ ?

5. מהו קצב הגידול של הסדרה המוגדרת ע"י

$a_0=1;\ a_1=0;\ a_n=a_{n-1}+2a_{n-2}\quad n\geq 2$ ?

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים סתיו 1995 - תרגיל מס' 11
(להגשה ב 21/1/96 לכל המאוחר)

1. א. מצא/י נוסחת נסיגה פשוטה המקשרת בין $a_n=\binom{2n}{n}$ לבין $a_{n+1}$.

ב. תהי $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. מצא/י משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון המתקיימת ע"י $g(x)$.
רמז: כדאי להסתכל על $xg'$ ועל $x(xg')$.

ג. פתור/פתרי את המשוואה הנ"ל עם תנאי ההתחלה המתאימים, ובכך תסכמ/י את הסכום $\sum\binom{2n}{n}x^n$.

ד. מהו $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{5^n}\binom{2n}{n}$?

ה. מהו קצב הגידול של $\binom{2n}{n}$?

2. מצא/י את הנקודות הסינגולריות של המשוואה

$$x(1-x^2)^3y''+(1-x^2)^2y'+2(1+x)y=0$$

האם הן רגולריות או לא?

3. פתור/פתרי בפתרון כללי: א. $x^2y''-3xy'+4y=0$

ב. $x^2y''+2xy'+4y=0$

4. מצא/י שני פתרונות למשוואה הבאה בעזרת טורי חזקות, ורשום/רשמי את הטורים עד לחזקה $x^{10}$ ובצורה שממנה יראה ברור כלל המשך:

$$\left(\begin{array}{c}\text{ע"י}\\ x=0\end{array}\right)\ 2xy''+y'+xy=0$$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים סתיו 1995 – תרגיל מס' 12
(להגשה ב- 28/1/96 לכל המאוחר)

1. פתור/פתרי בעזרת טורי חזקות (2 פתרונות סביב $x=0$):

$$x^2y''+xy'+2xy=0$$

2. מצא/מצאי פתרון אחד של משוואת בסל מסדר חצי

$$x^2y''+xy'+(x^2-\tfrac{1}{4})y=0$$

בעזרת טורי חזקות. הטור המתקבל צריך להיראות מוכר. מהו? נסה/נסי לנחש את הפתרון השני (על סמך הראשון). בדוק/בדקי את הניחוש.

3. אומרים שלמשוואה $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ יש נקודה סינגולרית רגולרית ב- $x=\infty$ אם המשוואה המתקבלת ממנה לאחר ההצבה $x=\frac{1}{t}$ יש נקודה סינגולרית רגולרית ב- $t=0$. רשום/רשמי בצורה מפורשת את התנאים על הפונקציות $P,Q,R$ השקולים לקיום נקודה סינגולרית רגולרית ב- $x=\infty$.

4. חקור/חקרי איכותית את המשוואות הבאות:

$x^3y''+2(1-\cos x)y'+\sin x\,y=0$ ליד $x=0$

$x^2y''+2xy'+\beta y=0$ ליד $x=\infty$ עבור

$\beta=-\frac{3}{4},\ \frac{3}{16},\ \frac{1}{4},\ \frac{5}{4}$.

מה אם $\beta=0$?

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - תרגיל מס' 13
(להגשה ב- 4/2/96 לפני השיעור)

1. חקור/חקרי ומיין את המשוואות הבאות:

א. $x^3y''+2(1-\cos x)y'+\sin x\, y=0$ ליד $x=0$.

ב. $x^2y''+2xy'+\beta y=0$ ליד $x=\infty$ עבור $\beta=-\frac{3}{4},\frac{3}{16},\frac{1}{4},\frac{5}{4}$. מה אם $\beta=0$?

ג. $y''+k^2x^\alpha y=0$ עבור **כל** הערכים האפשריים של $\alpha$ ו $k$, ליד $x=\infty$.

ד. $y''-2xy'+2ny=0$ ; $n>0$ ; ליד $x=\infty$.

ה. $xy''+(2n+1)y'+xy=0$ ; $n>0$ ; ליד $x=\infty$.

ו. $x^2y''-4xy'+(6-x)y=0$ ליד $x=\infty$ וליד $x=-\infty$.

ז. $y''+\frac{1}{x^2}y'+\frac{1}{4x^4}y=0$ ליד $x=\infty$.

2. מצא קבוע $k$ שעבורו פתרונות המשוואה

$$(1-x)y''-xy'+ky=0$$

מתנהגים כ $<\infty$ ?

-1-

# משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים, נובמבר 2, 1995.

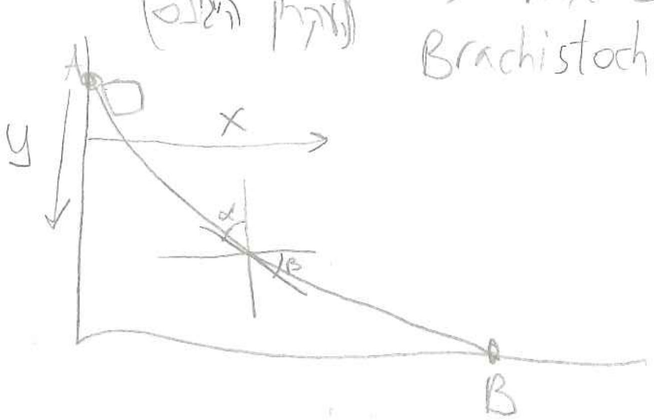
1. דרך שווה, ...

2. מתמטית, משוואה דיפרנציאלית היא למשל: $\frac{ye^{(1-y')^2}}{\cos(x+y')}=0$

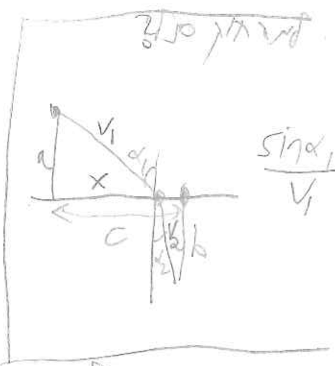
עוד $y'=y+e^x$ ($y=xe^x+\cancel{7}e^x$ [illegible])

3. פיסיקה: 1. עקרון העבודה המינימלית
2. חוקי ניוטון
3. $\infty$ קרני אור
4. ... Brachistochrone

(עקרון הייגנס)



$$mgy=\frac{1}{2}mv^2$$
$$v=\sqrt{2gy}$$
$$\frac{\sin\alpha}{v}=C$$



$$\frac{\sin\alpha_1}{v_1}=\frac{\sin\alpha_2}{v_2}$$

חוק סנל:

$$tg\beta=y' \; : \; \sin\alpha=\cos\beta=\frac{1}{\sqrt{1+tg^2\beta}}=\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$$

המשוואה:

$y(0)=0 \quad y(B)=A \qquad \sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}=C_1$

(כבר התקדמנו הרבה!)

עוד $y(1+y'^2)=C_2$

הפתרון: לעשות כך הקורס ...

פתרון מקורב בעזרת מחשב:

$$y'=\sqrt{\frac{C_2-y}{y}}$$

וגם לעשות כך הקורס ... (אולי)

$$\sqrt{\frac{y}{C-y}}\,dy=dx$$
$$\int\sqrt{\frac{y}{C-y}}\,dy=x+C_3$$

המחשב אומר ש- ||

$$\sqrt{y(C_2-y)}-\frac{C_2}{2}\,atg\frac{(C_2-2y)\sqrt{\frac{y}{C_2-y}}}{2y}$$

משהו בין הנגזרות.

טקסונומיה: מ"ד: משוואה שמקשרת בין הנגזרות של הפונקציה הנעלמת

מד"ח: משוואת הפונקציה הנעלמת היא של כמה משתנים, ומופיעות בה נגזרות חלקיות: $u_t=u_{xx}$ - [illegible]

מד"ר: רק נגזרות רגילות: $\frac{dy}{dx}$, $y'$, $F(x,y,y',y'')=0$ וכו'

סדר: ... ליניאריות ...

דוגמאות למסדר 1: שהם
סוג ופתור:

$y' = e^x$

$y' = tg\left(e^{\cos x}\right)$

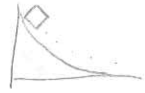
גורם אינטגרציה: $y' + \frac{1}{2}y = \frac{3}{2}$

״תנאי התחלה״ $\frac{1}{x}y' - 2y = 1 \quad y(0) = 0$

-27-

תרגול

משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים, 9 בנובמבר 1995. תרגול

1. תזכורת  , $y'=\sqrt{\frac{c-y}{y}}$ או $y'^2=\frac{c-y}{y}$

2. נמצא את ... פתרון  $\sqrt{1+y'^2}=c\frac{y'}{\sqrt{y}} \Leftarrow y(1+y'^2)=cy'^2$

עם המשוואה של 2c

$y'^2=\left(\frac{y}{c-y}\right)$ זו אותה המשוואה? $z=c-y$ למה?

שיטות פתרון מיוחדות:

3. משוואות ליניאריות מסדר ראשון: $y'+p(x)y=g(x)$

פתרון ...

שאלות?

4. הפרדת משתנים: $m(x)+n(y)y'=0$ משל: $y'=\frac{3x^2+4x+2}{2(y-1)}$, $y(0)=-1$

השיטה הנוחה לזכירה:

$m(x)dx+n(y)dy=0$

$\int m(x)\,dx+\int n(y)\,dy=C$

משל: $2(y-1)dy=(3x^2+4x+2)dx$

$y^2-2y=x^3+2x^2+2x+C$

$C=3$

$y=1\pm\sqrt{x^3+2x^2+2x+4}$

$(-)$

השיטה הקלה להבנה:

נניח שקיימת $M(x)$ ונניח קיים $N$ כך ש $M_x=m$

$N_y=n$

$M_x(x)+N_y(y)y'=0$

$\frac{d}{dx}M+\frac{d}{dx}N(y)=0$

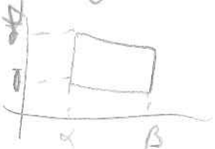
$\frac{d}{dx}(M(x)+N(y))=0$

$M(x)+N(y)=C$

---

5. משוואות מדויקות: $\psi(x,y)=C$ ----

$M+Ny'=0$ אם $M_y=N_x$

משפט: אם $R=$  ונניח רציפות $M,N,M_y,N_x$ אזי:

קיים $\psi$ על $R$ המקיים $\psi_x=M$, $\psi_y=N$ אמ"מ $M_y=N_x$

הוכחה: רק אם, ברור

אם: ... קיים כזה $\psi_x=M$ ואותו ממשיכים.

דוגמא: פתור

$$(y\cos x+2xe^{y})+(\sin x+x^{2}e^{y}+2)y'=0$$

(הפתרון: $\psi(x,y)=y\sin x+x^{2}e^{y}+2y$) או נתון $x=0$, $y=1$ ...

6. גורמי אינטגרציה:

לפעמים $M+Ny'=0$ הופכת מדויקת אם מכפילים ב-$\mu$...

התנאי על $\mu$:

$$M\mu_y-N\mu_x+(M_y-N_x)\mu=0$$

זו מד"ח. יכולים להיות לה הרבה פתרונות, ויכול להיות מאוד קשה למצוא אותן. אבל אם יש הנחות:

$\mu$ תלוי רק ב-$x$ בלבד:

$$\frac{\mu_x}{\mu}=\frac{M_y-N_x}{N}$$

נצטרך לבדוק אם RHS לא תלוי ב-$y$.

דוגמא: פתור

$$(3xy+y^{2})+(x^{2}+xy)y'=0$$

7. משוואות הומוגניות: משוואות מהצורה: $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$ כמו $y'=\frac{y^{2}+2xy}{x^{2}}$

פותרים ע"י הצבה $v=\frac{y}{x}$

# משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים, 16 בנובמבר 1995 — סמני תרגיל

דוגמה: פתור/פתרי: $(2x^2-\frac{3}{2}y\sqrt{xy})+(6x\sqrt{xy}-\frac{x^3}{2y})y'=0$ (רמז: $\mu=x^\alpha y^\beta$)

תרגיל: $\frac{x}{y}dx+\left(\frac{x^2+xy}{y^2}\right)dy=0$

7. משוואות הומוגניות: $y'=F(\frac{y}{x})$ (דוגמה) $y'=\frac{y^2+2xy}{x^2}$

8. משוואת ברנולי: $y'+p(x)y=q(x)y^n$ אם $n\neq0,1$, הצבה $y=v^\alpha$

$\boxed{\text{זכור את משפט פיקרד.}}$

יש עוד כמה סוגים לא נדון בהם . .

קיום ויחידות של פתרונות: ב. קורה שאין יחידות! ו. קורה שיש קיום רק לזמן מוגבל

אפשר להתנגש בזמן נגדית: הפתרון יוצא $y=tg^3x$ $y'=3\frac{tg^2x}{\cos^2x}=3tg^2(1+tg^2)=3y^{3/2}(1+y^{3/2})$

<u>הגדרה</u>. תנאי ליפשיץ: $|f(y_1)-f(y_2)|<K\cdot|y_1-y_2|$

דוגמה: $f$ גזירה מקיימת, אם $f$ מקיימת אזי היא רציפה.

$F=y^{2/3}$ או $f=y^{1/2}$ (אינן רציפות ליפשיציות)

משפט פיקרד: תהי $f: R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]$ רציפה במשתנה $x$ וליפשיץ במשתנה $y$, ויהי $M$ חסם של $f$ בתחום $R$. אזי למשוואה $\phi'=f(x,\phi)$, $\phi(x_0)=y_0$ קיים פתרון יחיד בתחום $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ כאשר $\delta=\min(a,\frac{M}{b})$

<u>הוכחה</u>. נרשום מחדש $\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))dt$ (זה פשוט $\int_{x_0}^{x}$ של המשוואה המקורית)

רעיון: $\phi_0(x)=y_0$ $\phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_{n-1}(t))dt$

טענות:
1. $\phi_n$ מוגדרת היטב.
2. $|\phi_n-\phi_{n-1}(x)|<\frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$ עבור כל $n$
3. $\phi=\lim\phi_n$ מתכנס במ"ש
4. ולכן הוא פתרון.
5. והוא יחיד. כי $|\phi-\psi|\le A\int|\phi-\psi|dt \Leftarrow\Leftarrow$

תהי $U=\int|\phi-\psi|\ge0$
$(e^{-Ax}U)'\le0$
$e^{-Ax}U\le0$

הכללה: ניתן להחליף את המשתנה $y$ בווקטור ב-$\mathbb{R}^n$

עם השינויים הברורים מתאימים:

$$y_1' = F_1(x, y_1, \dots, y_n)$$

$$\vdots$$

$$y_n' = F_n(x, y_1, \dots, y_n)$$

<u>תרגיל</u>: איך מגדירים

$$y^{(n)} = F(x, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)}) \quad ?$$

משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים, 23 בנובמבר 1995.

תנאי ליפשיץ $|f(y_1)-f(y_2)|<K\cdot|y_1-y_2|$ עבור איזשהו $K$ קבוע.

משפט פיקרד. תהי $f:R=[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\longrightarrow\mathbb{R}$ רציפה וליפשיץ ב-$y$ ויהי $M$ חסם של $f$ ב-$R$, אזי למשוואה $\phi'=f(x,\phi)$ , $\phi(x_0)=y_0$ , קיים פתרון יחיד בתחום $x_0-\delta<x<x_0+\delta$ , כאשר $\delta=\min(a,\frac{b}{M})$

הוכחה:

$$\phi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi(t))dt$$

נגדיר

$$\phi_0(x)=y_0\ ,\quad \phi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,\phi_{n-1}(t))dt$$

1. $\phi_n$ מוגדרת היטב.

2. $|\phi_n(x)-\phi_{n-1}(x)|<\frac{MK^{n-1}}{n!}|x-x_0|^n$ עבור $n\geq 1$

3. $\phi=\lim\phi_n$ מתכנס במ"ש.

4. ולכן הוא פתרון

5. והוא יחיד כי $|\phi-\psi|\leq A\int|\phi-\psi|$ . תהי

$$0\leq V=\int|\phi-\psi|\quad ;\ V(x_0)=0$$

$$(e^{-Ax}V)'\leq 0$$

$$\Leftarrow\quad e^{-Ax}V\leq 0$$

שיטות נומריות:

1. שימוש במשפט טיילור: אוילר מפורש! (דוגמה)

$$y' = -y \qquad y(0)=1$$

2. שיטת אוילר

$x_0 \quad x_{n+1} = x_n + h$

$y_0 \quad y_{n+1} = y_n + h y_n' \; (= y_n + h f(x_n, y_n))$

דוגמה - תרגיל $y(1)$ של $h = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}$

$y(1) = 0.3679$

$h=1 \to 0$

$h=\frac{1}{2} \to \frac{1}{4} = 0.25$

$h=\frac{1}{3} \to 8/27 \to 0.2963$

כמה מהר מתכנס לתוצאה?

שגיאה מקומית: (מניח $y_n$ מדויק)

$$\phi(x_n+h) = \phi(x_n) + h\phi'(x_n) + O(h^2)$$

$$y_{n+1} = y_n + h y_n' \qquad O(h^2)$$

שגיאה מצטברת:

תאוריה: $E \sim \frac{x-x_0}{h} \cdot h^2 \sim h$

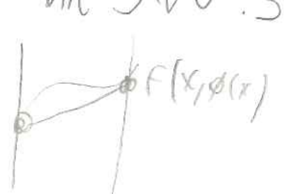
שיקולי "רזולוציה" משמעותיים בהוכחה.

מסקנה - כדי להגיע לדיוק $10^{-6}$ צריך $10^6$ חישובים - וזה לא מספיק.

3. שיטת אוילר משופרת: $x_{n+1} = x_n + h$,

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x, \phi(x))\,dx$$

טרפז



$$y_{n+1} = y_n + \frac{f(x_n,y_n) + f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}h = y_n + \frac{y_n' + f(x_n+h, y_n+hy_n')}{2}h$$

בצורה אחרת: נחשב $(x_n, y_n)$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f(x_n+h, y_n+k_1h)$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{k_1+k_2}{2}h$$

הערכת שגיאה: מקומית $\sim h^3$

מצטברת $\sim h^2$

לדיוק $10^{-6}$ צריך $2\cdot 10^3$,

4. שיטות (רונגה-קוטה) מסדר גבוה יותר: מסדר 7

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$y_{n+1} = y_n + (\beta_1 k_1 + \dots + \beta_7 k_7)h \qquad k_2 = f(x_n + \alpha_2 h, y_n + \alpha_2 k_1 h)$$

$$k_3 = f(x_n + \alpha_3 h, y_n + \alpha_3 k_2 h)$$

$$k_7 = \dots$$

בוחרים את טור טיילור ל-h ומוצאים $\alpha_i, \beta_i$ כך שהטעות תהיה קטנה

5. שיטת Runge-Kutta

מקומית $\sim h^5$

מצטברת $\sim h^4$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

כאשר

$$\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$$

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 30 נובמבר 1995.

## תזכורת

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \Longleftrightarrow \begin{aligned} v_0'&=v_1\\ v_1'&=v_2\\ &\vdots\\ v_{n-2}'&=v_{n-1}\\ v_{n-1}'&=F(x,v_0,\dots,v_{n-1})\end{aligned} \Longleftrightarrow \overline{V}'=F(x,\overline{V}), \quad \overline{V}=\begin{pmatrix}v_0\\ \vdots\\ v_{n-1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} y(x_0)&=y_0\\ y'(x_0)&=y_1\\ &\vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)&=y_{n-1}\end{aligned} \Longleftrightarrow \begin{aligned} v_0(x_0)&=y_0\\ &\vdots\\ v_{n-1}(x_0)&=y_{n-1}\end{aligned} \qquad \overline{V}(x_0)=\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

מסקנות: מערכת משוואות ממעלה גבוהה n סגירות
ב. משוואה ממעלה n מצריך לפתרון כללי תנאי n-ח קבועים.

---

שלוש נקודות בנושא הקודם

---

משוואות ליניאריות ההומוגניות עם מקדמים קבועים. (ממעלה 2, לשם הדוגמא)

$$ay''+by'+cy=0$$

אוסף הפתרונות מהווה מרחב וקטורי, מצריך לבנ-פתרונות בת"ל כך שהאוסף כולו הוא $\{c_1y_1+c_2y_2\}$

**דוגמאות**

1. $y''+y'-6y=0$
2. $y''-4y'+5y=0$
3. $y''-2y'+y=0$

סקר מטריצות, ע"ע, ו"ע, לכסון, צורת ז'ורדן, $e^{\text{מטריצה}}$.
0 1/2 1/2 1/2 1/4

$$\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$$

Name:____________________

# First Midterm — Linear Algebra in Two Dimensions

Math 22a, Oct 23 1991

Dror Bar-Natan

You have 120 minutes to answer the following 6 questions. The weight of each question is marked on it, plan your time wisely! Notice that the maximum possible total is 150 points, which is about twice of what I expect most people to get. You may use any material you wish to use other than your friends. At the end of the 120 minutes, return this form together with your work and don't forget to sign your name on anything you submit.

3. (25 points) Most of the people in the village *Dir el-Abad* on the northern coast of the Sinai desert in Egypt, are fishermen. I kind of forgot what their main catch is (I've been there once when I was in elementary school) but I know for sure it's not sharks. However, that's not going to stop us from calling them sharks anyway. When there are many sharks in the mediterranean, lots of people who normally pick dates in *el-Arish* move in to Dir el-Abad to make some money, and when there are few sharks in the mediterranean people move out and pick dates. Therefore the derivative of the excess population $p$ (beyond the number $p_0$ of permanent residents) of this little village is linearly dependent on the excess population $s$ (beyond the average $s_0$) of sharks, with a positive coefficient. However, when there are many (resp. few) fishermen in Dir el-Abad, the excess population $s$ decreases (resp. increases). This is summarized by the following differential equation:

$$\frac{dp}{dt} = ms(t) \qquad \left(\begin{array}{l}m \text{ measures the } \textit{mobility} \text{ of people in northern}\\ \text{Sinai.}\end{array}\right)$$

$$\frac{ds}{dt} = -ep(t) - d\cdot s(t) \qquad \left(\begin{array}{l}e \text{ measures the } \textit{efficiency} \text{ of fishing techniques in}\\ \text{Dir el-Abad and } d\cdot s(t) \text{ measures the } \textit{death} \text{ rate}\\ \text{of sharks due to natural causes, which increases}\\ \text{when the population is large.}\end{array}\right)$$

(a) Write this differential equation in matrix form.

(b) For $m = 1$, $e = 2$ and $d = 2$ (in some units), solve this differential equation with arbitrary initial conditions.

(c) Draw schematically the long term behavior of this system in the (people, sharks) plane for arbitrary initial conditions. (Namely, draw the phase portrait of the above equation).

Name:____________________

First Midterm — Linear Algebra in Two Dimensions

Math 22a, Oct 23 1991

Dror Bar-Natan

You have 120 minutes to answer the following 6 questions. The weight of each question is marked on it, plan your time wisely! Notice that the maximum possible total is 150 points, which is about twice of what I expect most people to get. You may use any material you wish to use other than your friends. At the end of the 120 minutes, return this form together with your work and don't forget to sign your name on anything you submit.

3. (25 points) Most of the people in the village *Dir el-Abad* on the northern coast of the Sinai desert in Egypt, are fishermen. I kind of forgot what their main catch is (I've been there once when I was in elementary school) but I know for sure it's not sharks. However, that's not going to stop us from calling them sharks anyway. When there are many sharks in the mediterranean, lots of people who normally pick dates in *el-Arish* move in to Dir el-Abad to make some money, and when there are few sharks in the mediterranean people move out and pick dates. Therefore the derivative of the excess population $p$ (beyond the number $p_0$ of permanent residents) of this little village is linearly dependent on the excess population $s$ (beyond the average $s_0$) of sharks, with a positive coefficient. However, when there are many (resp. few) fishermen in Dir el-Abad, the excess population $s$ decreases (resp. increases). This is summarized by the following differential equation:

$$\frac{dp}{dt} = ms(t) \qquad \left(\begin{array}{l}m \text{ measures the } \textit{mobility} \text{ of people in northern}\\ \text{Sinai.}\end{array}\right)$$

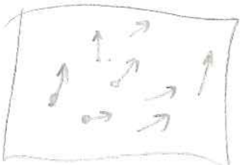
$$\frac{ds}{dt} = -ep(t) - d\cdot s(t) \qquad \left(\begin{array}{l}e \text{ measures the } \textit{efficiency} \text{ of fishing techniques in}\\ \text{Dir el-Abad and } d\cdot s(t) \text{ measures the } \textit{death} \text{ rate}\\ \text{of sharks due to natural causes, which increases}\\ \text{when the population is large.}\end{array}\right)$$

(a) Write this differential equation in matrix form.

(b) For $m = 1$, $e = 2$ and $d = 2$ (in some units), solve this differential equation with arbitrary initial conditions.

(c) Draw schematically the long term behavior of this system in the (people, sharks) plane for arbitrary initial conditions. (Namely, draw the phase portrait of the above equation).

# משוואות דיפרנציאליות לפיזיקאים, 14 לדצמבר 1995



1. כמה מילים על מערכות דינמיות $\dot{x}=f(x,y)$, $\dot{y}=g(x,y)$

ולכן משוואות ליניאריות הן מעניינות . . . . ---

2. א. $V'=AV,\ V(0)=V_0 \Leftarrow V(t)=e^{At}V_0$

ב. אם $A=C\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}C^{-1}$ אז: $e^{At}=C\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}C^{-1}$

ג. איך מוצאים את $C$ ואת $\lambda_1, \lambda_2$ ?

תשובה 1. $\lambda_i$ הם השורשים של הפולינום האופייני $\det(A-\lambda I)=0$

2. $C=(V_1|V_2)$ ו- $(A-\lambda_i I)v_i=0$. צריך עזרה אם $\lambda_1=\lambda_2$ !

3. דוגמא: $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-1+i \quad \lambda_2=-1-i$

$v_1=\begin{pmatrix}\frac{-1+i}{2}\\1\end{pmatrix} \quad V_2=\begin{pmatrix}\frac{-1-i}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}\frac{-1+i}{2}&\frac{-1-i}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(-1+i)t}&0\\0&e^{(-1-i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}e^{(-1-i)t}+\frac{1-i}{2}e^{(-1+i)t}&-\\-&-\end{pmatrix}$$

$$=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t&\sin t\\-2\sin t&\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

$A=C\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}C^{-1}$ | $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ מלכסנת

4. פרופיל פאזות: $\lambda_1<0<\lambda_2$

$0<\lambda_1<\lambda_2$

$\lambda_1<\lambda_2<0$ } $\lambda_1, \lambda_2$ שונים וממשיים

$0=\lambda_1<\lambda_2$

$\lambda_1<0=\lambda_2$

$0<\lambda$

$\lambda=0$ } $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ממשי ומנוון יש רק ... אחד

$\lambda<0$

$Re\lambda=0$

$Re\lambda>0$ } $\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\bar{\lambda}$ מרוכב

$Re\lambda<0$

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 21 לדצמבר 1995

1. גנבות זוכה אתמול.
2. למה $\exp t\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix}\cos bt & -\sin bt\\ \sin bt & \cos bt\end{pmatrix}$
   1. הוכחה מפורשת $[I,J]=0$
   2. הוכחה בעזרת גזירה
   3. הוכחה בעזרת האיזומורפיזם $aI+bJ \Leftrightarrow a+bi$
3. מסקנה - פרופיל הפתרון במקרה $Re\lambda \gtrless 0$
4. מה אם $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ אך אין 2 ו"ע?
   א. משפט קיילי המילטון
   ב. $\underbrace{(A-\lambda I)}_{M}{}^2=0$ $M^2=0$ אבל $M\neq 0$
   ג. מוצאים $v_2$ כך ש- $0\neq v_1=Mv_2$. במובן ש- $Mv_1=0$
   ד. טענה: $v_1, v_2$ בת"ל.
   ה. טענה $M=C\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}C^{-1}$ כאשר $C=(v_1|v_2)$
   ו. טענה $A=C\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}C^{-1}$
   ז. $\exp t\begin{pmatrix}\lambda&1\\0&\lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&0\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&t\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}e^{\lambda t}&te^{\lambda t}\\0&e^{\lambda t}\end{pmatrix}$
   ח. פרופיל הפתרון:

$\lambda=0$ $\lambda>0$ $\lambda<0$

$\begin{pmatrix}ae^{\lambda t}+bte^{\lambda t}\\ be^{\lambda t}\end{pmatrix}$

ט. עקוב אחרי הכל עם הדוגמא $A=\begin{pmatrix}1&1\\-1&3\end{pmatrix}$

~~הבדל על דרך אחרת להגיע לפתרון במקרה ההומוגני:~~

5. משוואות לא הומוגניות: הערה: מספיק למצוא פתרון אחד $u=C^{-1}v$
   א. שיטה 1: $v'=Av+g(t)$: נכפיל ב- ... - - - -

דוגמא:

$$v'=\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}v+\begin{pmatrix}t^{-1}\\2t^{-1}+4\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0\\0&-5\end{pmatrix} \quad C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix} \quad C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$u'=\begin{pmatrix}0&0\\0&-5\end{pmatrix}u+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5t^{-1}+8\\4\end{pmatrix}$$

ד. גישה 2: $V' = A(t)V + g(t)$

נניח מצאנו ~~..~~מטריצה יסודית"

$$\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$$

נציב משוואה ל- $V = \Psi \cdot u$ נקבל

$$\Psi u' = g(t)$$

$$u'(t) = \Psi^{-1}(t) g(t)$$

$$u(t) = \int_0^t \Psi^{-1}(s) g(s) ds$$

הערה עמודות $\Psi$ הן פתרונות המערכת ההומוגנית

הנחות: 1. נחוש המקרה של משוואות מעלה גבוהה/ הומוגנית אולי.
2. אופרטורים דיפרנציאלים
3. אלימינציה
4. הוורונסקיאן: 1. מתאפס זהותית או בכלל לא
2. מקיים משוואה לינארית בעצמו.

דף 6 שיעור: 5.
9. מערכות לא הומוגניות + הנחות ללא אלימינציה. 12. נקודות סינגולריות
10. 13. אנליזה איכותית.
11. פתרון בעזרת טורי חזקות 14.

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 28 לדצמבר 1995

1. $V' = AV + g(t)$

א. ישנים בנקודות הסבת ומצב אינו כח

ב. מספיק למצוא פתרון אחד (כל משוואה לינארית אחרת)

$C^{-1}V' = DC^{-1}V + C^{-1}g(t)$

$U = C^{-1}V$

$U' = DU + C^{-1}g(t)$

מציבים ומס

$V = CU$

$$V' = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} V + \begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1}+4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} U + \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5/t + 8 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$U_1' = 1/t + 8/5 \quad U_1 = \log t + \frac{8}{5}t + c_1$$

$$U_2' = -5U + \frac{4}{5} \quad U_2 = +\frac{4}{25} + c_2 e^{-5t}$$

$$V = CU = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \log t + \frac{8}{5}t + c_1 \\ +4/25 + c_2 e^{-5t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \log t + \dots$$

2. $V' = A(t)V + g(t)$ : מטריצה יסודית: מטריצה $\Psi(t)$ שעמודותיה הן פתרונות בת"ל של המשוואה ההומוגנית.

טענה נוספת: $\Psi'(t) = A(t)\Psi(t)$, אזי $\Psi(t)$ רגולרית לכל $t$ או סינגולרית לכל $t$.

הוכחה א. שיקולי קיום ויחידות

הוכחה ב. Wronskian

טענה. קיימת מטריצה יסודית. (במקרה האוטונומי אפשר לקחת $\Psi(t) = e^{At}$)

לפתרון $V' = A(t)V + g(t)$ – מחליפים משתנים ל- $V = \Psi \cdot U$ ומקבלים

$$U(t) = \int^t \Psi^{-1}(s) g(s)\, ds.$$

3. ע"ב. הניחו: פתרו: א. $y'' + 5y' + 6y = 0$ $\quad y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-3x}$

ב. $y'' + 4y' + 4y = 0$ $\quad c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$

ג. $y'' + y' + y = 0$ $\quad r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i \Rightarrow y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$

ד. $y'' - 3y' - 4y = 2\sin x$ $\quad y = \frac{1}{17}(3\cos x - 5\sin x)$

$y=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$ $\qquad$ $y''-3y'-4y=4x^2$ ה)

y#

$y''\cancel{-}4y=xe^x+xe^{2x}$ ו)

לא רגיל. $\Leftarrow$ $y''+4y=xe^x$

$y=(Ax^2+Bx)e^{2x}$ $\qquad$ $\Leftarrow$ $y''+4y=xe^{2x}$

4. אופרטורים דיפרנציאליים: $D=\frac{d}{dx}$

$y''-5y+6y=0$

$y''-5y'+6y=1$ ג/

---

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 4 לינואר 1996

1. לחקור הוורונסקיאן של $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ולהדגים בדוגמה של $y''+y=0$

2. פתרון בעזרת טורי-חזקות. עקרונית, צורה שלה כללית $y''=F(x,y,y')$ בפועל, רק מספר סוגים מאוד מסויימים נוחים לפתרון בשיטה זו.

3. המשוואה הכללית:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)y'+R(x)y$$

כאשר $P,Q,R$ פולינומים

דוגמאות:

$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ משוואת בסל, (מופיעה בבעיות עם סימטריה גלילית)

$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ לג'נדר, סימטריה ספרית.

$y''-2xy'+\lambda y=0$ הרמיט, מקבלים הסבר של מתנד הרמוני קוונטי, אופן המימון.

נקודה רגולרית $x_0$: ניתן לחלק ב-$P(x)$ בסביבת $x_0$ $\overset{כלומר}{\iff} P(x_0)\neq 0$

<u>דוגמאות</u> 1. $y''+y=0$ ליד $x_0=0$, מציבים $y=\sum a_n x^n$

2. משוואת Airy. $y''=xy$ ליד $x=0$

נקבל: $(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1}$, $a_2=0$.

$$y=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 7\cdots x^{3n}}{(3n)!}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots x^{3n+1}}{(3n+1)!}\right)$$

3. משוואת הרמיט $y''-2xy'+\lambda y=0$ סביב $x=0$. אם $\lambda=2n$ אז פתרון פולינומיאלי

<u>הגדרה</u> פונקציה היא אנליטית בנקודה אם טור טיילור שלה מתכנס אליה בסביבת הנקודה.

<u>משפט</u> (ללא הוכחה) אם $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$ אנליטיות בעיגול ברדיוס $r$, אזי טור ההתכנסות המינימלי מתכנס לפתרון בתוך העיגול.

הגדרת רדיוס התכנסות בנקודה $x_0$

<u>משפט</u> $\sum a_n(x-x_0)^n$ רדיוס התכנסות $R$ כאשר $R=\frac{1}{\lim |a_n|^{1/n}}$ (אם קיים)

<u>דוגמה</u> $\frac{1}{1-x^2}$ ליד $x=0$

$\frac{1}{2-2x+x^2}$ ליד $x=1$ או $x_0=0$

<u>משפט</u> לכל הפונקציות האלמנטריות הרגילות ידועות במספרים המרוכבים.
רדיוס ההתכנסות סביב $x_0$ של פונקציה אלמנטרית $f$ שווה
למרחק המינימלי בין $x_0$ לנקודה מרוכבת שבה
$f$ לא מוגדרת.

<u>דוגמה</u> פונקציות לינדר מתכנסות לפחות ברדיוס 1.

<u>דוגמה חשובה</u>: נמצא את קצב הגידול של מספרי פיבונצ'י.

generalized Bessel:

$$x^2y'' + (1-2s)xy' + [(s^2 - r^2\alpha^2) + a^2r^2x^{2r}]y = 0$$

Solutions: $y_1 = x^s J_\alpha(ax^r)$

$$y_2 = x^s J_{-\alpha}(ax^r)$$

$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$Y_\alpha(x) = \frac{\cos(\alpha\pi) J_\alpha(x) - J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

In our case $x^2y'' + 5xy' + (3 - x^2)y = 0$

| | |
|---|---|
| $r=1$ | $r=1$ |
| $1-2s=5$ | $s=-2$ |
| $a^2=-1$ | $a=\pm i$ |
| $s^2-r^2\alpha^2=3$ | $\alpha=\pm 1$ |

$$y_1 = x^{-2} J_1(ix)$$

$$y_2 = x^{-2} Y_1(ix)$$

MAE305 - Corrected Solution for quiz #3:

(3) Find linearily independent solutions around $x=0$ for

$$L(y) = x^2y'' + 5xy' + (3-x^2)y = 0 \qquad (1)$$

The problem is somewhat harder than what I said in the precept. The correct solution is:
Solution: Indicial equation: $F(r) = r(r-1) + 5r + 3 = (r+1)(r+3) = 0$
$\Rightarrow r_{1,2} = -1, -3$ differ by an integer $\Rightarrow$ log solutions.
Guess a solution of the form

$$y = x^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+r} \qquad (2)$$

and then:

$$x^2y'' = \sum a_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r} \qquad (3)$$

$$5xy' = \sum 5a_n(n+r)\, x^{n+r} \qquad (5)$$

$$(3-x^2)y = \sum (3a_n - a_{n-2})\, x^{n+r} \qquad (6)$$

Adding those up and demanding that the coeficient of $x^{n+r}$ will be zero gives the equations

$$(r+1)(r+3)a_0 = 0 \qquad n=0 \qquad (7)$$

$$(r+2)(r+4)a_1 = 0 \qquad n=1 \qquad (8)$$

$$(r+n+1)(r+n+3)a_n - a_{n-2} = 0 \qquad n \geq 2 \qquad (9)$$

The last equation can be written as

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{(r+n+1)(r+n+3)} \qquad (10)$$

and then a first solution is obtained by setting $r=-1$, $a_0 = 1, a_1 = 0$ and calculating $a_2, a_3, a_4$ to get

$$y_1 = x^{-1}\left(1 + \frac{1}{2\cdot 4}x^2 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6}x^4 + \frac{1}{2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6\cdot 8}x^6 + \ldots\right) \qquad (11)$$

One cannot set $a_0=0, a_1=1$ to get a second solution - equation (8) forces $a_1=0$. Also one cannot set $r=-3$ - doing so will yield division by zero when calculating $a_2$.

And so the way to proceed is:
Leave $r$ as a variable for a while. set

$$a_0 = r - r_2 = r+3 \qquad (12)$$

set $a_1 = 0$, and using (10) determine $a_n, n \geq 2$. call the function that is thus obtained $\phi_r$:

$$\phi_r = x^r \sum a_n x^n = x^r\left((r+3) + \frac{(r+3)}{(r+3)(r+5)}x^2 + \frac{(r+3)x^4}{(r+3)(r+5)(r+5)(r+7)} + \dots\right)$$

$$= x^r\left((r+3) + \frac{1}{r+5}x^2 + \frac{x^4}{(r+5)(r+5)(r+7)} + \frac{x^6}{(r+5)(r+5)(r+7)(r+7)(r+9)} + \dots\right) \qquad (13)$$

This $\phi_r$ will satisfy

$$L(\phi_r) = a_0(r+1)(r+3)x^r = (r+1)(r+3)^2 x^r \qquad (14)$$

because the $a_n$ are chosen according to equations (8),(9), and so all the coeficients of $x^{n+r}, n \geq 1$ in $L(\phi_r)$ vanish, and the coeficient of $x^r$ is given by (7).
one might be tempted to set $y_2 = \phi_{-3}$ ($y_1 = \frac{1}{2}\phi_{-1}$ was determined above). This will give a solution - $y_2$ will satisfy $L(y_2) = 0$, but unluckily you can check and see that this $y_2$ will satisfy $y_2 = \frac{1}{2}y_1$, and we got nothing new. To get a solution independent of $y_1$ take the derivative of (14) with respect to $r$, and substitute $r = -3$:

$$L\left(\frac{\partial}{\partial r}\phi_r\Big|_{r=-3}\right) = \frac{\partial}{\partial r}L(\phi_r)\Big|_{r=-3} = \qquad (15)$$

$$= \left[(r+3)^2 x^r + 2(r+3)(r+1)x^r + (r+1)(r+3)^2 \ln x \cdot x^r\right]_{r=-3} = 0$$

So by (15) we can set $y_2 = \frac{\partial}{\partial r}\phi_r\big|_{r=-3}$ and so

$$y_2 = \left[\ln x \cdot x^r \cdot \left(r+3+\frac{1}{r+5}x^2 + \dots\right) + x^r\left(1 + \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r+5}\right)x^2 + \dots\right)\right]_{r=-3} =$$

$$= \ln x \cdot x^{-3}\left(0 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 4}x^4 + \dots\right) + x^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\ln x \cdot y_1 + x^{-3}\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \dots\right)$$

I apologize for misleading you in the precepts. Dror

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 11 לינואר 1996

תזכורת: $\sum a_n(x-x_0)^n$ – טור חזקות. רדיוס ההתכנסות – $\frac{1}{R}=\overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של פונקציה ~~[illegible]~~ – אנליטית – המרחק עד הנקודה הסינגולרית הראשונה שלה.

דוגמא: $\sum F_n x^n=\frac{1}{1-x-x^2}$ $\Leftarrow$ $|F_n|\sim\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

משפט: רדיוס ההתכנסות של הפתרון של $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)=0$ – טור חזקות הוא לפחות כקטן מבין הרדיוסים של $\frac{Q}{P}$ ו-$\frac{R}{P}$.

מה אם $\underset{0}{?}0$

נקודה סינגולרית רגולרית: $\lim_{x\to x_0}\frac{Q(x)}{P(x)}(x-x_0)$ קיים וסופי

$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{P(x)}(x-x_0)^2$ קיים וסופי.

דוגמא: $x^2(\sum c_n x^n)y''+\alpha x(\sum a_n x^n)y'+\beta(\sum b_n x^n)y=0$ כאשר $a_0=b_0=c_0=1$

דוגמא: משוואת לג'נדר $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ בנקודות $x=\pm1$

משוואת אוילר: $Ly=x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ – מנסים $y=x^r$ ומקבלים

$$Ly=x^rF(r)\qquad F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta$$

דוגמא: $2x^2y''+3xy'-y=0$ $\Leftarrow$ $r_{1,2}=\frac12,-1$

דוגמא: במקרה המרוכב $((\alpha-1)^2-4\beta<0)$, $r_{1,2}=\lambda\pm i\mu$

$$x^\lambda\cos(\mu\ln x)\qquad x^\lambda\sin(\mu\ln x)$$

דוגמא: $(\alpha-1)^2-4\beta=0$ $\Leftarrow$ $F(r)=(r-r_1)^2$ $\Leftarrow$ $F'(r_1)=0$ $\Leftarrow$ צריך לגזור $Ly=x^rF(r)$ לפי $r$

דוגמא: $x^2y''+5xy'+4y=0$, $x>0$

פתרון בעזרת טורי חזקות $Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$x^2y'' + x(p(x))y' + q(x)y = 0$ , $p(x)=\sum p_n x^n$ , $q(x)=\sum q_n x^n$

מציבים $y=x^r\sum a_n x^n$ עם $a_0\neq 0$ ; משווים את המקדמים...

ומקבלים

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1}a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right)x^{r+n}$$

$a_0\neq 0 \Rightarrow F(r)=0 \Rightarrow r=r_{1,2}$ וכו' $a_n = \frac{-\sum}{F(r+n)}$

בעיה אם $r_2=r_1+n$ עבור $n\geq 0$ כלשהו (אם $r_1=r_2$ אז ההפרש 0)

<u>משפט</u> אם $r_1-r_2$ לא שלם, השיטה מצליחה ורדיוס ההתכנסות לפחות כרדיוס הקטן מבין הרדיוסים של $\sum p_n x^n$ , $\sum q_n x^n$.

<u>דוגמה</u> $2x(1+x)y''+(3+x)y'-xy=0$ $x=0$: $r_{1,2}=0,-\frac{1}{2}$ , רדיוס התכנסות לפחות 1,
אבל רק אחד הפתרונות כולו תקין ב-0.
$x=-1$ $r_{1,2}=0,2 \Rightarrow$ פתרון אחד ($\sum(x+1)^n\sum$ ...)
לא תמיד יש פתרון כזה.

<u>טכניקה כאשר $r_1=r_2$</u>: מתעלמים מהתנאי $F(r)=0$ ומקבלים $a_n(r)$

$$a_n(r) = -\frac{\sum a_k[(r+k)p_{n-k}+q_{n-k}]}{F(r+n)}$$

ואז

$$Ly_r = a_0x^rF(r)$$

$y_2 = y_1(x)\log x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n$ $\qquad \frac{\partial y_r}{\partial r}$ גם פתרון!

<u>דוגמה</u> משוואת בסל $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$
$\nu=0$ (סדר 0) $r_{1,2}=0,0$

$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}$ $\qquad$ פתרון

$J_0(x)$: $y_1(x) = a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$

"פונקציית בסל מסוג ראשון מסדר 0"

~~טכניקה כאשר $r_1-r_2=N>0$~~:

$a_{2m}' = -2\left[\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m-1)}+\dots+\frac{1}{2}\right]a_{2m}(0)$

set $H_m = 1+\dots+\frac{1}{m}$ $\quad a_{2m}'(0) = -H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}$

$$y_2 = J_0(x)\log x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

$Y_0 = \frac{2}{\pi}(y_2 + (\gamma - \ln 2)J_0)$ $\quad \gamma = \lim H_n - \log n = 0.5772$

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 18 לינואר 1996

אולם הערכה – 10 דקות.

$p(x)=\sum p_n x^n$

<u>תזכורות</u> מנסים לפתור $Ly=x^2y''+xp(x)y'+q(x)y=0$ , $q(x)=\sum q_n x^n$

ע"י $y(x)=\sum a_n x^n$ .

מקבלים

$$Ly=x^r\Big(\underbrace{\quad}_{a_0F(r)}x^0+\sum_{n=1}^{\infty}\underbrace{\quad\quad}\,x^n\Big)$$

$$0=F(r)=r(r-1)+p_0r+q_0 \qquad a_n=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k\left((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right)}{F(r+n)}$$

שורשים $r_{1,2}$ ; $r_1>r_2$

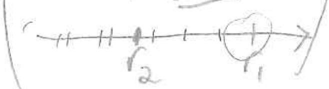
<u>מסקנה</u> אין בעיה למצוא $y_1$ המתאים לשורש $r_1$ .

על $r_2$ יש בעיה אם $r_1=r_2$ (כי בצורה מוצאים רק פתרון אחד)

או $r_1-r_2=N$ (כי אז יש בעיות במכנה)

<u>לטיפול כאשר $r_1=r_2$</u>: מתעלמים מהתנאי $F(r)=0$ ומקבלים

(פונקציות מוגדרות חוץ מ- ... ל-)




$$a_n(r)=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(r)\left((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right)}{F(r+n)}$$

אז

$$Ly_r=a_0x^rF(r)$$

$\Leftarrow$ $\frac{\partial y_r}{\partial r}$ גם פתרון $y_2=y_1(x)\log x+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n$

בסימון קל יותר לנו: $y_2=y_1(x)\log x+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$

<u>דוגמא</u>

משוואת בסל מסדר 0 ($\nu=0$) $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

$r_{1,2}=0$ , $a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}$ $\Leftarrow$ $a_{\text{זוגי}}=0$ , $a_{2m}(r)=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2\cdots(4+r)^2(2+r)^2}$

פונקצית בסל מסוג ראשון מסדר 0

$\Leftarrow$ $a_0J_0(x)=y_1(x)=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$

$$a_{2m}'(0)=-2\left[\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m-1)}+\cdots+\frac{1}{2\cdot 1}\right]a_{2m}(0)=-H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2} \qquad H_m=\left(1+\dots+\frac{1}{m}\right)$$

$\Rightarrow y_2=J_0\log(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$ ; $Y_0=\frac{2}{\pi}\left(y_2+(\gamma-\log 2)J_0\right)$ $\gamma=\lim H_m-\log m=0.5772$

"פונקצית בסל מסוג שני מסדר 0"

קבוע אוילר

בעיה כאשר $r_1-r_2=N>0$:

$$y_1=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)$$

$$y_2=a\,y_1\log x+|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right)$$

$$c_n=\frac{d}{dr}\left[(r-r_2)a_n(r)\right]\Big|_{r=r_2}$$

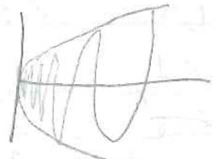
## ללו סכום

אולי זה זכורית: משוואת בסל ודומה. $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

מצפה שכאשר $x\to\infty$, הפתרונות יתנהגו כמו $\sin x$ ו $\cos x$.

בערך נכון.

דוגמא: כיצד מתנהגת $y''+\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2(1-x^2)}\right)y=0$ ליד $x=0$?



תשובה: $r_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}i$

דוגמא: כיצד מתנהגת משוואת לג'נדר $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ ליד $x=\infty$?

תשובה: $t=\frac{1}{x}$

$$\frac{dy}{dx}=\dots=-t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\dots=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\Leftarrow\quad t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+\alpha(\alpha+1)y=0$$

$$\Leftarrow\quad r(r-1)-\alpha(\alpha+1)=0\quad\Leftarrow\quad r_{1,2}=\alpha+1,\,-\alpha$$

$\Leftarrow$ אם $-1<\alpha<0$ $\Leftarrow$ הפתרונות מתאפסים ב-$\infty$.

אם $\alpha>0$ או $\alpha<-1$ $\Leftarrow$ יש פתרון לא חסום.

אם $\alpha=0$ או $\alpha=-1$ $\Leftarrow$ צריך לחשב ידנית. הפעם יהיה את הלוגריתם.

דוגמא: $y''+ay'+by=0$ ליד $x=\infty$ $\Leftarrow$ בעיה.

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 25 לינואר 1986

סדר הדברים: 1. דוגמאות קלות זו מול ערך מעבר; זכרות.
2. משפט יפה על מחלקה חלקית; דוגמאות.
3. טכניקות למעבר למחלקה החלקית; דוגמאות.

<u>דוגמא</u> כיצד מתנהגת $y''+\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2(1-x^4)}\right)y=0$ ליד $x=0$?

תשובה $r_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}$

<u>דוגמא</u> כיצד מתנהגת משוואת לג'נדר $(1-x^2)y''-2xy'-\alpha(\alpha+1)y=0$ ליד $x=\infty$?

תשובה $t=\frac{1}{x}$ $\quad \frac{d^2y}{dx^2}=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$ $\quad \frac{dy}{dx}=-t^2\frac{dy}{dt}$

$\Leftarrow$ $t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+\alpha(\alpha+1)y=0$

$\Leftarrow$ $r(r-1)-\alpha(\alpha+1)=0 \Leftarrow r_{1,2}=-\alpha,\ \alpha+1$

$\Leftarrow$ אם $\alpha>0$ או $\alpha<-1$ $\Leftarrow$ קיים פתרון לא חסום ליד $\infty$

אם $-1<\alpha<0$ $\Leftarrow$ פתרונות חסומים ליד $\infty$

זאת דרך למצוא וכו'.

<u>דוגמא</u> $y''+ay'+by=0$ ליד $x=\infty$ $\Leftarrow$ זכרות. משוואות פשוט - זוכרים עברית.
(ברור גם מזה)

---

$y''+q(x)y=0$ → כזכור, נעבור בתנועות א-לוגיות. אפשר להביא לצורה אם $q(x)>0$ ...

<u>משפט</u> אם $q(x)\geq 0$ לכל $x\geq A$ וכן $\int_A^\infty q(x)\,dx=\infty$, אז לכל פתרון $y$ של $y''+q\cdot y=0$ יש אינסוף אפסים עבור $x\geq A$.

<u>הוכחה</u> $y(x)\geq 0$ לכל $x\geq B$ $\Leftarrow$ $y'(x)\geq 0$ לכל $x\geq B$ $\Leftarrow$ $V(x)=-\frac{y'}{y}$
אז $\Leftarrow$ $V'=q+V^2$ $\Leftarrow$ ...

<u>משפט לא הוכחנו</u> אם $q>0$ ו- $\int_A^\infty xq(x)\,dx<\infty$ אז $\lim\frac{y(x)}{x}=\lim y'(x)=K$
כאשר $K$ קבוע שונה מ-0, ובכלל אין תנודות.

<u>דוגמאות</u> 1. $y''+xy=0$ ; ועוד $y'+\frac{1}{x}y$

2. $y''+\frac{1}{x^3}y$

3. $y''+\frac{\gamma}{x^2}y \Leftarrow$ $\gamma<\frac{1}{4}$ לא
$\gamma>\frac{1}{4}$ כן.

<u>החלפת המשתנה התלוי:</u> $y''+p(x)y'+q(x)y=0$

לוקחים $v(x)=y(x)/\mu(x)$

$\Leftarrow \mu'+\frac{p}{2}\mu=0 \Rightarrow Q=q-\frac{1}{4}p^2-\frac{1}{2}p'$

$\Leftarrow \mu=e^{-\frac{1}{2}\int p}$

<u>דוגמה</u> משוואת בסל מסדר 0: $y''+\frac{1}{x}y'+y=0$

$v(x)=y\sqrt{x} \Rightarrow v''+\left(1+\frac{1}{4x^2}\right)v=0$

$\Leftarrow$ תנודות.

<u>החלפת המשתנה הב"ת</u> חוק: $x \Rightarrow z=\phi(x)$

$(\phi')^2\frac{d^2y}{dz^2}+(\phi''+p\phi')\frac{dy}{dz}+qy=0$

$\Leftarrow \phi(x)=\int e^{-\int^x p(x)dx}dx \Rightarrow Q=\frac{q(x(z))}{[\phi'(x(z))]^2}$

<u>הערה</u> משנה את מקום הנקודה! אם $x\to0$ אז $z\to\infty$
הולכת לאינסוף, הכל נכון!

<u>דוגמה</u> $y''+\frac{1}{x}y'+\frac{1}{x^3}y=0$ אז $\Rightarrow v''+\left(\frac{1}{x^3}+\frac{1}{4x^2}\right)v=0$

לא מקיים מיזוג. $y=v\frac{1}{\sqrt{x}}$

הב"ת $\Rightarrow x=e^z$ ; $z=\log x \Rightarrow$

$y_{zz}+e^{-z}y=0$

$\Rightarrow y\sim kz \Rightarrow y\sim k\log x$

תרגול - יום חמישי ק 5.

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 1 לפברואר 1996

משפט: $y''+Q(x)y=0$ ו-$Q>0$ #

$\int Q=\infty$ ⇐ תנודתית

$\int xQ\,dx<\infty$ ⇐ אין תנודות.

לא תמיד נכון.

<u>משוואת בסל</u> $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$

$$y''+\frac{1}{x}y'+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

<u>החלפת המשתנה התלוי</u> $y''+py'+qy=0$ , $y=\mu v \Rightarrow \mu'+\frac{p}{2}\mu=0$

⇐ $\mu=e^{-\frac12\int p}$ , $Q=q-\frac14p^2-\frac12p'$

<u>בסל:</u> $\mu=\frac{1}{\sqrt{x}}$ ⇐ $Q=1-\frac{\nu^2}{x^2}-\frac{1}{4x^2}+\frac{1}{2x^2}=1+\frac{1-4\nu^2}{4x^2}$ ⇐ יש תנודות. ($v''+Qv=0$)

מטרתנו: להבין את קצב שינוי התנודות של $y$ ושל $v$.

<u>משפט ההשוואה של Sturm:</u> $u_1''+Q_1u_1=0$ ; $u_2''+Q_2u_2=0$ , $Q_1>Q_2$ (רציפות בקטע)

⇐ $u_1$ מתנודדת יותר מהר, כלומר: בין כל שני אפסים של $u_2$ יש לפחות אפס אחד של $u_1$ (בקטע)

מסקנות א. החל ממקום מסוים המרחק בין כל שני אפסים עוקבים של $v$ או $y$ (בסל) קטן מ-$1.01\pi$ (משווים עם $0=u_2''+\frac{1}{\sqrt{1.01}}u_2$)

ב. החל ממקום מסוים המרחק בין כל שני אפסים עוקבים של $v$ או $y$ גדול מ-$0.99\pi$ (משווים עם $0=u_1''+\frac{1}{\sqrt{0.99}}u_1$)

ג. אם $\nu<\frac12$ קצב התנודות יורד. (מרחק בין אפסים עולה)

אם $\nu>\frac12$ קצב התנודות עולה. (מרחק בין אפסים יורד) ל-$\pi$.

ד. $y''+\frac{x+1}{3x^3}y'=0$ תנודתית.

<u>הוכחת המשפט:</u> נניח $u_2(a)=u_2(b)=0$ , $u_2>0$ בפנים $[a,b]$ ואין אף $u_1$

נגדיר את $W=u_1u_2'-u_1'u_2$

<u>משפט</u>: נניח $y$ מקיימת $y''+py'+qy=0$ אם $q>0$ בקטע סגור, וכי $y'(a)=y'(b)=0$ עבור $a<b$ בקטע, ונגדיר $\tilde{p}=\int p\,dx$; וכי אם $q'+2pq>0$:

$$|y(a)|>|y(b)|$$ (אמפליטודה יורדת)

$$e^{\tilde{p}(a)}\sqrt{q(a)}\,|y(a)|<e^{\tilde{p}(b)}\sqrt{q(b)}\,|y(b)|$$ (הפוך מרווח)

ואם $q'+2pq<0$, שני אי-השוויונות מתהפכים.

<u>מסקנה</u>: אם $y''+Q(y)y=0$ ו- $Q(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}L>0$ מונוטונית, אז $y$ תנודתית ואמפליטודת התנודות שואפת לקבוע שאינו 0.

<u>מסקנה</u>: בסל $V$ - תנודתית, תנודות שואפות לאורך קבוע. $y$ תנודות דועכות $\sim\frac{1}{\sqrt{x}}$

<u>הוכחת המשפט</u>: עבור החלק הראשון נגדיר את $F=y^2+\frac{1}{q}(y')^2$; מקבלים

$$F'=-(q'+2pq)\left(\frac{(y')^2}{q^2}\right)$$

$$G=e^{2\tilde{p}}\left(qy^2+(y')^2\right)$$ לשני, נגדיר את

$$G'=e^{2\tilde{p}}\left(\qquad\right)$$ ומקבלים

<u>עוד דוגמה</u>: $y''+\frac{1}{x}y=0$ ⇐ גודל התנודות גדל

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים - סתיו 1995 - מבחן לדוגמא.

מחשבון ודף נוסחאות מותרים בשימוש, אולם אין להעביר שום דבר לשכן:

ענה/י על 6 השאלות הבאות:

1. פתור/פתרי   א. $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{x^2y+y^3}$ (רמז: יהי $u=x^2$)

(פתרון כללי)

ב. $y'=e^{x+y}$

2. הראה/י שמשפט היחידות לפתרון משוואות דיפרנציאליות אינו נכון אם לא מניחים את תנאי-ליפשיץ, אותו יש לנסח במדויק.

3. שיטת אוילר המשופרת נתונה ע"י $x_{n+1}=x_n+h$

$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y'_n+f(x_n+h,\, y_n+hy'_n)\right)$.

חשב/י את גודל השגיאה המקומית בשיטה זו.

4. א. הוכח/י שאם הוורונסקיאן של המערכת $V'=AV$ מתאפס בנקודה כלשהי, אזי הוא מתאפס זהותית.

ב. תוך שימוש במטריצה היסודית, מצא פתרון פרטי כלשהו של המערכת

$$V'=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 3 & -2\end{pmatrix}V+\begin{pmatrix}e^t\\ t\end{pmatrix}$$

5. מצא/י את פתרונות בצורת טורי חזקות למשוואת בסל מסדר $\frac{1}{3}$:

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{9}\right)y=0$$

6. חקור/חקרי במידת יכולתך את ההתנהגות האסימפטוטית ליד $\underline{\underline{x=0}}$ של פתרונות המשוואה

$$y''+\frac{3}{x}+\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^4}\right)y=0$$

רמז: אם נציב $x=\frac{1}{t}$, מספיק לחקור ההתנהגות ב-$\infty$, שאותו אנחנו מכירים.

מבחן במשיפ
לפסיקוף

1. שאלות מידע

2. משפטי קשר ויחידות

3. שאלות נמרות

4. משוואות לינאריות עם מקדמים קבועים/כרישום וכו'..

5. טורי הצבות

6. אלגבה אכמית

* 6 שאלות ללא בחירה
* מבחן קשה עם פקטור.
* מחשבי כיס (לא Laptops) מותר!
* דף A4 עם נוסחאות, כתוב משני הצדדים! מותר.
* 2 שאלות תיאורטיות
* חלק מהשאלות מתוך שיעורי הבית.

אני לא מחייך בכלל.

א תרגיל

$$\mu' v + \mu v' + 2x\mu v = 2xe^{-x^2} \qquad y = \mu v$$

$$\cancel{\mu v' + 2x\mu v}$$

$$\boxed{\mu' + 2x\mu = 0}$$

$$\mu = e^{-x^2}$$

$$e^{-x^2} v = 2xe^{-x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1+3(y/x)^2}{2(y/x)} \qquad \frac{y}{x} = v \qquad y = xv$$

$$v + xv' = \frac{1+3v^2}{2v}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{1+3v^2-2v^2}{2v} = \frac{1+v^2}{2v}$$

$$\frac{2v\,dv}{1+v^2} = \frac{dx}{x} \qquad \log(1+v^2) = \log x$$

$$x = (1+v^2)^c$$

$$\begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad S = tr = 12 \qquad \lambda_{1,2} = 6$$

$$det = P = 36$$

ב תרגיל

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{x} \qquad \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{x}$$

$x - 9y$ ~~...~~ : 4

$2x - 5y$

$$\arcsin y = \log cx$$

$$y = \sin\log x$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -9 \\ 2 & -5 \end{pmatrix} \qquad S = -4 \qquad P = 13$$

ציוני בחינה

| | |
|---|---|
| 1 | 97 |
| 2 | 95 |
| 3 | 83 |
| 4 | 84 |
| 5 | 84 |
| 6 | 97 |
| 7 | 93 |
| 8 | 94 |
| 9 | 80 |
| 10 | 75 |
| 11 | 81 |
| 12 | 42 |
| 13 | 82 |
| 14 | 66 |
| 15 | 94 |
| 16 | 75 |
| 17 | 91 |
| 18 | 56 |
| 19 | 96 |
| 20 | 92 |
| 21 | 90 |
| 22 | 89 |
| 23 | 79 |
| 24 | 79 |
| 25 | 79 |
| 26 | 52 |
| 27 | 71 |
| 28 | 95 |
| 29 | 67 |
| 30 | 77 |
| 31 | 77 |
| 32 | 96 |
| 33 | 67 |

| | |
|---|---|
| 95+ | □□□□□□ |
| 90+ | □□□□□□ |
| 85+ | □ |
| 80+ | □□□□□□ |
| 75+ | □□□□ |
| 70+ | □□□□ |
| 65+ | □□ |
| 60+ | □ |
| 55+ | □ |
| 50+ | □ |
| 45+ | |
| 40+ | □ |

שאלה ב:

משפט פיקרד: $x_0, y_0, a, b$

תהא $f:[x_0-a,x_0+a]\times[y_0-b,y_0+b]\to\mathbb{R}$

רציפה

וליפשיץ ב- $y$

קיים יחיד פתרון $\phi$ ~~$\phi(x_0)=y_0$ $\phi'=f(x,\phi)$~~

בתחום $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, ~~$\delta=\min(a,\frac{b}{M})$~~

$\delta=\min(a,\frac{b}{M})$ (-2)

7 (-3) ללא תשובה המלאה

הוכחת יחידות: א. 2

$$|\phi-\psi|\le\int|f(t,\phi)-f(t,\psi)|dt \overset{\text{ליפ}}{\le}$$

$$\le L\int|\phi-\psi|$$

2

ב. $U=\int|\phi-\psi|dt$.

מתקיים $U\ge0$

~~$(e^{-Lx}U)'\le0$~~

$(e^{-Lx}U)'\le0$ 2

ולכן $U\le0$. $\Leftarrow$ $U\equiv0$

2

9

$\le$ במקום $<$ (-1)

שאלה 3

6. א.

$y' = xy$

$x_0 = 0 \qquad y_0 = -1$

$x_1 = 1/3 \qquad y_1 = -1 + \frac{1}{3} \cdot 0 = -1$

$x_2 = 2/3 \qquad y_2 = -1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} \cdot (-1)\right) = -\frac{10}{9} = -1.1111$

$x_3 = 1 \qquad y_3 = -10/9 + \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\left(-\frac{10}{9}\right)\right) =$

$= -\frac{90}{81} - \frac{20}{81} = -\frac{110}{81} = -1.358$

$= -1\frac{29}{81}$

7. ב.

קירוב $y_{n+1} = y_n + h y'_n$

מדויק $y_{n+1} = \phi(x_{n+1}) = \phi(x_n) + h\phi' + o(h^2) = \dots$

$\overline{\qquad\qquad\qquad}$

$o(h^2)$

4. ד. $0.0003$

שאלה 6: א. $y_1''+q_1y_1=0$ ; $y_2''+q_2y_2=0$, $q_1>q_2>0$ ⇐

4 בין כל שני אפסים של $y_2$ יש לפחות אפס אחד של $y_1$.

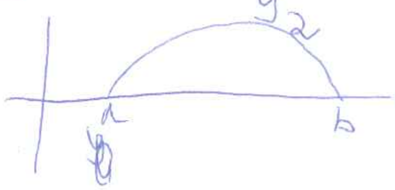
(-1) [illegible]

8 הוכחה

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = y_1y_2'-y_2y_1'$$ 2

$y_2(b)=y_2(a)=0$

$y_2'(a)>0$, $y_2'(b)<0$




2

בשלילה נניח ש־ $y_1$ חיובי בתחום ~~$W(a)$~~ ⇒

$W(a)>0$ ; ~~$W(b)\neq 0$~~

$W(b)<0$ ⇐ 1

(מספיק לצייר)

אבל

$$W' = y_1y_2''-y_2y_1'' = -q_2y_1y_2+q_1y_1y_2$$

$$=(q_1-q_2)y_1y_2>0$$ 2

ולכן $W$ עולה. סתירה. 1

4 ב. השוואה של $y''+(1-\epsilon)y=0$ ועם $y''+(1+\epsilon)y=0$

(-1) [illegible] בכיוונים?

(-2) חסר רק כיוון אחד.

| | |
|---|---|
| 1 | 18 |
| 2 | 16 |
| 3 | 17 |
| 4 | 16 |
| 5 | 17 |
| 6 | 16 |

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

# משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים (80311)

מועד א' תשנ"ו

המורה: דרור בר-נתן      הזמן: שעתיים

חומר מותר: 1. מחשבון
2. דף נוסחאות בגודל של עמוד פוליו

**יש לפתור את 6 השאלות הבאות.**

1. (18 נקודות) פתור/פתרי פתרון כללי את המשוואות הבאות:

א. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$    ב. $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+3y^2}{2xy}$

2. (16נקודות) נסח/י את משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואה דיפרנציאלית בודדת מסדר ראשון והוכח/י את חלק היחידות של המשפט.

3. (17נקודות) תזכורת - שיטת אוילר נתונה ע"י הנוסחאות:

$$x_{n+1} = x_n + h$$
$$y_{n+1} = y_n + hy'_n$$

א. השתמש/י בשיטת אוילר עם $h = \frac{1}{3}$ לניחוש $y(1)$ אם ידוע ש- $y' = xy$ ו- $y(0) = -1$.

ב. הערך/י (עם הצדקה) את גודל השגיעה המקומית בשיטת אוילר כפונקציה של $h$.

ג. בפתרון בעיה מסוימת בעזרת שיטת אוילר עם $h = 10^{-3}$ השגיעה היתה בערך 0.003 . לאיזה שגיעה בערך ניתן לצפות אם אותה בעיה תפתר בעזרת שיטת אוילר עם $h = 10^{-4}$?

4. (16 נקודות) מצא/י שני פתרונות בלתי תלויים לינארית למערכת:

$$\dot{x} = 8x - y$$
$$\dot{y} = 4x + 4y$$

וצייר את פרופיל הפאזה שלה.

5. (17 נקודות) א. הראה/הראי שהנקודה $x=0$ היא נקודה סינגולרית רגולרית עבור המשוואה: $x^2y'' + x(1+x)y' - 4y = 0$

ב. מצא/י פתרון כלשהוא של מערכת זו בעזרת טורי חזקות. אין צורך למצוא פתרון שני.

6. (16 נקודות) א. נסח/י והוכח/י את משפט ההשוואה של *Sturm*.

ב. הוכח/י שהרווח בין שני אפסים עוקבים של פתרון כלשהוא של המשוואה:

$$y'' + \frac{x+1}{x} y = 0$$

שואף ל- $\pi$ כאשר $x$ שואף ל- $+\infty$.

בהצלחה!

האוניברסיטה העברית בירושלים
החוג למתמטיקה

# <u>בחינה - משוואות דיפרנציאליות (80311)</u>

מועד ב' תשנ"ו
המורה: דרור בר-נתן          הזמן: שעתיים

חומר מותר: 1. מחשבון
2. דף נוסחאות בגודל של עמוד פוליו

**ענה על 6 השאלות הבאות.**

1. (18 נקודות) פתור/פתרי פתרון כללי את המשוואות הבאות:

א. $xy' = \sqrt{1-y^2}$      ב. $\left(\frac{y}{x}+6x\right)dx+(\log x-2)dy=0$ עבור $x>0$

$y\log x+3x^2-2y=c$

2. (17 נקודות) הסבר/י בפרוטרוט מדוע משפט הקיום והיחידות לפתרון מערכות של משוואות דיפרנציאליות מסדר ראשון (נסח/י אותו!) גורר את משפט הקיום והיחידות לפתרון משוואה דיפרנציאלית בודדת מסדר גבוה.

3. (17 נקודות) תזכורת: שיטת אוילר המשופרת נתונה ע"י הנוסחאות: $x_{n+1}=x_n+h$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{2}\left(y_n'+f\left(x_n+h,y_n+hy_n'\right)\right)$$

א. השתמש/י בשיטת אוילר המשופרת עם $h=\frac{1}{2}$ לניחוש $y(1)$ אם ידוע ש- $y'=-xy$ ו- $y(0)=1$.

ב. בפתרון בעיה מסויימת בעזרת שיטת אוילר משופרת עם $h=10^{-3}$ השגיאה היתה בערך 0.003 לאיזה שגיעה בערך אפשר לצפות אם אותה בעיה תפתר בעזרת שיטת אוילר משופרת עם $h=10^{-4}$?

4. (17 נקודות) תאר/י <u>איכותית</u> את התנהגות הפתרונות של המערכת:

(תיקון)

$$\dot{x}=\cancel{13}^{17}+x-9y+\sin(2-2x-y+xy)$$
$$\dot{y}=7+2x-5y+\cos(x-1)$$

בסביבת הנקודה $\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

5. (20 נקודות) יהי $Ly$ מוגדר ע"י: $Ly = x^2y'' + xy' - 16x(1-x^2)y$

א. מצא/י $y$ מהצורה $y = x^r \sum a_n x^n$ המקיים $Ly = a_0 x^r F(r)$.
עבור פונקציה כלשהיא $F(r)$ של $r$. מהי $F(r)$ ?

ב. מצא/י פתרון כלשהוא של המשוואה $Ly = 0$.

ג. מדוע קשה למצוא פתרון שני? הסבר/י בפרוט.

6. (12 נקודות) האם הפתרונות של המשוואה $y'' + \frac{2}{\sqrt{x}}y$ יהיו תנודתיים (אוסצילטוריים) ליד $x = +\infty$ ? במידה ואת/ה משתמש/ת במשפט כלשהוא, נסח/י אותו במפורש, אולם אין צורך להוכיחו.

בהצלחה!