משוואות דיפרנציאליות חלקיות 1

<u>המרצה</u>: פרופ' גולדיה

<u>ספרים</u>:

PDE: 1) F. John (Kennedy)

2) Snuddon

<u>דוגמא</u>: גורם אינטגרציה: תהי נתונה המשוואה

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

נחפש „גורם אינטגרציה" $u(x,y)$ כך ש

$$uMdx+uNdy$$

היא מדויקת, כלומר קיימת $\phi(x,y)$ כך ש

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=uM,\ \frac{\partial\phi}{\partial y}=uN$$

כלומר

<u>דוגמא</u> $x^2u_x+y^2u_y=(x+y)u$ אופיינים:

$dx/ds=x^2$

$dy/ds=y^2$

$du/ds=(x+y)u$

<u>דרך א</u>: $\frac{dx}{x^2}=ds$ ולכן (1 ולכן $-\frac{1}{x}=s+k_1$ ולכן

$x=-\frac{1}{s+k_1}$ וגם מסימטריה *(1... $y=-\frac{1}{s+k_2}$ וגם המשוואה השלישית תהיה

$$\frac{1}{u}\frac{du}{ds}=-\frac{1}{s+k_1}-\frac{1}{s+k_2}$$

נבצע רגל נגישה אינטגרל:

$$\ln u = -\ln (s+k_1) - \ln (s+k_2) + \ln c_2 =$$

$$= \ln \frac{c_2}{(s+k_1)(s+k_2)}$$

ולכן

$$u = \frac{c_2}{(s+k_1)(s+k_2)} = c_2 x y$$

בערך נתון את 1 , 1^* ולקבל

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1$$

ולכן

$$u = f\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right) x y$$

דרך ב

$$\frac{dy}{dx} = y^2/x^2$$

ולכן

$$\frac{dy}{y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y} = -\frac{1}{x} + c_1$$

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = c_1$$

דרך 3 משוואות ד.ו.ר

$$\frac{1}{u}\frac{du}{ds} = \frac{1}{x}\frac{dx}{ds} + \frac{1}{y}\frac{dy}{ds}$$

$$\log u = \log x + \log y + \log c_2$$

$$u = c_2 x y$$

ולכן

$$u = f\left(\frac{1}{x} - 1/y\right) x y$$

הגדרה: המשוואה $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y \overset{*}{=} c(x,y)u+d(x,y)$ תקרא מסדר ראשון לינארית

נגדיר $\vec{\gamma}=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ וקטור התלוי ב- x,y, ואז המשוואה:

$$\vec{\gamma}\cdot\nabla u = c(x,y)u+d(x,y)$$

נתבונן במערכת

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y)$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y) \quad (**)$$

אם פתרון שלה הוא $(x(s),y(s))$ — עקום, נציב ב- (*) לקבל

$$\frac{du}{ds}=\frac{dx}{ds}u_x+\frac{dy}{ds}u_y=c(x,y)u+d(x,y) \quad (***)$$

כלומר, על העקום המוגדר ב- (**) u מקיים את (***)

הגדרה: העקום המוגדר ע"י

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y)$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y)$$

נקרא אופיין

מסקנה: לאורך האופיין u מקיים את המשוואה

$$\frac{du}{ds}=c(x,y)u+d(x,y)$$

כאשר x,y הם פונקציות ידועות של s (משוואת האופיין). המשוואה ב- s ניתנת לפתרון. האופיין תלוי בתנאי ההתחלה של x,y של האופיינים. במשפחה, ממלאים את כל המישור, אז ניתן למצוא את u.

תנאי התחלה: אם u נתון לאורך עקום החותך את כל האופיינים, אז ניתן למצוא את u חד-ערכית.

ראינו את $u(x,t)$ ~~פתרון של~~ $u_t + c u_x = 0$, ותנאי $u(x,0)=f(x)$

כלומר, $u=f(x-ct)$ ~~משתנה~~

סיכום לינארית: נתון $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=c(x,y)u+d(x,y)$ ~~מתקבל~~ מתקבלים ?

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y)$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y)$$

נקבל

$$\psi(x,y)=C_1$$

ואז נקבל

$$\frac{du}{ds}=cu+d$$

נקבל

$$H(u,x,y)=C_2$$

מכוון מתריץ? והפתרון הוא $H(u,x,y)=\psi(x,y)$

<u>הגדרה</u> משוואה קוואזי לינארית:

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \qquad (1*)$$

אזי עקומה אופיינית ~~...~~ דמוקלית (x,y,u) היא עקומה המקיימת

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u)$$

$$(2*) \qquad \frac{dy}{ds}=b(x,y,u)$$

$$\frac{du}{ds}=c(x,y,u)$$

<u>טענה</u> עקומה אופיינית משיקה בכל נקודה למשטח הפתרון $u(x,y)$

<u>הוכחה</u> עקומה אופיינית משיקה לוקטור $\begin{pmatrix}x\\y\\u\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ לפי הגדרת (2*).

נכתוב את (1*) בצורה

$$\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\-1\end{pmatrix}=0$$

$\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\-1\end{pmatrix}$ הוא הנורמל למשטח $u(x,y)$ $\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ מאונך ל $\begin{pmatrix}u_x\\u_y\\-1\end{pmatrix}$,

ולכן $\binom{a}{b}$ על המישור המשיק ל- $u(x,y)$, ולכן הוקטור האופייני משיק למשטח.

<u>הסבר</u>: יהי $F(x,y,u)=c$ משטח. אזי $dF=0$ כלומר

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy + \frac{\partial F}{\partial u}du = 0$$

כלומר

$$\begin{pmatrix} \partial F/\partial x \\ \partial F/\partial y \\ \partial F/\partial u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ du \end{pmatrix} = 0$$

ולכן $\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ du \end{pmatrix}$ מאונך ל $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_u \end{pmatrix}$, כלומר, $\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_u \end{pmatrix}$ הוא הנורמל למשטח.

כאשר $u=f(x,y)$ אז קל לקבל שהוקטור $\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -1 \end{pmatrix}$ הוא הנורמל למשטח.

<u>טענה</u>: יהי $z=u(x,y)$ משטח פתרון של (22). אזי הוא מקיים את (23).

<u>הוכחה</u>: נניח $z=u(x,y)$ פתרון נתון. אז נתבונן ב:

$$\frac{dx}{ds} = a(x,y,u)$$

$$\frac{dy}{ds} = b(x,y,u)$$

זוהי מערכת בשני נעלמים, כי u ידוע. נסמן פתרונה ב-$(x(s),y(s))$ ואז ~~נסמן~~ לאורך עקום זה

$$z = u(x(s),y(s))$$

ואז

$$\frac{dz}{ds} = \frac{du}{ds} = u_x\frac{dx}{ds} + u_y\frac{dy}{ds} = u_x a + u_y b = c$$

ולכן $\frac{du}{ds} = c$, כלומר, מתקיים (23)

$$a(x,y,u)u_x+b(x,y,u)u_y=c(x,y,u) \quad (1ג)$$

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u) \quad .(2ג)$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y,u)$$

$$\frac{du}{ds}=c(x,y,u)$$

משפט: יהיו $\gamma_1=G(x,y,u)$ ו $\gamma_2=H(x,y,u)$ שני פתרונות
גז שלם (2ג), ויהי $\psi:R^2\longrightarrow R$ גזירה כלשהי
המשוואה: אז $\psi(G,H)=0$ הוא משוואת פתרון
ל (1ג)

הוכחה

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0$$

כאן
שנים

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\psi_G(G_x+G_uu_x)+\psi_H(H_x+H_uu_x)=0$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\psi_G(G_y+G_uu_y)+\psi_H(H_y+H_uu_y)=0$$

לא יתכן ש $\psi_G=0$ וגם $\psi_H=0$ כי אחרת ψ היתה קבועה.
ולכן הדטרמיננטה צריך להיות 0: כלומר

$$\begin{vmatrix}G_x+G_uu_x & H_x+H_uu_x\\ G_y+G_uu_y & H_y+H_uu_y\end{vmatrix}=0$$

ולכן

$$\begin{vmatrix}G_x & H_x\\ G_y+G_uu_y & H_y+H_uu_y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}G_uu_x & H_uu_x\\ G_y+G_uu_y & H_y+H_uu_y\end{vmatrix}=0$$

ולכן ע' פעולות אלמנטריות

$$\begin{vmatrix}G_x & H_x\\ G_y & H_y\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}G_x & H_x\\ G_uu_y & H_uu_y\end{vmatrix}+u_x\begin{vmatrix}G_u & H_u\\ G_y & H_y\end{vmatrix}=0$$

וגם

$$\underbrace{\begin{vmatrix} G_x & H_x \\ G_y & H_y \end{vmatrix}}_{\Delta_1} + u_y \underbrace{\begin{vmatrix} G_x & H_x \\ G_u & H_u \end{vmatrix}}_{\Delta_2} + u_x \underbrace{\begin{vmatrix} G_u & H_u \\ G_y & H_y \end{vmatrix}}_{\Delta_3} = 0 \quad \Delta$$

מאידך מכך נקבל

(*)
$$0 = \frac{dH}{ds} = H_x \frac{dx}{ds} + H_y \frac{dy}{ds} + H_u \frac{du}{ds} = H_x a + H_y b + H_u c$$

ובאותו אופן

(**)
$$0 = G_x a + G_y b + G_u c$$

נכפיל את (*) ב-G_y ו-(**) ב-H_y ונחסר:

$$0 = a(H_x G_y - G_x H_y) + (H_u G_y - G_u H_y)c =$$

$$= -\Delta_1 a - \Delta_3 c$$

ולכן

$$\Delta_3 = -\Delta_1 \frac{a}{c} \qquad \#1$$

נכפיל (*) ב-G_x ו-(**) ב-H_x ונחסר: נקבל:

$$0 = (H_y G_x - G_y H_x)b + (H_u G_x - G_u H_x)c =$$
$$= \Delta_1 b + \Delta_2 c$$

ולכן

$$\Delta_2 = -\Delta_1 \frac{b}{c} \qquad \#2$$

ולכן נציב את #1,2 ב-Δ ונקבל

$$\Delta_1 - \Delta_1 \frac{b}{c} u_y - \Delta_1 \frac{a}{c} u_x = 0$$

ולכן

$$\Delta_1 (c - b u_y - a u_x) = 0$$

נניח $\Delta_1 \neq 0$ ונקבל

$$a u_x + b u_y = c$$

משל.

ההנחה לא שמה ~~הנחנו~~ הנחות שלא יכולנו להניח

דוגמא:
$$y^2 u u_x - x^2 u u_y = x^2 y$$

זוהי משוואה כנדרש, $a = y^2 u$, $b = -x^2 u$ ו-$c = x^2 y$

אז:

$$\frac{dx}{ds} = y^2 u$$

$$\frac{dy}{ds} = -x^2 u$$

$$\frac{dy}{ds} = x^2 y$$

נחלק את השניה בראשונה:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x^2}{y^2}$$

ולכן $y^2dy + x^2dx = 0$

כלומר $y^3 + x^3 = \gamma_1$

ובאופן גם נקבל

$$\frac{du}{dy} = -y/u$$

ולכן $u\,du + y\,dy = 0$

כלומר $u^2 + y^2 = \gamma_2$

ולכן לכל ψ פתרון של המשוואה יהיה:

$$\psi(y^3+x^3, u^2+y^2) = 0$$

(לאחר שמציבים את u). נבדק לפי הגדרה כדי לבדוק:

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial x} = \psi_G 3x^2 + \psi_H 2uu_x = 0$$

$$0 = \frac{\partial\psi}{\partial y} = \psi_G 3y^2 + \psi_H(2uu_y + 2y) = 0$$

ולכן

$$3x^2(2uu_y + 2y) - 6y^2uu_x = 0$$

כלומר $y^2uu_x - x^2uu_y = x^2y$ וזה בדיוק המשוואה המקורית.

משפט 8: ונתון $a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y = c(x,y,u)$ (1ב)

ועקום התחלה $x = x_0(t)$, $y = y_0(t)$, $u = u_0(t)$ כאשר

x_0, y_0, u_0 פונקציות גזירות ברציפות ונתון ש:

① ל-a,b,c יש נגזרות רציפות ביחס ל-x,y,u

② $\frac{dy_0}{dt}a(x_0,y_0,u_0)-\frac{dx_0}{dt}b(x_0,y_0,u_0)\neq 0$ (כלומר: עקום ההתחלה אינו אופייני)

אז: קיים תחום שמכיל פתרון והוא יחיד בסביבה כלשהיא של עקום ההתחלה המקיים

$$u(x_0,y_0)=u_0$$

<u>הוכחה</u>: נסתכל על (23):

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y,u)$$

$$\frac{dy}{ds}=b(x,y,u) \qquad (23)$$

$$\frac{du}{ds}=c(x,y,u)$$

נקבע את t ונדרוש

$$(*)\qquad \begin{aligned} x(0)&=x_0(t)\\ y(0)&=y_0(t)\\ u(0)&=u_0(t)\end{aligned}$$

לפי משפט הקיום והיחידות של מערכת משוואות רגילות ל-(23) + (*) יש פתרון יחיד והוא $(X(s),y(s),u(s))$ והוא תלוי ב-t. לכן נקבל מערכת של פתרונות התלויה ב-t:

$$(x(s,t),\ y(s,t),\ u(s,t))$$

כאשר x,y,u פותרים את (23) לכל t קבוע,

$$x(0,t)=x_0(t)$$

$$y(0,t)=y_0(t)$$

$$u(0,t)=u_0(t)$$

כדי ש-s,t יהיו פונקציות של x,y אומרים היעקוביאן של המעבר הוא לא סינגולרי: כלומר אם

$D(s,t)=\begin{vmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \end{vmatrix}\neq 0$ נוכל לחלץ את s,t בסביבת x,y.

דף דיני 1.

אי רציפות:

דוגמא (1) $u_y + u u_x = 0$ $\quad -\infty \le x \le \infty \quad y \ge 0$ תנאי ההתחלה

$u(x,0) = h(x)$, h גזירה.

$a = u$
$b = 1$
$c = 0$

נצייר לפי x, y, u עקום ההתחלה

$u_0 = h(t) \quad y_0 = 0 \quad x_0 = t$

נבדוק תנאי (2) שימושי:

$0 \cdot u_0 - 1 \cdot 1 = -1 \neq 0$

משוואות האופייניות

$\frac{dx}{ds} = u \qquad x(s=0) = t$

$\frac{dy}{ds} = 1 \qquad y(s=0) = 0$

$\frac{du}{ds} = 0 \qquad u(s=0) = h(t)$

ולכן $u = h(t)$
וגם $y = s$

$\frac{dx}{ds} = u = h(t) \rightarrow x = h(t) \cdot s + t$

ולכן פתרון פרמטרי הוא

$u = h(t)$
$y = s$
$x = h(t) \cdot s + t$

כלומר $x = uy + t \Rightarrow t = x - uy \Rightarrow u = h(t) = h(x - uy)$

ולכן הפתרון הוא

$u = h(x - uy)$

נבדוק שבאמת זה פתרון:

$$\xi = x - uy$$

$$u = h(\xi)$$

$$u_x = h'(\xi)\cdot \xi_x = h'(\xi)[1 - y u_x]$$

$$u_x(1 + y h'(\xi)) = h'(\xi)$$

ולכן

$$u_x = \frac{h'(\xi)}{1 + y h'(\xi)}$$

וכן

$$u_y = h'(\xi)\xi_y = h'(\xi)(-u - y u_y)$$

ולכן

$$u_y[1 + y h'(\xi)] = -h'(\xi)$$

ולכן

$$u_y = \frac{-u h'(\xi)}{1 + y h'(\xi)} = -u u_x$$

ולכן

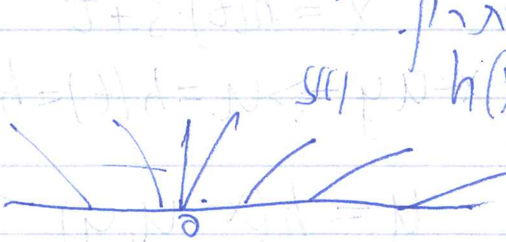
$$u_y + u u_x = 0$$

ולכן $u = h(x - uy)$ הוא פתרון. צריך לבדוק אם אפשר לחלץ את u.

כעת $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{u}$, u קבוע לאורך האופיין, ולכן $\frac{dy}{dx} = c$ ולכן $y = \frac{1}{u}x + k$ כלומר $c = x - uy$ ולכן האופיין הוא $x - uy = c$. אבל $u = h(x - uy)$, ולכן $u = h(c)$ קבוע.

הערה: אם 2 אופיינים נפגשים אז בנקודת החיתוך נקבל 2 פתרונות $u = h(x_0)$, $u = h(x_1)$, ואם הם שונים, אז בנקודה זו אין פתרון.

דוגמא (א) עבור $h(x) = x$ אז



האופיינים לא נפגשים

(ב) $h(x) = -x$:

$$u = h(x - uy) = -x + uy$$

$$u(1 - y) = -x \Rightarrow u = -\frac{x}{1 - y}$$

ולכן אין פתרון עבור $y = 1$.

דף ביניים

<u>סיכום:</u> u קבוע לאורך קו אופייני: $x-uy=c$ – ישר
אם $h(x)=1$ יש פתרון לכל y
ואם $h(x)=x$ אין פתרון קבוע.

<u>מתי נוצר „שבר" הפתרון? (הלם = שבירה גאומטרית)</u>
קורה כאשר שני אופיינים נפגשים. יהי אופיין אחד $u_0=h(x-u_0y)$, כי u_0 קבוע לאורך האופיין ⇐
$$h^{-1}(u_0)=x-u_0y$$
נסתכל בשני:
$$h^{-1}(u_1)=x-u_1y$$
נחסר:
$$h^{-1}(u_0)-h^{-1}(u_1)=(u_1-u_0)y$$
ולכן
$$y=\frac{h^{-1}(u_0)-h^{-1}(u_1)}{u_1-u_0}$$
ואם $h(t_0)=u_0$, $h(t_1)=u_1$ אז:
$$y=\frac{t_0-t_1}{h(t_1)-h(t_0)}=-\frac{t_1-t_0}{h(t_1)-h(t_0)}$$ נקודת פגישת האופיינים.

<u>מסקנה:</u> אם $\frac{t_1-t_0}{h(t_1)-h(t_0)}\geq 0$ לכל t_0 ולכל t_1 אין פגישת אופיינים לכל y חיובי. כלומר, התנאי שנקבל אם $h(t)$ מונוטונית לא יורדת.

<u>גישה 2</u>
$$u_x=\frac{h'}{1+yh'}$$
$$u_y=-\frac{uh'}{1+yh'}$$
לא יהיה פתרון כאשר המכנה מתאפס כי אז u_x, u_y לא מוגדרים. שבירת הפתרון קורית כאשר $1+yh'=0$ ואם $h'\geq 0$ אין שבירה לכל $y>0$, ואם $h'<0$ אז השבירה תיווצר כי
$$y=\frac{-1}{h'}$$

דוגמה: עבור $h=-x$ $h'=-1$ ושבירה בזמן $y=t1$

מה קורה לאחר השבירה? [הגדרה $\mathrm{div}\begin{pmatrix}F_1\\F_2\\F_3\end{pmatrix}=\frac{\partial F_1}{\partial x_1}+\frac{\partial F_2}{\partial x_2}+\frac{\partial F_3}{\partial x_3}$]

$$u_y+uu_x=0 \quad (*)$$

כלומר

$$u_y+\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x=0$$

כלומר

$$(**)\quad \int_a^b u_y(x,y)\,dx+\int_a^b\left(\tfrac{1}{2}u^2\right)_x dx=0$$

ולכן

$$\frac{d}{dy}\int_a^b u(x,y)\,dx+\frac{1}{2}\left(u^2(b,y)-u^2(a,y)\right)=0$$

$(*)$ ו $(**)$ שקולות אם ל-u יש נגזרות או משהו כזה
לא גזירה, אז החל מאיזו נקודה תופסת רק משוואה $(**)$
נניח $u(x,y)$ גזירה, פרט לעקום גזיר $x=\eta(y)$
[העקום הזה מייצג את המקום הגיאומטרי של נקודות השבירה של הגל.]

נקבל:

$$\frac{d}{dy}\left[\int_a^{\eta}u\,dx+\int_{\eta}^b u\,dx\right]+\frac{1}{2}u^2(b,y)-\frac{1}{2}u^2(a,y)=0$$

נסמן $\lim_{x\to\eta^-}u=u^-$ ו $\lim_{x\to\eta^+}u=u^+$ ונקבל מכאן

$$\int_a^{\eta}u_y\,dx+\int_{\eta}^b u_y\,dx+\eta' u^- -\eta' u^+ +\frac{1}{2}u^2(b,y)-\frac{1}{2}u^2(a,y)=0$$

בעזרת משוואה זו ננסה למצוא קשר בין u^+ ל u^- כדי לעבור בין u^- מצד אחד של עקום השבירה לצד השני. בנקודות הרציפות של u, ניתן לחזור למשוואה $(*)$:

$$\underbrace{\int_a^{\eta}-\frac{1}{2}(u^2)_x\,dx}_{\text{לפי } (*)\ u_y}+\int_{\eta}^b-\frac{1}{2}(u^2)_x\,dx+\eta'(u^- -u^+)+\frac{1}{2}u^2(b,y)-\frac{1}{2}u^2(a,y)=0$$

מכאן

דף ביניים

$$0 = -\frac{1}{2}u^2(\xi) + \frac{1}{2}u^2(a,y) - \frac{1}{2}u^2(b,y) + \frac{1}{2}u^2(\eta^+) + \eta'(u^- - u^+) + \frac{1}{2}u^2(b,y) - \frac{1}{2}u^2(a,y)$$

ולכן

ולכן

$$\frac{1}{2}\left[(u^-)^2 - (u^+)^2\right] = \eta'(u^- - u^+)$$

<u>פתרון חלש:</u>

$$\eta' = \frac{1}{2}(u^- + u^+)$$

במקרה מרוכז אי-הרציפות של u ממשיך להתקדם, את עקום זה, ניתן לקבל את הפתרון u מהצד השני של עקום אי-הרציפות. עקום נוצר ע"י רנקין הוגוניוט את כל נקודות החיתוך, את האופייניות.

<u>דוגמאות</u> (5): $u_y + a(u)u_x = 0$, $u(x,0) = h(x)$. אופייניות:

$$\frac{dx}{ds} = a(u)$$

$$\frac{dy}{ds} = 1$$

$$\frac{du}{ds} = 0 \Rightarrow$$ u קבוע על האופיין.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{a(u)}$$

אבל u קבוע, ולכן $a(u)$ קבוע ולכן האופיין הוא קו ישר:

$$a(u)y - x = c$$

והפתרון

$$u = h(x - a(u)y)$$

והנקודה אם יש פתרון תלוי לפי $a(u)$. פיתוח:

$$\eta = x - a(u)y \Rightarrow u = h(x - a(u)y) = h(\eta)$$

$$u_x = h'\eta_x = h'[1 - a'(u)yu_x]$$

$$u_y = h'\eta_y = h'[-a(u) - ya'(u)u_y]$$

$$u_x[1 + h'a'y] = h'$$

$$u_y[1 + h'a'y] = -a(u)h'$$

$$u_x = \frac{h'}{1+h'a'y}$$

ת.ה.ג שבירה עבור $y>0$ אם $\frac{1}{h'a'}<0$, והשבירה תהיה בנקודה $y=-\frac{1}{h'a'}$

הוכ׳:

$$D(0,t)=a(x_0,y_0,u_0)\frac{dy_0}{dt}-b(x_0,y_0,u_0)\frac{dx_0}{dt}$$

וזה שונה מ-0 לפי הנתון. ולכן בסביבת עקום ההתחלה ניתן לחלץ את s,t כפונקציה של x,y ולקבל את u. ולכן קיים פתרון. נוכיח שהוא פתרון של (1ד):

נגדיר $\phi(x,y)=u(s(x,y),t(x,y))$ אז:

$$a\phi_x+b\phi_y=a(u_t t_x+u_s s_x)+b(u_t t_y+u_s s_y)=u_s(as_x+bs_y)+u_t(at_x+bt_y)=$$

לפי (2ד)

$$=u_s(x_s s_x+y_s s_y)+u_t(x_s t_x+y_s t_y)=u_s\frac{ds}{ds}+u_t\frac{dt}{ds}=c+0=c$$

ולכן ϕ פתרון של (1ד)

יחידות טריוויאלית.

מ.ש.ל.

<u>דוגמא:</u> המשוואה $uu_x+u_y=1$ בתנאי ההתחלה $x_0(t)=t=y_0(t)$

$u_0(t)=\frac{1}{2}t$ כאשר $0\le t\le 1$:

$$\frac{dx}{ds}=u \qquad \frac{du}{ds}=1$$ וזה (2ד)

$$\frac{dy}{ds}=1$$

ונקבל $y=s+c_0$ מתוך תנאי ההתחלה

נקבל $y=s+t$ $u=s+\frac{1}{2}t$ ובדומה

$$\frac{dx}{ds}=s+1/2$$

ולכן $x=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}ts+c_1$ ומתוך תנאי ההתחלה:

$x=\frac{1}{2}s^2+\frac{1}{2}ts+t$ נבדוק את התנאי לקיום: הוא מתקיים.

נחלץ את s,t של x,y:

$\cancel{y^2=s^2+2st+t^2}$

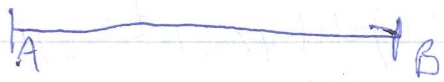
$$s=\frac{2x-2y}{y-2}$$

$$t=\frac{y^2-2x}{y-2}$$

והפתרון u יהיה

$$u = s + \tfrac{1}{2}t = \dots$$

<u>דוגמא</u>: נמדל כביש:



נסמן ב $0 \le \rho(x,t) \le 1$ צפיפות המכוניות במקום x בזמן t
וב $V(x,t)$ מהירות המכונית במקום x בזמן t.
אנו מניחים שאין תאונות, ולכן מתקיים חוק שימור המסה:
מס' היוצאים ~~פ~~ מס' הנכנסים = שינוי במס' המכוניות

מס' המכוניות בקטע A,B בזמן t:

$$\int_A^B \rho(x,t)\,dx$$

וחוק שימור המסה יהיה:

$$\frac{d}{dt}\int_A^B \rho(x,t)\,dx = \rho(A,t)V(A,t) - \rho(B,t)V(B,t)$$

נקבל

$$\frac{d}{dt}\frac{1}{\Delta x}\int_A^{A+\Delta x} \rho(x,t)\,dx = \frac{(\rho V)(A) - (\rho V)(A+\Delta x)}{\Delta x}$$

נשאיף $\Delta x \to 0$ ונקבל

$$\rho_t + V\rho_x = 0$$

<u>הנחה</u> $V = V_0(1-\rho)$ (כלל המקשר בין הצפיפות למהירות)
ולכן נקבל משוואה: נניח $V_0 = 1$ ונקבל

$$\rho_t + [(1-\rho)\rho]_x = 0$$

כלומר:

$$\rho_t + (1-2\rho)\rho_x = 0$$

המשך בשיעור הבא.

קושי

$$(u+3y)u_x + 3(u-x)u_y + (x+3y) = 0$$

אז משוואות האופייניות:

1) $\frac{dx}{ds} = u+3y$

2) $\frac{dy}{ds} = 3u-3x$

3) $\frac{du}{ds} = -x-3y$

עקום ההתחלה

$$x-y+u=2a$$
$$x^2-y^2+u^2=a^2$$

נמצא פונקציות G,H כך שמתקיים: נחבר $3(1)+3(3)-(2)$:

$$\frac{d(3u+3x-y)}{ds} = 3u+9y-3x-9y+3x-3u+3x = 0$$

ולכן נקבל G:

$$1` \qquad 3u+3x-y=\gamma_1$$

נקבל G

$$\frac{d(x^2+y^2+u^2)}{ds} = 2xu+6xy+6yu-6xy-2xu-6yu = 0$$

$$2` \qquad x^2+y^2+u^2=\gamma_2$$

ולכן חוזרים על

$$3` \qquad x-y+u=2a$$
$$4` \qquad x^2-y^2+u^2=a^2$$

$\frac{2`-4`}{2}$: $\quad y^2 = \frac{\gamma_2-a^2}{2}$

$1`-3\cdot 3`$: $\quad 2y = \gamma_1 - 6a$

$$y = \frac{\gamma_1-6a}{2}$$

כלומר:

ולכן

$$\left(\frac{r_1-6a}{2}\right)^2=\frac{r_2-a^2}{2}$$

ולכן

$$(3u+3x-y-6a)^2=2(x^2+y^2+u^2-a^2)$$

וזה הפתרון

דרך ב נכתוב:

$$\frac{d}{ds}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3&1\\-3&0&3\\-1&-3&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\u\end{pmatrix}$$

זהו משוואה מהצורה: $\frac{dY}{ds}=AY$ שפתרונה

$$Y=c_1Y_1e^{\lambda_1 s}+c_2Y_2e^{\lambda_2 s}+c_3Y_3e^{\lambda_3 s}$$

כאשר Y_1,Y_2,Y_3 הם ו' $\lambda_{1,2,3}$ הע"ע המתאימים להם.

דוגמה

$$x^3u_x+y(3x^2+y)u_y=u(2x^2+y)$$

תנאי: $x=1$, $y^2=u-y$

משוואות האופייניות:

$$\frac{dx}{ds}=x^3$$

$$\frac{dy}{ds}=y(3x^2+y)$$

$$\frac{du}{ds}=u(2x^2+y)$$

אז:

$$\frac{1}{x}\frac{dx}{ds}-\frac{1}{y}\frac{dy}{ds}+\frac{1}{u}\frac{du}{ds}=0$$

כלומר

$$\frac{d\ln x}{ds}-\frac{d\ln y}{ds}+\frac{d(\ln u)}{ds}=0$$

כלומר

$$\ln x-\ln y+\ln u=r_1$$

וכלומר

(1) $$\frac{xu}{y}=r_1$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y(3x^2+y)}{x^3}$$ נזכר

כלומר

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3y}{x}+\frac{y^2}{x^3}$$

נחלק ב y^2:

$$\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{3}{yx}+\frac{1}{x^3}$$

נגדיר $v=1/y$ ונקבל

$$-\frac{dv}{dx}=\frac{3v}{x}+\frac{1}{x^3}$$

מד"ר לינארית:

$$v'+\frac{3v}{x}=-\frac{1}{x^3}$$

$\cdot x^3$:

$$x^3v'+3x^2v=-1$$

כלומר

$$(x^3v)'=-1$$

ולכן

$$x^3v=-x+\gamma_2$$

ולכן

$$(2)\qquad \frac{x^3}{y}+x=\gamma_2$$

תהי המשוואה:

$$P(u)=au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}$$

עבור $d>0$.

נסמן

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ונקבל

$$P(u)=(\partial/\partial x,\ \partial/\partial y)\,S\begin{pmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{pmatrix}u$$

נקח

$$T=\begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix}$$

וכעת

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

ולכן

$$\partial/\partial\xi = \alpha\,\partial/\partial x + \gamma\,\partial/\partial y$$

$$\partial/\partial\eta = \beta\,\partial/\partial x + \delta\,\partial/\partial y$$

ואז

$$P(u) = \begin{pmatrix} \partial/\partial\xi & \partial/\partial\eta \end{pmatrix} T^t S T \begin{pmatrix} \partial/\partial\xi \\ \partial/\partial\eta \end{pmatrix} u$$

נקח T שלכסן את S ונקבל אחת מהאפשרויות

(1)

$$P(u) = |\lambda_1| u_{\xi\xi} + |\lambda_2| u_{\eta\eta}$$

אם הע"ע חיוביים

ואז $P(u)$ תקרא אליפטית

(2)

$$P(u) = |\lambda_1| u_{\xi\xi} - |\lambda_2| u_{\eta\eta}$$

ואז $P(u)$ תקרא היפרבולית

(3)

$$P(u) = |\lambda_1| u_{\xi\xi}$$

אחד הע"ע $=0 \Longleftarrow$ משוואה פרבולית

<u>דוגמה</u>

$$u_{xx} + 2u_{xy} + u_{yy} = 0$$

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = 2$$

ולכן ניתן להעביר את המשוואה לצורה

$$u_{\eta\eta} = 0$$

כלומר

$$u = \eta f(\xi) + g(\xi)$$

דף קיני:

<u>טענה</u> $P(u)$ היא אליפטית אם $b^2-ac<0$

היפרבולית אם $b^2-ac>0$

פרבולית אם $b^2-ac=0$

<u>הוכחה</u> ~~של~~ של הנ"ל:

$$S=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$$

ע"ע מקיימים לפי $S-\cancel{\lambda}I=0$ ~~det~~ כלומר

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ b & c-\lambda \end{vmatrix}=0$$

כלומר

$$0=(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2$$

ולכן

$$\lambda_1\lambda_2=ac-b^2$$

$ac-b^2>0 \Leftarrow$ שניהם חיוביים או שניהם שליליים, וזה אליפ'

$ac-b^2<0 \Leftarrow$ אחד חיובי ואחד שלילי

$ac-b^2=0 \Leftarrow$ אחד מהע"ע הוא 0.

צריך למצוא את $\alpha,\beta,\gamma,\delta$: כלומר את:

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

כלומר $\alpha=-\beta$ ולכן $\alpha=\frac{1}{\sqrt2}$, $\beta=-\frac{1}{\sqrt2}$

והשני

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\gamma\\\delta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\gamma\\2\delta\end{pmatrix}$$

כלומר

$$\gamma+\delta=2\gamma=2\delta$$

ולכן פתרון למשל הוא

$\delta=\frac{1}{\sqrt2}$ $\gamma=\frac{1}{\sqrt2}$

ולכן $\xi=\sqrt{1/2}\,(x-y)$ כאשר

$\eta=\frac{1}{\sqrt2}(x+y)$ והפתרון הוא

$$u=\frac{1}{\sqrt2}(x+y)f\left(\sqrt2(x-y)\right)+g\left(\frac{1}{\sqrt2}(x-y)\right)$$

<u>דוגמא</u>

$$P(u)=u_{xx}+u_{xy}+u_{yy}$$

אז $S=\begin{pmatrix}1&1/2\\1/2&1\end{pmatrix}$ הע"ע של S הם

$$\lambda_1=3/2\quad\lambda_2=1/2$$

והמשוואה הקנונית היא

$$\underline{P(u)=3/2\,u_{\xi\xi}+1/2\,u_{\eta\eta}=0}$$

מקדמים לא קבועים:

$$P(u)=a(x,y)u_{xx}+2b(x,y)u_{xy}+c(x,y)u_{yy}$$

$$S=\begin{pmatrix}a&b\\b&c\end{pmatrix}(x,y)$$

ולכן יש לה תחומים שונים שבהם היא אליפטית היפרבולית פרבולית

דוגמה משוואות טריקומי $u_{yy}=yu_{xx}$

כלומר

$$u_{yy}-yu_{xx}=0$$

עבור $y>0$ היפרבולית

$y=0$ פרבולית

$y<0$ אליפטית

מקדמים קבועים ג' (x,y,z):

$$P(u)=a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+2a_{13}u_{xz}+a_{22}u_{yy}+2a_{23}u_{yz}+a_{33}u_{zz}$$

כלומר

$$P(u)=(\partial/\partial x\ \ \partial/\partial y\ \ \partial/\partial z)\, S \begin{pmatrix}\partial/\partial x\\ \partial/\partial y\\ \partial/\partial z\end{pmatrix} u$$

$$S=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{12} & a_{22} & a_{23}\\ a_{13} & a_{23} & a_{33}\end{pmatrix}$$

יהיו $\lambda_i\,(1,2,3)$ הע"ע של S

הגדרה יהי $a_{11}>0$ אזי $P(u)$ תקרא:

1. אליפטית אם $\lambda_i>0$
2. היפרבולית אם ע"ע אחד או שניים שליליים, ו-S לא סינגולרית.
3. פרבולית אם בדיוק ע"ע אחד הוא אפס, והשאר חיוביים.

משוואות לפלס: יהי $\bar{G}$ תחום חסום וסגור משפתו T חלקה למקוטעין, נגדיר $\bar{G}\setminus T=G$, u נקרא פתרון של משוואות לפלס ב-G אם

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{ב-}G$$

ו-u נקרא פתרון של משוואות דיריכלה ב-$\bar{G}$ אם

$$u_{xx}+u_{yy}=0 \quad \text{ב-}G$$

, $u=f$ ב-T ונגזרות של u יהיו רציפות ב-G

למה תהי $V(x,y)$ פתרון של $V_{xx}+V_{yy}=F(x,y)$ בתחום G,
באשר $F>0$ בכל G אזי המקסימום של V ב $\bar{G}$
מתקבל ב $T\triangleq\partial G$

הוכחה נניח ש V מקבל מקסימום ב G, ונקרא לנק' המקסימום (ξ,η) אזי

$$V_x(\xi,\eta)=0 \quad V_y(\xi,\eta)=0$$

וכן

$$\cancel{V_{xx}V_{yy}-V_{xy}^2\geq 0}$$

מקסימום בכל כיוון קיים אז $V_{xx}\leq 0$, $V_{yy}\leq 0$ ולכן

$$V_{xx}(\xi,\eta)+V_{yy}(\xi,\eta)\leq 0\neq F$$

מסקנה $F<0$ אזי המינימום של V מתקבל ב T.

למה תהי u פתרון בעיית דיריכלה בתחום G עם שפה רציפה T, אזי לכל $(x,y)\in G$

$$u(x,y)\leq\max_{(x,y)\in T}F(x,y)$$

הוכחה: נניח שיש נקודה ב G כך ש $u>\max_{(x,y)\in T}F(x,y)\triangleq m$
יהי (ξ,η) המקסימום של u ב $\bar{G}$, הוא ב G. אזי

$$u(\xi,\eta)\triangleq M>m$$

נסמן $d=\sup_{x,y\in G}d(x,y)$ הקוטר של G ונגדיר

$$V(x,y)=u(x,y)+\frac{M-m}{2d^2}\left[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2\right]$$

ומקבל

$$V(\xi,\eta)=u(\xi,\eta)=M$$

$$(x,y)\in T\Rightarrow V(x,y)\leq m+\frac{M-m}{2}=\frac{M+m}{2}<M$$

ולכן ל V יש מקסימום בתוך G. בנוסף

$$V_{xx}+V_{yy}=u_{xx}+\frac{M-m}{d^2}+u_{yy}+\frac{M-m}{d^2}=2\frac{M-m}{d^2}>0$$

בסתירה למשפט קודם.

מש"ל.

משפט אם $u_{xx}+u_{yy}=0$ ב-G ו-$u(x,y)=f(x,y)$ ב-$T=\partial G$

אזי:

$$u(x,y)\ge \min_{(x,y)\in T} f(x,y)$$

הערה תהי u פונקציה גזירה פעמיים ב-x וב-y. תהי f רציפה על עקום סגור T, ויהי G פנימו. אזי פתרון המשוואה $u_{xx}+u_{yy}=0$ ב-G המקיים $u/T=f$ הוא יחיד.

משפט פתרון בעית דיריכלה תלוי באופן רציף בתנאי השפה.

משפט יהיו u,v פתרונות של $v_{xx}+v_{yy}=0=u_{xx}+u_{yy}$ בתחום G, ו- $v/T=f_2$ וכן $u/T=f_1$, אזי לכל $(x,y)\in G$

$$\max_T |f_1(x,y)-f_2(x,y)|\ge|u(x,y)-v(x,y)|$$

מסקנה $f_i\to f \Rightarrow u_i\to u$ הפתרונות בעית דיריכלה.

משוואת לפלס בקוטביות: בעיגול:

$$y=\rho\sin\theta \quad x=\rho\cos\theta \quad u(1,\theta)=f(\theta)$$

ונניח $f''(\theta)$ קיימת ומחזורית $0\le\theta\le2\pi$. אזי

$$u_\rho=u_x x_\rho+u_y y_\rho=u_x\cos\theta+u_y\sin\theta$$

$$u_\theta=u_x x_\theta+u_y y_\theta=-u_x\rho\sin\theta+u_y\rho\cos\theta$$

אזי

$$\begin{pmatrix}u_\rho\\u_\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\-\rho\sin\theta & \rho\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\begin{pmatrix}u_x\\u_y\end{pmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{pmatrix}\rho\cos\theta & -\sin\theta\\ \rho\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_\rho\\u_\theta\end{pmatrix}$$

ולכן

$$\frac{\partial}{\partial x}u=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u$$

$$\frac{\partial}{\partial y}u=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)u$$

ולכן

$$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho}-\frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\cos\theta\, u_\rho-\frac{\sin\theta}{\rho}u_\theta\right)=$$

$$=\cos^2\theta\, u_{\rho\rho}-\cos\theta\sin\theta\left(\frac{1}{\rho}u_\theta\right)_\rho-\frac{\sin\theta}{\rho}(\cos\theta\, u_\rho)_\theta+\frac{1}{\rho^2}\sin\theta(\sin\theta\, u_\theta)_\theta=$$

$$=\cos^2\theta\, u_{\rho\rho}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta-\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}u_{\theta\rho}+\frac{\sin^2\theta}{\rho}u_\rho-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}u_{\rho\theta}+$$

$$+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}=$$

$$=\cos^2\theta\, u_{\rho\rho}+\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\sin^2\theta}{\rho}u_\rho-\frac{2\sin\theta\cos\theta}{\rho}u_{\rho\theta}+\frac{\sin^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$

$$u_{yy}=\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{\cos\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)\left(\sin\theta\, u_\rho+\frac{\cos\theta}{\rho}u_\theta\right)=$$

$$=\sin^2\theta\, u_{\rho\rho}-\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho^2}u_{\theta\rho}+\frac{\sin\theta\cos\theta}{\rho}u_{\theta\rho}+\frac{\cos^2\theta}{\rho}u_{\rho\theta}+\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho}u_{\rho\theta}-$$

$$-\frac{\cos\theta\sin\theta}{\rho^2}u_\theta+\frac{\cos^2\theta}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$

ולכן

$$u_{xx}+u_{yy}=u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}$$

<u>מסקנה</u>: עלינו לפתור את $u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0$ (*) עבור $\rho<1$ עם

תנאי השפה $u(1,\theta)=f(\theta)$

נחפש פתרון מהצורה $u=R(\rho)\phi(\theta)$ (הפרדת משתנים) ואז

$$u_\rho=R'(\rho)\phi(\theta)\quad u_{\rho\rho}=R''(\rho)\phi(\theta)\quad u_{\theta\theta}=R(\rho)\phi''(\theta)$$

נציב ב (*):

$$R''(\rho)\phi(\theta)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\phi(\theta)+\frac{1}{\rho^2}\phi''(\theta)=0$$

נכפיל ב $\frac{\rho^2}{R(\rho)\phi(\theta)}$ ונקבל

$$\frac{\rho^2R''(\rho)}{R(\rho)}+\frac{\rho R'(\rho)}{R(\rho)}=-\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)}=\lambda$$

λ קבוע, כי הוא תלוי רק ב ρ ורק ב θ. המשוואה נפרדת

$$\frac{\phi''(\theta)}{\phi(\theta)} = -\lambda$$

כלומר $\phi''(\theta)+\lambda\phi(\theta)=0$ אז

$$\phi = A\cos\sqrt{\lambda}\,\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\,\theta$$

מצד $\phi(\theta)=\phi(2\pi)$ / $\phi'(0)=\phi'(2\pi)$ $\Leftarrow$ $\sqrt{\lambda}$ מספר
טבעי כי

$$\phi(0)=\phi(2\pi) \Rightarrow A = A\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi + B\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi$$

$$\phi'(0)=\phi'(2\pi) \Rightarrow \sqrt{\lambda}B = -A\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,2\pi + B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,2\pi$$

נסמן $M=\sqrt{\lambda}\,2\pi$ ונקבל

$$0 = -(1-\cos M)A + (\sin M)B$$

$$0 = (-\sin M)A + (\cos M - 1)B$$

כדי שיהיה פתרון לא טריוויאלי $0=\det$:

$$(1-\cos M)^2 + (\sin M)^2 = 0$$

כלומר $1 - 2\cos M + 1 = 0$

ולכן $M = 2\pi n$, ולכן לכל n יהיה פתרון

$$\phi = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

<u>סימון</u> $\nabla^2\phi = \Delta\phi = \phi_{xx}+\phi_{yy} = 0$.

אז עבור R:

$$\rho^2R'' + \rho R' - n^2R = 0$$

וזו משוואת אוילר נחפש פתרון מהצורה $R=\rho^k$

$$\rho^2k(k-1)\rho^{k-2} + \rho k\rho^{k-1} - n^2\rho^k = 0$$

$$k(k-1) + k - n^2 = 0$$

$$k^2 = n^2$$

ולכן $k=\pm n$ ולכן הפתרונות

$$R = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}$$

n-ים לא רציף בתוך עיגול היחידה ולכן נקח

$$R = C_n\rho^n$$

ולכן פתרון מהצורה $R\phi$ הוא:

$$R\Phi=\rho^n(C_nA_n\cos n\theta+C_nB_n\sin n\theta)$$

נבחר $C_n=1$. ~~xx~~ לינארית, ולכן גם סכום של פתרונות הוא פתרון. ונקבל

$$V(\rho,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

ויש לדרוש

$$V(1,\theta)=f(\theta)$$

כלומר

$$f(\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta$$

ואז מקדמי:

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta$$

$n>0$

$$A_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta$$

$n=0$ $\quad B_0=0$

$$A_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta$$

<u>טענה</u> (משפט פוריה): תהי $f(\theta)$ פונקציה שתי נגזרות רציפות בקטע $[0,2\pi]$ אזי טור פוריה שלה מתכנס אליה במידה שווה בקטע.

<u>טענה</u> תהי $f(\theta)\in C^2$ ב $[0,2\pi]$ אזי $V(\rho,\theta)$ שהוגדרה לעיל מקיימת $V_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}V_\rho+\frac{1}{\rho^2}V_{\theta\theta}=0$ וגם $V(1,\theta)=f(\theta)$ ו-$\rho<1$

<u>טענה</u>

$$V(\rho,\theta)=U(\rho,\theta)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos\theta-\psi}d\psi$$

<u>הוכחה</u>

$$V(\rho,\theta)=A_0+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)\rho^n=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos n\theta}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\cos n\psi\,d\psi+\frac{\sin n\theta}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sin n\psi\,d\psi\right]\rho^n=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sum_{n=1}^{\infty}[\cos n\theta\cos n\psi+\sin n\theta\sin n\psi]\rho^n d\psi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\psi)\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\psi)\,d\psi$$

וכן:
$$\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n\cos n(\theta-\psi)=\sum_{n=0}^{\infty}\rho^n Re\left(e^{in(\theta-\psi)}\right)-1=$$
$$=Re\sum_{n=0}^{\infty}\left(\rho e^{i(\theta-\psi)}\right)^n-1\underset{|\rho|<1}{\overset{\text{טור}}{=}}Re\frac{1}{1-\rho e^{i(\theta-\psi)}}-1$$

אז
$$Re\frac{1}{1-\rho e^{i(\theta-\psi)}}=Re\frac{1-\rho e^{-i(\theta-\psi)}}{[1-\rho e^{i(\theta-\psi)}][1-\rho e^{-i(\theta-\psi)}]}=$$
$$=Re\frac{1-\rho\cos(\theta-\psi)+i\rho\sin(\theta-\psi)}{1-\rho\left(e^{i(\theta-\psi)}+e^{-i(\theta-\psi)}\right)+\rho^2}=\frac{1-\rho\cos(\theta-\psi)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}$$

נציב בתוצאה ונקבל:
$$V(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)d\psi+\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)\left[\frac{1-\rho\cos(\theta-\psi)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}+1\right]d\psi$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)\left[\frac{2-2\rho\cos(\theta-\psi)}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}-1\right]=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\psi)+\rho^2}d\psi=u(\rho,\theta)$$
מ.ש.ל.

<u>טענה</u> נגדיר
$$K(\rho,\theta-\psi)=\frac{1-\rho^2}{1+\rho^2-2\rho\cos(\theta-\psi)}$$
אזי $\Delta K=\frac{\partial^2K}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial K}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2K}{\partial\theta^2}=0$ לכל $\rho<1$, ψ, θ

<u>הוכחה</u> נניח שיש ρ_0,ψ_0,θ_0 עבורם $\Delta K\neq0$, בה"כ $\Delta K>0$
ניקח $g(\psi)$ רציפה חיובית אי-שלילית שהתומך שלה
מוכל בתחום של $\lambda\psi.\Delta K(\theta_0,\rho_0-\psi)$ נגדיר
$$W(\rho,\theta)=\int_0^{2\pi}g(\psi)K(\rho,\theta-\psi)d\psi$$
אזי $W(\rho,\psi)$ פתרון של משוואת לפלס, אך
$$\Delta W=\int_0^{2\pi}g(\psi)\Delta K>0$$
סתירה. ולכן
מ.ש.ל.

<u>טענה</u> תהי $F(\theta)$ רציפה, אזי $u(\rho,\theta)\triangleq\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)K(\rho,\theta-\psi)d\psi$ עם $\rho<1$
פתרון של בעיית דיריכלה. (עבור $\rho=1$ נגדיר $u(\rho,\theta)=F(\theta)$)

<u>הוכחה</u> (1) $\Delta u=\Delta\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(\psi)K(\rho,\theta-\psi)d\psi=\frac{1}{2\pi}\int F\Delta K d\psi=0$

(2) $F(\theta)$ רציפה. ניקח F_n סדרה של פונק' 3.ת
כך ש... המתכנסות ל-F במ"ש, אזי $u_n\xrightarrow{\text{במ"ש}}u$

ומכאן מקבלים ש- $\lim_{\rho\to 1} u(\rho,\theta)=f(\theta)$ עם רציפות u.
מ.ש.ל.

עבור $x^2+y^2\le R^2$

$$u(\rho,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{R^2-\rho^2}{R^2+\rho^2-2R\rho\cos(\theta-\psi)}$$

משפט (ערך הממוצע): תהי $u(\rho,\theta)$ פתרון משוואת לפלס, לכל $R>\rho\ge 0$, $u(R,\theta)=f(\theta)$, $f(\theta)$ רציפה.
אזי ערך u במרכז = הגבול שווה לממוצע של ערכי u על המעגל.

הוכחה

$$u(0,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\frac{R^2-0}{R^2+0-0}\,d\psi=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,d\psi$$

מ.ש.ל.

משפט

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma P\,dx+Q\,dy$$

~~משפט~~ הגדרה: D: קבוצת כל הפונקציות הגזירות ברציפות כך ש- $v|_{\partial G}=f$, f נתונה. עבור $v\in D$ נגדיר

$$D(v)=\iint_G(v_x^2+v_y^2)\,dxdy$$

משפט: יהי u פתרון בעיית דיריכלה. אזי $D(u)\le D(v)$ לכל $v\in D$.

הוכחה: תהי $v\in D$. נגדיר $g=v-u$. אז $T\triangleq\partial G$, $g|_T\equiv 0$. אזי

$$D(v)=\iint_G[(u_x+g_x)^2+(u_y+g_y)^2]\,dxdy=\iint_G(u_x^2+u_y^2)\,dxdy+\iint_G(g_x^2+g_y^2)\,dxdy+$$

$$+2\iint_G(u_xg_x+u_yg_y)\,dxdy\triangleq D(u)+D(g)+2M(u,g)$$

אזי

$$M(u,g)=\iint_G[(gu_x)_x-gu_{xx}+(gu_y)_y-gu_{yy}]\,dxdy=$$

u פתרון לפלס, ולכן

$$= \iint_G [(gU_x)_x + (gU_y)_y]\,dx\,dy = \oint_T -(gU_y)\,dx + (gU_x)\,dy = 0$$

כי $g|_T \equiv 0$ ולכן

$$D(V) = D(U) + D(g)$$

מאחר $D(g) \geq 0$ ולכן $D(V) \geq D(U)$

מ.ש.ל.

<u>משפט היחידות לבעית נוימן:</u> נתונה המשוואה $U_{xx}+U_{yy}=0$ בתחום G, עם התנאי $\frac{\partial U}{\partial n} = F$ על השפה, כאשר $\vec{n}$ הנורמל לשפת G, אזי הפתרון יחיד עד כדי קבוע.

<u>הוכחה</u> יהיו U,V פתרונות ונגדיר $W=U-V$ אזי

$W_{xx}+W_{yy}=0$ ב-G

וכן $\frac{\partial W}{\partial n}=0$ ב-T. נקבל:

$$(WW_x)_x + (WW_y)_y = W_x^2 + W_y^2 + W(W_{xx}+W_{yy}) = W_x^2 + W_y^2$$

ונקבל לכן

$$\iint_G (W_x^2+W_y^2)\,dx\,dy = \oint -WW_y\,dx + WW_x\,dy \triangleq A$$

נניח ש-T היא $x=x(t)$, $y=y(t)$ אזי

$$0 = \frac{\partial W}{\partial n} = W_x\frac{dy}{dt} - W_y\frac{dx}{dt}$$

ולכן $A=0$ ולכן $W_x, W_y \equiv 0$ ולכן W קבוע.

מ.ש.ל.

נפתור כעת, דוגמא: $T_{xx}+T_{yy}=0$ במלבן $0\leq x\leq L$; $0\leq y\leq H$

בתנאים $T(x,0)=T(0,y)=T(L,y)=0$ וכן $T(x,H)=F(x)$

נפריד משתנים ונקבל $T(x,y)=X(x)Y(y)$

$$Y(0)=0$$

$$X(0)=X(L)=0$$

ונקבל

$$X''(x)Y(y)+X(x)Y''(y)=0$$

ולכן

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} = \lambda$$

λ קבוע.

כעת מצאנו פתרונות ש $\lambda=\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ ו

$$X(x)=A_n\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

וגם

$$Y''=\frac{n^2\pi^2}{L^2}Y$$

$$\left\{\begin{aligned}\sinh a&=\frac{e^a-e^{-a}}{2}\\ \cosh a&=\frac{e^a+e^{-a}}{2}\end{aligned}\right.$$

ולכן

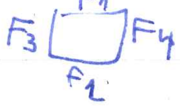
$$Y=C_n\sinh\frac{n\pi y}{L}$$

ולכן

$$T(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sinh\frac{n\pi y}{L}\sin\frac{n\pi x}{L}$$

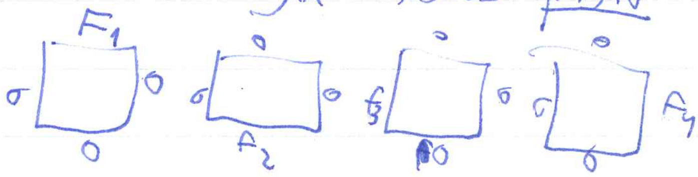
כאשר

$$A_n=\frac{1}{\sinh\frac{n\pi H}{L}}\cdot\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{n\pi x}{L}\,dx$$



<u>בעיה</u> הנ"ל עם

<u>פתרון</u> נפתור את



ונסכם.

<u>משוואת הגלים:</u> $U_{tt}=U_{xx}$ ונתון $U(x,0)=\alpha(x)$, $U_t(x,0)=\beta(x)$

כאשר $\alpha,\beta\in L^1\cap C^1(-\infty,\infty)$

אז:

$$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$$

$$\alpha(x)=u(x,0)=f(x)+g(x)$$

וגם

/

$$\beta(x)=U_t(x,0)=f'(x)-g'(x)$$

$$\alpha'(x)=f'(x)+g'(x)$$

יחד עם

ונקבל

$$f'(x)=\frac{\alpha'(x)}{2}+\frac{\beta(x)}{2}$$

$$g'(x)=\frac{\alpha'(x)}{2}-\frac{\beta(x)}{2}$$

ולכן

$$F(x)=\frac{\alpha(x)}{2}+\frac{1}{2}\int_0^x\beta(\eta)\,d\eta+\delta$$

$$g(x)=\frac{\alpha(x)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^x\beta(\eta)\,d\eta+\epsilon$$

δ,ϵ קבועים.

וכעת

$$\alpha(x)=F(x)+g(x)=\epsilon+\delta+\alpha(x)$$

ולכן $\epsilon+\delta=0$ ולכן:

$$u(x,t)=F(x+t)+g(x-t)=\frac{1}{2}\left(\alpha(x+t)+\alpha(x-t)\right)+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\beta(\eta)\,d\eta$$

וזה פתרון המשוואה. קל לבדוק שאכן מקיים את המשוואה ותנאי ההתחלה.

משפט תהי $V(x,y)$ פתרון ל

כאשר $F>0$, $V_{xx}+V_{yy}=F(x,y)$ בתחום G

אז $\max_G V$ מתקבל ב Γ

אם $F<0$, $\min_G V$ מתקבל ב Γ

תרגיל: $xu_y-yu_x=u$ ונתון $u(x,0)=h(x)$

משוואות האופייניות:

① $$\frac{dx}{ds}=-y$$

② $$\frac{dy}{ds}=x$$

③ $$\frac{du}{ds}=u$$

תנאי ההתחלה: $x(0)=t$, $y(0)=0$, $u(0)=h(t)$

מתוך ③ נקבל $u=ce^s=h(t)e^s$

נגזור את ① ונקבל $\frac{d^2x}{ds^2}=-\frac{dy}{ds}=-x$ ולכן

$$x(s)=A\cos s+B\sin s$$

ומתוך תנאי ההתחלה

$$x(s)=A\sin s+t\cos s$$

וכן $-y=\frac{dx}{ds}=A\cos s-t\sin s;\ y(0)=0 \xRightarrow{A=0} y=t\sin s$

ולכן

$$x(s,t)=t\cos s$$
$$y(s,t)=t\sin s$$

ולכן $t=\sqrt{x^2+y^2}$

וכן $s=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

תרגיל תהי $F(x,y)$ רציפה ב $\bar{G}$, $F(x,y)>0$ ב $\bar{G}$

ותהי $u(x,y)$ פתרון ל

$$u_{xx}+u_{yy}+a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=F(x,y)$$

אז

$$\sup_G u(x,y)\le\max_{\partial G}u(x,y)$$

משוואת הגלים

$$u_{tt}=u_{xx} \quad \text{נגדיר}$$

$$\xi = x+t$$

$$\eta = x-t$$

אז

$$u_{\xi\eta}=0$$

ולכן

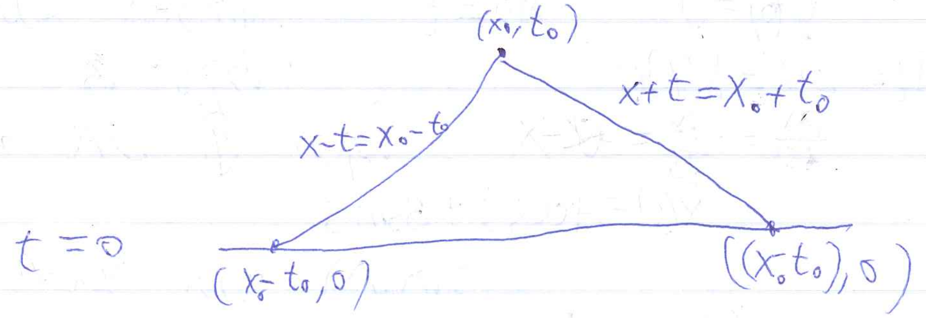
$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$$

ולכן

$$u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$$

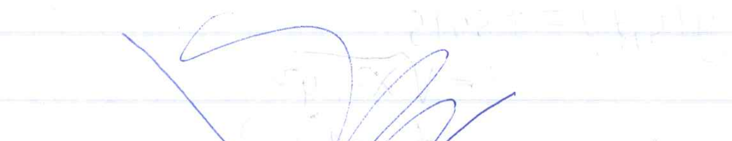
נתונים אם $u(x,0)=\alpha(x)$, $u_t(x,0)=\beta(x)$ אז

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\alpha(x+t)+\alpha(x-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\beta(\xi)\,d\xi$$



מסקנה $u(x_0,t_0)$ תלוי אך ורק ב $\alpha(x)$ ו $\beta(x)$ בקטע $[x_0-t_0,x_0+t_0]$ הקטע הנ"ל נקרא תחום התלות של (x_0,t_0)

הגדרה



המשולש ההפוך תחום ההשפעה של $(x_1,0)$
[illegible] נקרא [illegible] / \ [illegible]

דרך לפתרון $u_{tt}=u_{xx}$ $\quad u(x,0)=\alpha(x)$

$u_t(x,0)=\beta(x)$ נגדיר $w=u_t$ $\quad z=u_x$ אז

$$w_t=u_{tt}=u_{xx}=z_x$$

וגם

$$z_t=u_{xt}=u_{tx}=w_x$$

קיבלנו מערכת

$$w_t=z_x$$
$$z_t=w_x$$

נרשום בצורה קצרה

$$\begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w \\ z \end{pmatrix}_x$$

ונקבל גם

$$(w+z)_t=(w+z)_x$$
$$(w-z)_t=-(w-z)_x$$

אלו הן שני משוואות לינאריות מסדר ראשון

עם תנאי ההתחלה:

$$(w+z)_{t=0}=\beta(x)+\alpha'(x)$$
$$(w-z)_{t=0}=\beta(x)-\alpha'(x)$$

נפתור את

$$u_t=u_x$$

$$\frac{dt}{ds}=1 \quad \frac{dx}{ds}=1 \quad \frac{du}{ds}=1$$

ולכן

$$u=F(x+t)$$

וכך מסביר למה קראנו ל / ולפיכך

ומתקבל:

$$w(x,t)+z(x,t)=F(x+t)$$
$$w(x,t)-z(x,t)=g(x-t)$$

באופן כללי

$$\cancel{w(x,t) = f(x+t) + g(x-t)}$$ [illegible]

$$f(x) = \beta(x) + \alpha'(x)$$
$$g(x) = \beta(x) - \alpha'(x)$$
$$\cancel{w(x,t) = \ldots \tfrac{1}{2}}$$ [illegible]

$$W(x,t) = \tfrac{1}{2} f(x+t) + \tfrac{1}{2} g(x-t) =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left(\alpha'(x+t) - \alpha'(x-t)\right) + \tfrac{1}{2}\left[\beta(x+t) + \beta(x-t)\right]$$

לכן $\quad W = u_t$

$$u(x,t) = \int_0^t W(x,\tau)\, d\tau + u(x,0) =$$
$$= \alpha(x) + \tfrac{1}{2}\left[\int_0^t \alpha'(x+\tau)\,d\tau - \int_0^t \alpha'(x-\tau)\,d\tau + \int_0^t \beta(x+\tau)\,d\tau - \int_0^t \beta(x-\tau)\,d\tau\right] =$$
$$= \alpha(x) + \tfrac{1}{2}\left[\alpha(x+t) - \alpha(x) + \alpha(x-t) - \alpha(x) + \int_{x-t}^{x+t} \beta(\xi)\,d\xi\right] =$$
$$= \tfrac{1}{2}\left[\alpha(x+t) + \alpha(x-t) + \int_{x-t}^{x+t} \beta(\xi)\,d\xi\right.$$

[illegible] הנוסחה הקודמת.

<u>הגדרה</u>

[illegible] $\quad I(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(W^2(x,t) + z^2(x,t)\right) dx$

$W = u_t \quad z = u_x \quad$ כאשר $\quad I(t) = I(0) \quad$ <u>נראה</u>

<u>הוכחה</u>

$$\frac{dI}{dt} = \int_{-\infty}^{\infty} (2WW_t + 2zz_t)\,dx = 2\int_{-\infty}^{\infty} (Wz_x + zW_x)\,dx =$$

$$= 2\int_{-\infty}^{\infty} (Wz)_x\,dx = 2\left[\lim_{x\to\infty} (Wz)(x) - \lim_{x\to-\infty} (Wz)(x)\right] = 0$$

מ.ש.ל. $\quad W, z \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} 0 \quad$ כי [illegible]

לכן $\quad I(t) \quad$ פונקציה קבועה.

יחידות הפתרון של המערכת

$$W_t = Z_x$$
$$Z_t = W_x$$

כאשר $W(x,0)=\beta(x)$ $Z(x,0)=\varphi(x)$ הינו יחיד

הוכחה: נניח שקיימים שני פתרונות W_1, Z_1 ו $W_2 Z_2$

אז עם אותם תנאי התחלה. אז

W_1-W_2 ו Z_1-Z_2 פתרונות של המערכת המקיימים

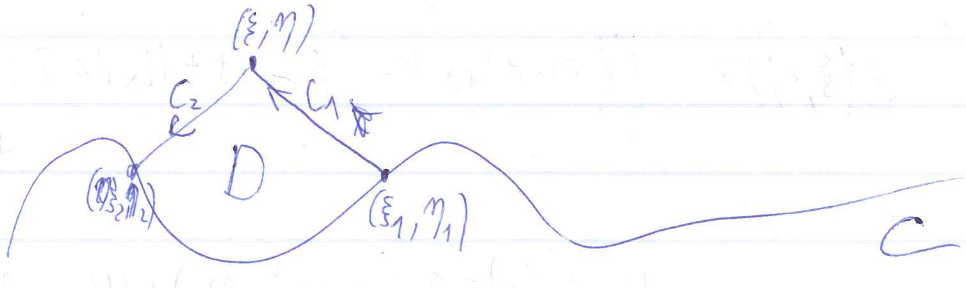
$$(W_1-W_2)(x,0)=0$$
$$(Z_1-Z_2)(x,0)=0$$

עבורם

$$I(t)=I(0)=\int_{-\infty}^{\infty} [\quad]^2+[\quad]^2\,dx=0$$

ולכן $W_1=W_2$ ו $Z_1=Z_2$

מקרה ב: $u_{tt}-u_{xx}=F(x,t)$ כאשר u_t ו u_x נתונים לאורך עקום C



כעת נוסחת גאוס:

$$\iint_D (a_x+b_y)\,dx\,dy=\oint_\Gamma (a\,dy+b\,dx)$$

נקח $a=-u_x$, $b=u_t$, $y=t$ ונקבל

$$\iint_D (-u_{xx}+u_{tt})\,dx\,dy=\oint_\Gamma (-u_x\,dt-u_t\,dx)$$

ולכן:

$$\iint_D F(x,t)\,dx\,dt=\int_{C_1}(-u_t dx-u_x dt)+\int_{C_2}(-u_t dx-u_x dt)+\int_C(-u_t dx-u_x dt)$$

האינטגרל על c ידוע כי C ותנאי ההתחלה ידועים. כעת

$$\int_{C_1}(-u_t dx-u_x dt)=$$

על C_1 $const = x+t$ ולכן $dx+dt=0$ ולכן $dx=-dt$

$$=\int_{C_1}(u_t dt+u_x dx)=\int_{C_1}du=u(\xi,\eta)-u(\xi_1,\eta_1)$$

באותו אופן

$$\int_{C_2}(-u_t dx-u_x dt)=-u(\xi_2,\eta_2)+u(\xi,\eta)$$

ולכן

$$\cancel{u(\xi,\eta)}\quad \iint_D F(x,t)\,dx\,dt=\int_C u_t dt+u_x dx+u(\xi_2,\eta_2)-u(\xi_1,\eta_1)+2u(\xi,\eta)$$

ולכן

$$u(\xi,\eta)=\frac{1}{2}\left[u(\xi_1,\eta_1)+u(\xi_2,\eta_2)\right]+$$

$$\frac{1}{2}\iint_D F(x,t)\,dx\,dt+\frac{1}{2}\int_C u_t dx+u_x dt$$

נתונה $u_{tt}=u_{xx}$, $u(x,0)=\alpha(x)$ $u_t(x,0)=\beta(x)$

בקטע $a\leq x\leq b$ ונתון גם u או u_x על

$x=a$, ו/או על $x=b$

נגדיר $m=u_t+u_x$, $n=u_t-u_x$ אז

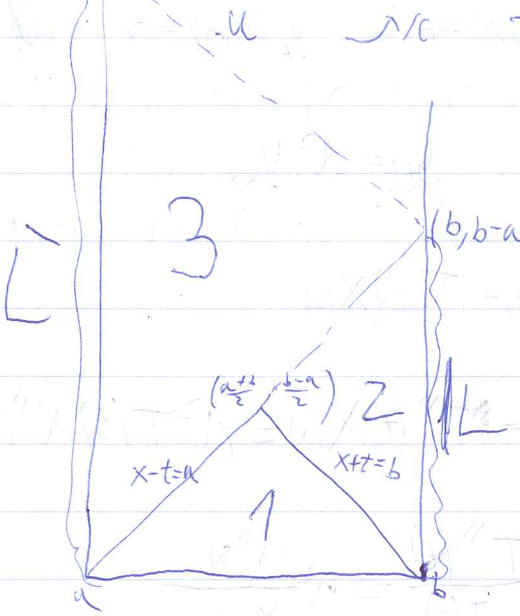
ולכן $m_t=m_x$ ו $n_t=-n_x$ ולכן

נניח מערכת משוואות לינאריות מסדר ראשון
שפתרונה כללית הוא

$m=f(x+t)$

$n=g(x-t)$

ומכאן אפשר לחשב את u.



בתוך המשולש 1 לבד. במשולש 2 אפשר למצוא את n.

על הקטע L נתון או u (ואז גם u_t) או u_x,
ואז נתן לחשב עליו את m. ולכן אפשר למצוא
את m גם ב-3, על $\tilde{L}$ נתון u_t או u_x, ולכן
נתן למצוא גם את n, וכן הלאה.

<u>משפט</u> נתונה המשוואה $u_{tt}=u_{xx}$ עם התנאים

$$u(x,0)=\alpha(x) \qquad a\le x\le b$$
$$u_t(x,0)=\beta(x)$$

וכן

$$Au(a,t)+Bu_x(a,t)=f(t)$$

וגם

$$Cu(b,t)+Du_x(b,t)=g(t)$$

כאשר $A\neq -B$ ו- $C\neq D$ אז הפתרון קיים ויחיד.

<u>הוכחה</u> נגדיר $m=u_t+u_x$ $n=u_t-u_x$ שמקיים

$m_t=m_x$, $n_t=-n_x$ על הישר L $m=\gamma n+\delta g$

כאמור לא קבועים הגבולים ל C,D דווקא
אלא ממשיכים.

<u>דוגמא 4</u>

נתון מיתר ... התחלתית

$y(0,t)=0$, $y(x,0)=f(x)$, $y_t(x,0)=0$, $y(c,t)=0$

המשוואה ... מקיימת נגזר

$$y_{tt}=a^2y_{xx}$$

נעשה הפרדת משתנים: ננסה

$$y=T(t)X(x)$$

אז

$$y_{tt}=T''(t)X(x)=a^2T(t)X''(x)$$

כלומר

$$\frac{T''(t)}{T(t)}=a^2\frac{X''(x)}{X(x)}$$

נניח $a^2=1$. כרגע, צד ימין תלוי רק ב x וצד שמאל רק ב t
ולכן

$$T''(t)/T(t)=X''(x)/X(x)=-\lambda$$

מתנאי ההתחלה

$$X(0)=X(c)=0$$

נקבל

$$X''+\lambda X=0$$

ולכן

$$X(x)=A\cos\sqrt{\lambda}x+B\sin\sqrt{\lambda}x$$

כעת $X(0)=0$ ולכן $A=0$, $X(c)=0$ ולכן צריך
להיות $\sin\sqrt{\lambda}c=0$ כלומר $\sqrt{\lambda}c=n\pi$ ולכן
$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{c^2}$, וזה ... פתרונות רלוונטיים

$$X_n(x)=B_n\sin\frac{n\pi x}{c}$$

נקבל גם

$$T''(t)+\frac{n^2\pi^2}{c^2}T(t)=0$$

ולכן

$$T(t)=C_n\sin\frac{n\pi t}{c}+D_n\cos\frac{n\pi t}{c}$$

~~משוואת הגל: בעין $u(x,0)=\alpha(x)$ $u_t(x,0)=\beta(x)$~~
~~$\alpha,\beta\in L^2$~~

הלמה לבעיה I: $u_{tt}=u_{xx}$ עם תנאי ההתחלה $u(x,0)=\alpha(x)$

$a\le x\le b$, $u_t(x,0)=\beta(x)$ ונתון $u(a,t)$ או $u_x(a,t)$

וכן $u(b,t)$ או $u_x(b,t)$

טענה: הפתרון לבעיה I יחיד אם קיים:

הוכחה: צריך להוכיח שאם $W_{tt}=W_{xx}$ וכן $W(x,0)=0=W_t(x,0)$

וכן $W_x(a,t)=0$ או $W(a,t)=0$ וכן

$W(b,t)=0$ או $W_x(b,t)=0$ אז $W\equiv 0$. נגדיר:

$$I(t)=\int_a^b (W_x^2+W_t^2)\,dx$$

אז $I(0)=0$ ומתקיים:

$$\frac{dI}{dt}=\int_a^b(2W_xW_{xt}+2W_tW_{tt})\,dx=2\int_a^b(W_xW_{xt}+W_tW_{xx})\,dx=$$

$$=2\int_a^b(W_xW_t)_x\,dx=2\left[W_x(b,t)\cdot W_t(b,t)-W_x(a,t)\cdot W_t(a,t)\right]\overset{\text{מהנתונים}}{=}0$$

ולכן נקבל $I\equiv 0$ ולכן $W_t\equiv W_x\equiv 0$, ולכן $W(x,t)=C$ אבל

$W(x,0)=0$ ולכן $W\equiv 0$

מ.ש.ל.

טענה: $u_{tt}=u_{xx}$ אמ"מ לכל k,h

$$u(x+k,t+h)+u(x-k,t-h)=u(x+h,t+k)+u(x-h,t-k)$$

הוכחה: כי $u(x,t)=f(x+t)+g(x-t)$. כדי נגזור נקח $k=0$

ו $h\to 0$

טענה: תהי $f\in C^2$ ויהיו A_n מקדמי פורייה (sin) שלה. אז

קיים $K>0$ כך ש $n^2|A_n|\le K$ לכל n טבעי עם

$0=f(0)=f(c)$

$$\frac{c}{2}A_n = \int_0^c f(x)\sin x\,dx = \frac{-c}{n\pi}\cos\frac{2\pi x}{c}\Big|_0^c + \frac{c}{n\pi}\int_0^c f'(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx = \underline{\text{הוכחה}}$$

וכן $f(0)=f(c)=0$ כי $0=$ האיבר ואז

$$\frac{n\pi}{2}A_n = \int_0^c f'(x)\cos\frac{n\pi x}{c}dx = \frac{c}{n\pi}f'(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\Big|_0^c - \frac{c}{n\pi}\int_0^c f''(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx$$

$$\frac{n^2\pi^2}{2c}A_n = -\int_0^c f''(x)\sin\frac{n\pi x}{c}dx \qquad \text{וכן}$$

$$n^2|A_n| \le \frac{2c}{\pi^2}\int_0^c |f''(x)|\,dx \le \frac{2c^2}{\pi^2}\|f''\|_\infty \qquad \text{וכן}$$

מ.ש.ל

בנוסף $y_t = T'(t)X(x)$ ונדרש $y_t(x,0)=0$ ולכן

$$0 = T'(0)X(x)$$

לכל x, ולכן $T'(0)=0$ ולכן $C_n=0$. בנוסף לכן

$$y(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{c}\cos\frac{n\pi t}{c}$$

אז הוכח מצאנו את $y(x,t)$ פתרון $y(0,t)=y(c,t)=0$, $y_t(x,0)=0$
צריך לקיים $y(x,0)=F(x)$.

$$y(x,0)=F(x)=\sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin\frac{n\pi x}{c}$$

ולכן

$$A_n=\frac{2}{c}\int_0^c F(x)\sin\frac{n\pi x}{c}\,dx$$

יהי $g(x,y,z)=0$ משטח חלק שסומן ב S אזי

$$\oiint_S F(x,y,z)\,ds \triangleq \iint_A F(x,y,z(x,y))\frac{\sqrt{g_x^2+g_y^2+g_z^2}}{g_z}\,dA$$

משפט הדיברגנץ:

$$\oiint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,ds=\iiint \nabla\cdot\vec{F}\,dV$$

במפורש

$$\oiint_S (F_1n_1+F_2n_2+F_3n_3)\,ds=\iiint\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)dV$$

קואורדינטות כדוריות: V כדור ברדיוס R אזי

$$\iiint_V F\,dV = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F\rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho$$

כאשר

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi$$
$$y = \rho\sin\theta\sin\varphi$$
$$z = \rho\cos\varphi$$

משוואת הגלים ב3 ממדים:

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$$

כאשר נתון

$$u(x,y,z,0) = F(x,y,z)$$
$$u_t(x,y,z,0) = g(x,y,z)$$

נחפש את הפתרון לנקודה $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. נגדיר

$$I(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|P-P_0|^2 = r^2} u(x,y,z,t)\,ds$$

נקבל

$$I(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|P-P_0|^2 = r^2} F(x,y,z)\,ds \triangleq F(r)$$

$$I_t(r,0) = \frac{1}{4\pi r^2} \oint_{|P-P_0|^2 = r^2} g(x,y,z)\,ds \triangleq G(r)$$

מיד: $\lim_{r\to 0} I(r,t) = u(x_0, y_0, z_0, t)$ משפט

שני

$$I(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|P-P_0|^2 = r^2} u(P,t)\, r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

נגדיר $\xi = P - P_0/r$. אזי $|\xi| = 1$, והוא וקטור כיוון הנורמל. ולכן

$$= \frac{1}{4\pi} \iint_{|\xi|=1} u(P_0 + r\xi, t) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

כעת

$$u(P_0 + r\xi, t) = u(x_0 + r\xi_1, y_0 + r\xi_2, z_0 + r\xi_3, t)$$

נקבל

$$\frac{\partial I}{\partial r} = \frac{1}{4\pi} \iint_{|\xi|=1} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\xi_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\xi_3\right] \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|P-P_0|^2 = r^2} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\xi_1 + \frac{\partial u}{\partial y}\xi_2 + \frac{\partial u}{\partial z}\xi_3\right] r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

$$\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} \end{pmatrix}, \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$ נסמן

גאוס

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|P-P_0|=r} \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds = \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{|P-P_0| \le r} \nabla \vec{F} \, dV =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \iiint_{|P-P_0| \le r} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta \, d\rho =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r \rho^2 \, d\rho \iint_{|P-P_0|=\rho} (u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta =$$

$$= \frac{1}{4\pi r^2} \int_0^r d\rho \iint_{|P-P_0|=\rho} u_{tt} \rho^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$

$$(\partial/\partial r)\left(r^2 \partial I/\partial r\right) = \frac{1}{4\pi} \iint_{|P-P_0|=r} u_{tt} r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$ כעת

$$\left(\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}\right) = \frac{1}{4\pi r^2} \iint_{|P-P_0|=r} u_{tt}(P,t) r^2 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta$$ וכן

ולכן

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial I}{\partial r}\right)=r^2\frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

כלומר

$$(r^2I_r)_r=r^2I_{tt}$$

מקבל $r^2I_{rr}+2rI_r=r^2I_{tt}$ או $rI_{rr}+2I_r=rI_{tt}$

נשתמש בזהות הנזכרה: לכן $(rI)_{rr}=2I_r+rI_{rr}$ נקבל

$$(rI)_{rr}=(rI)_{tt}$$

נגדיר $J=rI$ אזי J מקיים את משוואת הגלים

במימד אחד יחיד

$$I(r,0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{|P-P_0|^2=r^2}F(P)\,ds=F(r)$$
$$I_t(r,0)=\frac{1}{4\pi r^2}\iint_{|P-P_0|^2=r^2}g(P)\,ds=G(r)$$

F,G מוגדרות גם עבור $r<0$. ולכן

$$J(r,0)=rF(r)$$
$$J_t(r,0)=rG(r)$$

ו J מקיימת את משוואת הגלים במימד אחד.

ולכן

$$J(r,t)=\frac{1}{2}\left[(r+t)F(r+t)+(r-t)F(r-t)\right]+\frac{1}{2}\int_{r-t}^{r+t}\xi G(\xi)\,d\xi=$$

F זוגית

$$=\frac{1}{2}\left[(t+r)F(t+r)-(t-r)F(t-r)\right]+\frac{1}{2}\int_{t-r}\eta G(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(t+r)F(t+r)-(t-r)F(t-r)\right]+\frac{1}{2}\int_{-t-r}^{t-r}\eta G(\eta)\,d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(t+r)\ \ldots\ \right]+\frac{1}{2}\int_{t-r}^{t+r}\eta G(\eta)\,d\eta$$

$$I(r,t)=\frac{(t+r)F(t+r)-(t-r)F(t-r)}{2r}+\frac{1}{2r}\int_{t-r}^{t+r}\eta G(\eta)\,d\eta \xrightarrow{\text{ולכן}} tF'(t)+tG(t)+F(t)$$

ולכן

$$u(P_0,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(t\frac{1}{4\pi t^2}\iint_{|P-P_0|=t}F(P)\,ds\right)+t\frac{1}{4\pi t^2}\iint_{|P-P_0|=t}G(P)\,ds=\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{4\pi t}\iint_{|P-P_0|=t}F(P)\,ds+\frac{1}{4\pi t}\iint_{|P-P_0|=t}G(P)\,ds$$

דגשים לבחינה 3 מתוך 4 שאלות. פרקים:
משוואות מסדר ראשון, לפלס, גלים, חום.
כל שאלה מחולקת לשני סעיפים: תיאוריה ובעיה.
משוואת הגלים בשני ממדים:

(1) $V_{tt}=V_{xx}+V_{yy}$ מחפשים פתרון בצורה $V(x,y,t)$
נתונים תנאי ההתחלה

$$V(x,y,0)=F(x,y)$$
$$V_t(x,y,0)=g(x,y)$$

V פונקציה של שני משתנים, אך נסתכל עליה כפונקציה של 3 משתנים. נגדיר
$U(x,y,z,t)=V(x,y,t)$ ואז U לא תלוי ב-z ומקיים

$$U_{tt}=U_{xx}+U_{yy}+U_{zz}$$

ולכן U מקיים את משוואת הגלים בתלת מימד, והפתרון ידוע. נקבל

$$V(x,y,t)=U(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\iint_{|r_1-r|=t}F(x_1,y_1)\,ds+\frac{1}{4\pi t}\iint_{|r_1-r|=t}g(x_1,y_1)\,ds$$

כיוון שלא תלוי ב-z נבחר למשל $z=0$. נבצע את האינטגרל המשטחי. נטיל את הכדור על מישור (x,y);
הכדור נתון ע"י $F(x,y,z)=0$

$$0=F(x_1,y_1,z_1)=(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z_1^2-t^2$$

נטיל את חצי הכדור העליון על (x,y) ונכפיל בשתיים את התוצאה. כך נקבל

$$\iint_{\text{משטח כדור ברדיוס } t}\text{משהו}=2\iint_{\text{עיגול ברדיוס } t}\text{משהו}\cdot\left(\frac{\sqrt{F_{z_1}^2+F_{x_1}^2+F_{y_1}^2}}{F_{z_1}}\right)dxdy=$$

מרכז הכדור בנקודה $(x,y,0)$, משתני האינטגרציה הם x_1,y_1,z_1 ולכן

$$= 2\iint_{\text{עיגול רדיוס } t} (\text{משהו}) \frac{2\sqrt{(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+z_1^2}}{2z_1}\,dx\,dy = 2\iint_{\text{עיגול } t} (\text{משהו}) \frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dx\,dy$$

כאשר $r^2 = (x_1-x)^2+(y_1-y)^2$

כלומר

$$V(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\iint_{r\le t} f(x_1,y_1)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dx_1dy_1 +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\frac{1}{t}\iint_{r\le t}\frac{g(x_1,y_1)\,t}{\sqrt{t^2-r^2}}\,dx_1dy_1$$

ולכן הפתרון $V(x,y,t)$ תלוי בכל הערכים בתוך עיגול רדיוס t סביב (x,y). לעומת זאת [illegible] בחוק שבו ה [illegible] הוא משנה לגמרי.

עקרון דוהמל: $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}$. ~~[illegible]~~ נתון עם תנאי התחלה $u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)$ ו- $u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$. היא נוכל לפתור עבור $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+F(x,y,z,t)$.

דוגמא: ① מד"ר. $dy/dt=\alpha y+F(t)$, $y(t=0)=y_0$ ההומוגנית $\frac{dy}{dt}=\alpha y$ פתרון $y(t)=y_0e^{\alpha t}=e^{\alpha t}y_0$ (קרי $e^{\alpha t}$)

נפתור את הפתרון ונסמנו ב- $S(t)$ המשוואה הלא הומוגנית

$$\frac{dy}{dt}-\alpha y = F(t)$$

נכפיל ב- $e^{-\alpha t}$ ונקבל

$$e^{-\alpha t}\frac{dy}{dt}-\alpha e^{-\alpha t}y=e^{-\alpha t}F(t)$$

כלומר

$$\frac{d}{dt}\left(e^{-\alpha t}y\right)=e^{-\alpha t}F(t)$$

כלומר

$$e^{-\alpha t}y(t)-e^{-\alpha\cdot 0}y(0)=\int_0^t e^{-\alpha\tau}F(\tau)\,d\tau$$

ולכן הפתרון

$$y(t)=e^{\alpha t}y_0+\int_0^t e^{\alpha(t-\tau)}F(\tau)\,d\tau$$

כלומר $y(t)=s(t)y_0+\int_0^t s(t-\tau)F(\tau)d\tau$ ולכן הפתרון $y(t)$ מתקבל ע"י אופרטור הפתרון של ההומוגנית. נבדוק שזה הפתרון:

$$\frac{dy}{dt}=e^{\alpha t}\alpha y_0+s(0)F(t)+\int_0^t \alpha e^{\alpha(t-\tau)}F(\tau)d\tau=$$

$$=\alpha\left(s(t)y_0+\int_0^t s(t-\tau)F(\tau)d\tau\right)+F(t)=$$

$$=\alpha y+F(t)$$

<u>טענה</u> נתונה המשוואה ① $u_t=Lu$ כאשר L אופרטור ליניארי לא תלוי בt ונתון ② $u(t=0)=u_0$ ③ $u(t)=s(t)u_0$ אזי הפתרון של המשוואה ④ $u_t=Lu+F(t)$ נתון ע"י

⑤ $$u(t)=s(t)u_0+\int_0^t s(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

<u>הוכחה</u> ניקח ③ < $t=0$:

$$u(0)=s(0)u_0\overset{(2)}{=}u_0$$

מתקיים זה נכון לכל u_0 ולכן $s(0)=I$ אופרטור היחידה.

נגזור את ⑤ לפי t:

$$u_t=s_tu_0+\int_0^t s_t(t-\tau)F(\tau)d\tau+s(0)F(t)$$

<u>נראה</u> $s_t=Ls$: נגזור את ③ לפי t:

$$Ls(t)u_0\overset{(3)}{=}Lu=u_t\overset{(1)}{=}s_t(t)u_0$$

ולכן $s_t=Ls$

נציב חזרה

$$u_t=Ls(t)u_0+\int_0^t Ls(t-\tau)F(\tau)d\tau+F(t)=$$

$$=L\left[s(t)u_0+\int_0^t s(t-\tau)F(\tau)d\tau\right]+F(t)$$ L לא תלוי בt

ולכן $u_t=Lu+F(t)$ כלומר ה-u שקיבלנו הוא פתרון.

מ.ש.ל.

יהי M אופרטור ליניארי לא תלוי בt, ותהיה המשוואה $V_{tt}=MV$, $V(0)=V_0$, $V_t(0)=V_1$ ונתון הפתרון כך:

$$V(t)=S_1(t)V_0+S_2(t)V_1$$

$$V_t(t)=S_3(t)V_0+S_4(t)V_1$$

דוגמא $u_{tt}=u_{xx}$ עם $u(x,0)=\alpha(x)$ $u_t(x,0)=\beta(x)$ אז

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left\{\underline{\alpha(x+t)+\alpha(x-t)}+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}\beta(\xi)d\xi\right\}$$

צריך לפתור $V_{tt}=MV+F$ עם 2 תנאי התחלה.

פתרון: נגדיר $U=\begin{pmatrix}V\\V_t\end{pmatrix}$ אז $U_t=\begin{pmatrix}V_t\\V_{tt}\end{pmatrix}$ ונקבל

$$U_t=\begin{pmatrix}V_t\\V_{tt}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}V_t\\MV+F\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&I\\M&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V\\V_t\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\F\end{pmatrix}$$

נקבל $L=\begin{pmatrix}0&I\\M&0\end{pmatrix}$, $F=\begin{pmatrix}0\\F\end{pmatrix}$, $U_t=LU+F$ וידוע

$$U(t)=\begin{pmatrix}V\\V_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_0\\V_1\end{pmatrix}\triangleq SU_0$$

ופתרון לפי עקרון דוהמל

$$U(t)=S(t)U_0+\int_0^t S(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

כלומר

$$\begin{pmatrix}V\\V_t\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1&S_2\\S_3&S_4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_0\\V_1\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}S_1(t-\tau)&S_2(t-\tau)\\S_3(t-\tau)&S_4(t-\tau)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\F(\tau)\end{pmatrix}d\tau$$

ולכן הפתרון הוא

$$V(t)=S_1(t)V_0+S_2(t)V_1+\int_0^t S_2(t-\tau)F(\tau)d\tau.$$

תרגיל

נפתור $u_{tt}=u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}+W(x,y,z,t)$

$u(x,y,z,0)=f(x,y,z)$

$u_t(x,y,z,0)=g(x,y,z)$

פתרון: פתרון ההומוגנית:

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{t}\iint_{|\vec{r}_1-\vec{r}|=t}f(\vec{r}_1)dS+\frac{1}{4\pi t}\iint_{|\vec{r}_1-\vec{r}|=t}g(\vec{r}_1)dS=S_1f+S_2g$$

נפתור את הלא הומוגנית לפי עקרון דוהמל

$$s_2(t-\tau)w(\tau)=\frac{1}{4\pi(t-\tau)}\iint_{|r_1-r|=t-\tau} w(\vec{r}_1,\tau)\,ds$$

ולכן

$$\int_0^t s_2(t-\tau)\,w(\tau)\,d\tau=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\frac{1}{t-\tau}\iint_{|r_1-r|=t-\tau} w(\vec{r}_1,\tau)\,ds\,d\tau=$$

$$=\frac{1}{4\pi}\int_0^t\iint_{|\vec{r}_1-\vec{r}|=\xi}\frac{w(\vec{r}_1,t-\xi)}{\xi}\,ds$$

וזו התוספת שצריך להוסיף לפתרון ההומוגני כדי לקבל את הפתרון הדרוש הכללי.

<u>תרגיל</u>: הוכח את עקרון דוהמל על משוואות הגלים 1 ממד

<u>לא לבחינה</u>: <u>דוגמא</u>: נתונה המשוואה $u_{yy}+u_{xx}=0$, $u(x,0)=f(x)$, $u_y(x,0)=g(x)$, $-\infty<x<\infty$. צ"ל: את u לבדוק

$$u(x,y)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(y)e^{inx}$$

אם u רציפה אז $a_n(y)\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ונקבל מהצבה במשוואה

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n''(y)e^{inx}-\sum_{n=-\infty}^{\infty}n^2a_n(y)e^{inx}=0$$

כלומר

$$a_n''(y)-n^2a_n(y)=0$$

ולכן

$$a_n=c_1e^{ny}+c_2e^{-ny}$$

נצטרך לקשר את התנאים הנתונים. לבחינה:

עמוד זה נוצל. הסמך הקודם:

משוואות החום: ~~[illegible]~~

סעיף ג: מציינים כי $u_t = u_{xx}$ נקראת משוואת הדיפוזיה.

בעיה I: יהי Ω התחום $0 \le x \le l$, $0 \le t \le T$ נחפש $u(x,t)$ כך ש

$$u_t = u_{xx} \quad (1)$$

$$u(x,0) = \phi(x) \quad (2)$$

$$u(0,t) = F_1(t) \quad (3')$$

$$u(l,t) = F_2(t) \quad (3'')$$

משפט: הפתרון של בעיה I הוא יחיד.

הוכחה: נניח שיש שני פתרונות u,v של I, נגדיר $w = u - v$ ואז:

$$w_t = w_{xx} \quad (1)$$

$$w(x,0) = 0 \quad (2)$$

$$w(0,t) = w(l,t) = 0 \quad (3)$$

אזי

$$\# = \int_0^l w(x,t)\, w_t(x,t)\,dx = \int_0^l w(x,t)\, w_{xx}(x,t)\,dx = *$$

בצד שמאל שווה ל

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l w^2(x,t)\,dx = \#$$

אבל

$$* = w(x,t)\,w_x(x,t)\Big|_0^l - \int_0^l w_x^2(x,t)\,dx = -\int_0^l w_x^2(x,t)\,dx$$

ולכן

$$\frac{d}{dt}\int_0^l w^2(x,t)\,dx = -2\int_0^l w_x^2(x,t)\,dx \le 0$$

ולכן $\int_0^l w^2(x,t)\,dx$ פונקציה יורדת ולכן

$$0 \le \int_0^l w^2(x,t) \le \int_0^l w^2(x,0)\,dx = 0$$

ולכן $w(x,t) = 0$ בזהות.

מ.ש.ל.

משפט המקסימום: תהי u פתרון של בעיה I. נגדיר

$m=\max\left(\max\phi(x),\max f_1(t),\max f_2(t)\right)$ אזי $u(x,t)\le m$

לכל $0\le x\le l$, $0\le t\le T$

הוכחה: נניח בשלילה שקיימת נקודה (x_0,t_0) כך ש $0<x_0<l$

$0<t_0<T$ כך ש $u(x_0,t_0)=M>m$. נגדיר

$$V(x,t)=u(x,t)+\frac{M-m}{4l^2}(x-x_0)^2$$

על השפה

$$V(x,t)\le m+\frac{M-m}{4}<M$$

מצד שני

$$V(x_0,t_0)=u(x_0,t_0)=M$$

ולכן המקסימום של V אינו על השפה. תהי (x_1,t_1) נקודת המקסימום של V. אזי $0<x_1<l$, $0<t_1\le T$.

אז מתבוננים בנגזרות בתחום, נקבל

$$\frac{\partial V}{\partial t}(x_1,t_1)\ge 0$$

וכן

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x_1,t_1)\le 0$$

ולכן

$$0\le\left(\frac{\partial V}{\partial t}-\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right)(x_1,t_1)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{M-m}{2l^2}\right)(x_1,t_1)=$$

$$=-\frac{M-m}{2l^2}<0$$

סתירה.

מ.ש.ל.

בעיה: מערכת חום בתיל. 0 ——תיל—— L קצות ציר:
התיל מוחזק בקבוע. קצה 0 בטמפ' T_1, קצה L
בטמפ' T_2, ונתון הטמפ' ההתחלתית $T(x,0)=F(x)$
כיצד משתנה הטמפ' עם הזמן?

$T(x,t)$: הטמפ' בנקודה x בזמן t. מפיסיקה

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

ידוע $T(x,0)=f(x)$ $T(0,t)=T_1$ $T(L,t)=T_2$.

ננסה לפתור בהפרדת משתנים, אך קודם נמצא משתנה חדש שעבורו תנאי השפה יהיו הומוגניים. נגדיר

$$u = T - \left[T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}\right]$$

$$u_t = T_t = \alpha^2 T_{xx} = \alpha^2 u_{xx}$$

כלומר

$$u_t = \alpha^2 u_{xx}$$

$$u(x,0) = f(x) - \left[T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}\right]$$

$$u(0,t) = T_1 - (T_1 + 0) = 0$$

$$u(L,t) = T_2 - [T_1 + T_2 - T_1] = 0$$

נפתור עבור u בהפרדת משתנים.

$$u = X(x)T(t)$$

אז

$$u_t = XT' = \alpha^2 u_{xx} = \alpha^2 X'' T(t)$$

נקבל

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{\alpha^2 T} = -\lambda$$

λ לא תלוי ב x,t ומתקיים גם

$$X(0) = X(L) = 0$$

ולכן

$$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

$$X(0)=0 \Rightarrow A=0 \quad X(L)=0 \Rightarrow B\sin\sqrt{\lambda}L = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda}L = n\pi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

$$\frac{T'}{T} = -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2}$$

$$I = e^{[\ \ ]} = \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right]$$

ולכן

ולכן פתרון ל u הוא

$$u(x,t) = B_n \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) e^{-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t}$$

ולכן

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L} x \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right]$$

$$\underline{u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{L} x} = f(x) - \left(T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}\right)$$

דרך אלטרנטיבית:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

לכן

$$u_t = \sum_{n=1}^{\infty} \dot{K}_n(t) \sin\frac{n\pi}{L} x$$

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(t) \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 \sin\frac{n\pi}{L} x$$

שיוויון מקדמים איבר איבר.

$$\dot{K}_n = -\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} K_n$$

ולכן

$$\underline{K_n = B_n \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right]}$$

לכן

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \sin\frac{n\pi x}{L} dx + \frac{2}{n\pi}\left[T_2 \cos n\pi - T_1\right]$$

וקבלנו פתרון כללי

$$T(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi x}{L} \exp\left[-\frac{\alpha^2 n^2 \pi^2}{L^2} t\right] + T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L}$$

פתרון אחר זמן ארוך:

$$\lim_{t \to \infty} T(x,t) = T_1 + (T_2 - T_1)\frac{x}{L} = T_S(x)$$

① $T_s(x)$ פתרון של $\frac{\partial T}{\partial t}=\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$

② $T_s(0)=T_1$ $T_s(L)=T_2$ ולכן T_s עצמו הוא פתרון של משוואות החום. לכל תנאי התחלתי נגיע לבסוף למצב זה, ולכן T_s נקרא המצב התמידי

<u>סעיף ג</u>: <u>בעיה II</u>: $u_t=u_{xx}$, $-\infty<x<\infty$, $u(x,0)=\phi(x)$
$\phi(x)\in C^1$, $\int_{-\infty}^{\infty}|\phi|dx<\infty$ (תנאי התחלה סגור).

<u>פתרון</u>: ננסה הפרדת משתנים:

$$u=X(x)T(t)$$

ואז

$$\frac{X''}{X}=\frac{T'}{T}=-\beta^2$$

[במקרה של: אחרת $X=Ae^{\beta x}+Be^{-\beta x}$ ואז גדול ב$\pm\infty$].

ואז

$$X(x)=e^{\pm i\beta x}$$

$$T(t)=e^{-\beta^2 t}$$

הפתרון הוא לכל β. ולכן נעשה אינטגרציה על β. ונקבל פתרון

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)e^{i\beta x}e^{-\beta^2 t}d\beta$$

<u>משפט</u> (ללא הוכחה): תהי $f\in C^1$, $\int_{-\infty}^{\infty}|f|dx<\infty$ אזי

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(\beta)e^{i\beta x}d\beta$$

כאשר

$$g(\beta)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i\beta x}dx$$

<u>משפט</u> תהי $u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)e^{i\beta x-\beta^2 t}d\beta$ כאשר $A(\beta)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\eta)e^{-i\beta\eta}d\eta$ אזי $u(x,t)$ פתרון של II.

הוכחה: 1

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)e^{i\beta x}d\beta=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)\sqrt{2\pi}\,e^{i\beta x}d\beta =$$

לפי התמרת פוריה ההפוכה

$$A(\beta)\sqrt{2\pi}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\eta)e^{-i\beta\eta}d\eta$$

ולכן לפי המשפט הקודם

$$=\phi(x)$$

2

$$|u(x,t)|\le\int_{-\infty}^{\infty}|A(\beta)|e^{-\beta^2 t}d\beta\le\int_{-\infty}^{\infty}|A(\beta)|d\beta$$

שאינו תלוי ב x,t ולכן את u מותר לגזור מתחת לאינטגרל. ולכן

$$u_t=\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)(-\beta^2)e^{i\beta x-\beta^2 t}d\beta$$

$$u_{xx}=\int_{-\infty}^{\infty}A(\beta)(-\beta^2)e^{i\beta x-\beta^2 t}d\beta$$

ולכן $u_t=u_{xx}$

מ.ש.ל.

משפט: הפתרון לבעיה II נתון ע"י

$$u(x,t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-\frac{(x-\eta)^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\phi(\eta)d\eta$$

הוכחת משפט 2

$$u(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-i\beta\xi}e^{i\beta x}e^{-\beta^2 t}d\xi d\beta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\beta(x-\xi)-\beta^2 t}d\beta d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\alpha^2 t}d\alpha\right]d\xi=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\xi)}{\sqrt{t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4t}}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\gamma^2}d\gamma\right]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\xi)}{\sqrt{t}}e^{-(x-\xi)^2/4t}\sqrt{\pi}\,d\xi=\text{מ.ש.ל}$$

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>

$$K(x-\xi,t)=\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right]$$

<u>מקיים</u> לכל $t>0$ וגם $\quad K_t=K_{xx}$

<u>מקיים</u> לכל $x-\xi\neq 0$ $\quad K(x-\xi,0)=0$

<u>מקיים</u> $\quad \int_{-\infty}^{\infty}K(x-\xi,0)\,\phi(\xi)\,d\xi=\phi(x)$

<u>יחידות</u> פתרון בעיה II יהיו $\quad 0=\lim_{x\to\pm\infty}u(x,t)$

<u>הוכחה</u> אם אזי $W_t=W_{xx}$ ו- $W(x,0)=0$

נניח $W\not\equiv 0$ ו- $\lim_{|x|\to\infty}W(x,t)=0$ אזי $W\equiv 0$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}W^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}WW_t\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}WW_{xx}\,dx=$$

$$=WW_x\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty}W_x^2\,dx=0-\int_{-\infty}^{\infty}W_x^2\,dx\leq 0$$

ולכן $\int_{-\infty}^{\infty}W^2dx$ יורדת כפונקציה של t, אבל
אי-שלילית וערכה קבוע היה 0. ולכן היא זהותית
0 ולכן $W\equiv 0$

מ.ש.ל.

<u>משוואת לפלס בטבעת:</u>

קואורדינטות קוטביות

$$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\theta\theta}=0$$ כלומר $0=\rho^2u_{\rho\rho}+\rho u_\rho+u_{\theta\theta}$

הפרדת משתנים לפתרון $R(\rho)\Psi(\theta)$

$$\frac{\rho^2R''+\rho R'}{R}=-\frac{\Psi''(\theta)}{\Psi(\theta)}=n^2$$

ולכן

$$\Psi(\theta) = A\cos n\theta + B\sin n\theta$$

וכן ממשוואת אוילר

$$R = C\rho^{n} + D\rho^{-n} \qquad n>0$$

ועבור $n=0$ מקבלים

$$R = a_0 + b_0\ln\rho$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$u(\rho,\theta) = (a_0 + b_0\ln\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\rho^{n} + b_n\rho^{-n})(c_n\cos n\theta + d_n\sin n\theta)$$

נכפיל בשני האגפים ב $\cos\theta$ וכו $\int_a^b$

ואז נציב $\rho=\rho_1,\rho_2$ ונקבל:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho_1,\theta)\cos n\theta\, d\theta = (a_n\rho_1^{n} + b_n\rho_1^{-n})c_n$$

ו

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho_2,\theta)\cos n\theta\, d\theta = (a_n\rho_2^{n} + b_n\rho_2^{-n})$$

בצורה דומה נקבל שתי משוואות ל a_n d_n. כמו כן

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho_1,\theta)\, d\theta = a_0 + b_0\ln\rho_1$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(\rho_2,\theta)\, d\theta = a_0 + b_0\ln\rho_2$$

ואפשר לחלץ את a_i, b_i, c_i, d_i

5/12/84
סיכום למד"ח
דף 1.

הגדרה מד"ח היא קשר מהצורה $F(x,y,\dots,u,u_x,\dots)=0$

פתרון זה קשר מהצורה $\phi(x,y,\dots,u)=0$

הגדרה תהי $u(x,y)$ ויהי $\vec{\alpha}=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{pmatrix}$ אזי הנגזרת של u בכיוון α: $\frac{\partial u}{\partial \alpha} \triangleq \alpha\cdot\nabla u$

הגדרה המשוואה $a(x,y)u_x+b(x,y)u_y=c(x,y)u+d(x,y)$ נקראת מד"ח מסדר ראשון דו-ממדית, לינארית.

6/12/84
תרגיל 8 [illegible]
דף 1

① פתור $u_y+u_x=0$

② פתור $xu_x+yu_y=\alpha u$

③ פתור $xu_x+yu_y=\alpha u$, נתון $u(x,1)=\phi(x)$

④ פתור $x^2u_x+y^2u_y=(x+y)u$

⑤ פתור $y^2uu_x-x^2uu_y=x^2y$

⑥ פתור $uu_x+u_y=1$

⑦ פתור את משוואת לפלס בעיגול היחידה, כשבשפה $f(1,\theta)=\cos^2\theta$

6/2/84
תרגילי בית במד"ח
34

① פתור $u_y+u_x=0$: ~~משוואת~~ דרך 3 לפתרון

$$\frac{dx}{ds}=1$$

$$\frac{dy}{ds}=1$$

נקבל $x=s+b$ $y=s+\hat{c}$ כלומר $y=x+c$
וגם

$$\cancel{\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{dx}{dx}=4}$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{du}{dy}\frac{dy}{dx}+\frac{du}{dx}\frac{dx}{dx}=u_y+u_x\overset{\text{נתון}}{=}0$$

ולכן $u\equiv const$ על כל הקו. ולכן הפתרון הכללי הוא

$$u=F(x-y)$$

נבדוק:

$$u_x=F'(x-y)$$
$$u_y=-F'(x-y)$$

ולכן $u_x+u_y=0$

② פתור: $xu_x+yu_y=\alpha u$ משוואת הומוגנית

$$\frac{dx}{ds}=x$$

$$\frac{dy}{ds}=y$$

כלומר $x=k_1e^s$, $y=k_2e^s$ וגם

$$y=cx$$

עבור c קבוע. וגם F_1 בעל הפתרון

$$\frac{du}{ds}=\alpha u$$

כלומר $u=c_2e^{\alpha s}$ ~~$u=k_3x^{\alpha}$~~ , ולכן

$$u=\frac{c_2}{k_1^{\alpha}}x^{\alpha}=C_3x^{\alpha}$$

עבור c_3 משתנה שונה מאפס ולכן

$$u = F\left(\frac{y}{x}\right)\cdot x^{\alpha}$$

③ פתור ~~xu_x+yu_y הנתון שעובר $y=x$, $u=1$~~

$xu_x+yu_y=\alpha u$, נתון $u(x,1)=\phi(x)$

פתרון

$$u(x,y) = F\left(\frac{y}{x}\right)\cdot x^{\alpha}$$

ויקור $u(x,1)=\phi(x)$

מספיק למצוא את F על הקו $y=1$. נקבל

$$\phi(x) = F\left(\frac{1}{x}\right)x^{\alpha}$$

ולכן

$$F(t) = t^{\alpha}\phi\left(\frac{1}{t}\right)$$

ולכן

$$u(x,y) = \left(\frac{y}{x}\right)^{\alpha}\phi\left(\frac{x}{y}\right)x^{\alpha} = y^{\alpha}\phi\left(\frac{x}{y}\right)$$

~~① $x^2u_x+y^2u_y=(x+y)u$~~

④ פתור $xu_x+yu_y=2u$

משוואות האופייניות:

$$\frac{dx}{ds}=x \qquad \frac{dy}{ds}=y$$

$$x=e^s \qquad y=c_1e^s$$

~~$\frac{dx}{x}=ds$~~ $\qquad \frac{du}{ds}=2u$

~~$\ln c+\ln x=s+c_1$~~ $\qquad u=c_2e^{2s}$

~~$\ln cx=s$~~ $\qquad y=c_1x$

~~$x=e^s c$~~ $\qquad \frac{y}{x}=c_1$ $\qquad \boxed{F\left(\frac{y}{x}\right)x^2}$

$$x\cdot\left(F\left(\frac{y}{x}\right)2x+F'\left(\frac{y}{x}\right)\left(-\frac{y}{x^2}\right)x^2\right)+yx^2\frac{1}{x}F'\left(\frac{y}{x}\right)=2x^2F\left(\frac{y}{x}\right)$$

נבדוק

15/2/84
תרגיל 4 לימוד
. 4 גי

$$yu_x + xu_y = u$$ פתור (5)

$$\frac{dx}{ds} = y \quad \frac{dy}{ds} = x$$

$$x = ys + c_1 \quad y = xs + c_2$$ פתרון

כלומר

$$\cancel{x - c_1}$$

$$x = (xs + c_2)s + c_1$$

$$C = \frac{c_1}{c_2}$$

$$x = xs^2 + c_2 s + c_1$$

$$(1-s^2)x = c_2 s + c_1$$

$$x = \frac{c_2 s + c_1}{1-s^2} = \cancel{\frac{s + c}{1-s^2}} = c_2 \frac{s + c}{1-s^2}$$

$$y = \frac{c_1 s + c_2}{1-s^2} = c_1 \frac{s + \frac{1}{c}}{1-s^2}$$

$$\cancel{\frac{y}{x} = \frac{cs + 1}{s + c}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}$$

$$x\,dx = y\,dy$$

$$x^2 = y^2$$

$$x^2 - y^2 = C$$

על האופי'

$$\frac{dx}{ds} = y \text{ גם } \frac{du}{ds} = u$$ לכן

$$\cancel{u = C e^s}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{y}$$

$$u = C e^{\frac{x}{y}}$$

ולכן הפתרון

$$u = F(x^2 - y^2)\, e^{x/y}$$

$$yu_x + xu_y = \cancel{y(F'(x^2-y^2)\cdot 2x\, e^{x/y}} + F(x^2-y^2)\frac{1}{y}e^{x/y}) + \cancel{x(F'(x^2-y^2)(-2y)e^{\frac{x}{y}}} + F(x^2-y^2)e^{\frac{x}{y}}\left(-\frac{x}{y^2}\right)$$

(b)

$$y^2uu_x-x^2uu_y=x^2y$$

משוואות האופיין:

$$\frac{dx}{ds}=y^2u$$

$$\frac{dy}{ds}=-x^2u$$

$$\frac{du}{ds}=x^2y$$

ולכן

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x^2}{y^2}$$

$$y^2dy=-x^2dx$$

$$\frac{1}{3}y^3=-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{3}\gamma_1$$

לכן

$$\boxed{y^3-x^3=\gamma_1}$$

ולכן

$$\frac{du}{dy}=-\frac{y}{u}$$

$$udu=-ydy$$

$$u^2-y^2=\gamma_2$$

ולכן פתרון כללי של המשוואה הוא

$$\Psi(y^3-x^3,\,u^2-y^2)=0$$

(f) פתרון

$$x^2u_x+y^2u_y=u^2$$

משוואות האופיין

$$\frac{dx}{ds}=x^2$$

$$\frac{dy}{ds}=y^2$$

ולכן

15/2/84
תרגילים [illegible]
דף 5

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y^2}{x^2}$$

ולכן

$$\frac{dy}{y^2}=\frac{dx}{x^2}$$

$$-\frac{1}{y}=-\frac{1}{x}+c_1$$

ולכן

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{y}=c_1$$

והמשך של הזוג:

$$\frac{du}{ds}=u^2$$

ולכן

$$\frac{du}{dx}=\frac{u^2}{x^2}$$

ולכן

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{u}=c_1$$

כלומר

$$\frac{1}{u}=\frac{1}{x}-c_1$$

$$\cancel{u=\frac{x}{c_1x+1}}$$

$$u=\frac{1}{\frac{1}{x}-c_1}=\frac{1}{\frac{1-c_1x}{x}}=\frac{x}{1-c_1x}$$

ולכן הפתרון הכללי

$$u=\frac{x}{1-f\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)x}$$

(b) פתור

$$(u+3y)u_x+3(u-x)u_y=-x-3y$$

כאשר עקום ההתחלה הוא החיתוך ש

$$x-y+z=2u$$

$$x-y^2+z^2=a^2$$

משוואות האופיינ:

$$\cancel{\frac{dx}{ds}}$$

$$\frac{dx}{ds} = u+3y$$

$$\frac{dy}{ds} = 3(u-x)$$

$$\frac{du}{ds} = -x-3y$$

$$\frac{d(u+x)}{ds} = u-x$$

$$\frac{d(u+x)}{dy} = \frac{1}{3}$$

לכן

$$\cancel{3(u+x) = y}$$

$$\boxed{3(u+x) - y = \gamma_1}$$

וגם

$$\frac{d(\cancel{3x}y-3x)}{ds} = -x-3y$$

לכן

$$\frac{d(y-3x)}{du} = 1$$

לכן

$$y-3x-u = \gamma_2$$

[illegible]

③ פתור

$$x^3 u_x + y(3x^2+y)u_y = u(2x^2+y)$$ עם תנאי

$$x=1$$
$$y^2 = u-y$$

האופייניים:

$$\frac{dx}{ds} = x^3$$

$$\frac{dy}{ds} = y(3x^2+y)$$

לכן

$$\cancel{\frac{dy}{ds}} \; \frac{dy}{dx} = \frac{y(3x^2+y)}{x^3}$$

$$y' = \frac{y(3x^2+y)}{x^3} = \frac{3}{x}y + \frac{1}{x^3}y^2$$

נציב $y = u^{-1}$ ואז $y' = \frac{-u'}{u^2}$ ונקבל

15/2/14
[illegible] תרגילים
דף 6

$$-\frac{u'}{u^2}=\frac{3}{x}u^{-1}+\frac{1}{x^3}u^{-2}$$

$/\cdot -u^2$

$$u'=-\frac{3}{x}u-\frac{1}{x^3}$$

$$u'+\frac{3}{x}u=-\frac{1}{x^3}$$

$e^{-\int\frac{3}{x}}=e^{-3\ln x}=x^3$

$$\frac{-u'}{x^3}+\frac{3}{x^4}u=-\frac{1}{x^6}$$

$$\cancel{\left(\frac{-u}{x^3}\right)'=-\frac{1}{x^6}}$$

$$x^3u'+3x^2u=-1$$

$$(x^3u)'=-1$$

$$x^3u=-x+c'$$

$$u=\frac{-x+c'}{x^3}$$

[illegible]

$$y=\frac{-x^3}{x+c''}$$

[illegible]

$$(x+c'')y=-x^3$$

$$c''y=-x^3-yx$$

$$c''=\frac{-x^3-yx}{y}$$

$$\boxed{c=\frac{x^3-yx}{y}}$$

[illegible]

$$\frac{du}{ds}=(2x^2+y)u$$

$$\frac{du}{dx}=\frac{(2x^2+y)u}{x^3}$$

תרגיל מס' 1

<u>במדת</u>

1. מצא פתרון כללי למשוואות הבאות

א) $xu_x + yu_y = 2u$

ב) $yu_x + xu_y = u$

ג) $y^2uu_x - x^2uu_y = x^2y$

ד) $x^2u_x + y^2u_y = u^2$

2. פתור

$$(u+3y)u_x + 3(u-x)u_y + (x+3y) = 0$$

כאשר עקום ההתחלה הוא החיתוך של

$$x - y + z = 2a$$
$$x^2 - y^2 + z^2 = a^2$$

3. פתור

$$x^3u_x + y(3x^2+y)u_y = u(2x^2+y)$$

העובר דרך הפרבולה $x=1$

$y^2 = u - y$

תרגיל במדה

1) פתור את המשוואה

$$x u_y - y u_x = u$$

$$u(x,0) = h(x)$$

2) מה צריכה להיות הפונקציה $u(x,y)$ כך

שהביטוי $(y^2+u)\,dx + (x^2+u)\,dy$

הוא דיפרנציאל שלם.

3) פתור

$$(x+u)u_x + (y+u)u_y + u = 0$$

כאשר על המעגל $x^2+y^2=a^2$ $u=a$.

4) מצא פתרון כללי ל

$$x u u_x + y u u_y = xy$$

5) מיין את המשוואות הבאות

א) $u_{xx} = x^2 u_{yy}$

ב) $u_{xx} + b\,u_{xy} + u_{yy} = 0$ כאשר b מספר

שרירותי. העבר לצורה הקנונית במקרה

זה.

ג) $y^2 u_{xx} - 2xy\,u_{xy} + x^2 u_{yy} = 0$

6) תהי $f(x,y)$ רציפה בקו סגור D התוחם

תחום G. $f(x,y)<0$ לכל $(x,y)\in G$

תהי $u(x,y)$ פתרון המשוואה [illegible]

$u_{xx} + u_{yy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y = f(x,y)$ ב-G.

אז

$u(x,y) \le \max_{D} u(x,y)$ לכל $x,y\in G$.

תרגיל במד"ח

1. פתור משוואת לפלס בתחום $1\le r\le 2$

כאשר $u(1,\theta)=\cos\theta$ $\quad u(2,\theta)=\cos 2\theta$

מצא את הפתרון

(רמז: הראה כי הפתרון ללא תנאי שפה הוא

$$u=(a_0+b_0\log r)+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n r^n+b_n r^{-n})\cos n\theta$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}(c_n r^n+d_n r^{-n})\sin n\theta$$

2. מצא את ערך האינטגרל

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos(\theta-\psi)+r^2}\,d\psi$$

מבלי לחשבו במישרין.

3. הוכח כי פתרון משוואת לפלס בתחום G כאשר על חלק משפתו נתון u ועל חלק אחר $\frac{\partial u}{\partial n}$ הוא יחיד.

4. פתור את משוואת לפלס

$$u_{xx}+u_{yy}=0$$

$u(0,y)=u(\pi,y)=0 \qquad u(x,0)=0 \qquad u(x,\pi)=1$

ב) מצא את $u(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$.

תרגיל חזרה

במשוואות הגליות

1) פתור

$$u_{tt} = u_{xx} \qquad 0<x<\pi, \quad 0<t$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = 0$$

$$u(x,0) = \varphi$$
$$u_t(x,0) = 0$$

2) נתונה המערכת

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_x$$

א) פתור את המערכת עבור התנאים

$$u(x,0) = \alpha(x) \qquad -\infty<x<\infty$$
$$v(x,0) = \beta(x)$$

ב) ~~נתון~~ נתון

$v(x,0) = \beta(x)$ $u(x,0) = \alpha(x)$ עבור $a \le x \le b$

איזה תנאים צריך לתת ב $x=a$ וב $x=b$ כדי שנקבל פתרון? האם הוא יחיד?

3) פתור עם עקרון דוהמל

$$u_{tt} = u_{xx} + e^{-(x+t)}$$

$$u(x,0) = e^{-x} \qquad -\infty<x<\infty$$

4) פתור את המשוואה

$$u_{tt} = u_{xx} + x$$

$$u(0,t) = u(\pi,t) = u(x,0) = u_t(x,0) = 0$$

(רמז: הצב $v = u + \psi(x)$ וקבע את ψ כך שעבור v מתקיימת משוואת הגלים הרגילה)

תרגיל יגדה

משוואות החום

1) מצא ע"י הפרדת משתנים פתרון ל

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(x,0)=0 \qquad u(0,t)=0 \quad u(\pi,t)=u_0$$

$$u(x,t) = \frac{u_0}{\pi}\left[x + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}e^{-n^2 t}\sin nx\right]$$ (הפתרון

2) השתמש בעקרון דוהמל כדי לפתור את המשוואה:

$$u_t = u_{xx} + f(x,t)$$

$$u(x,0) = \alpha(x)$$

3) הוכח כי הפתרון של

$$u_t = u_{xx}$$

$$u(1,t)=\gamma(t) \qquad u(0,t)=\beta(t) \qquad u(x,0)=\alpha(x)$$

יחיד ותלוי ברציפות בתנאי שפה.

4) פתור $u_t = u_{xx}$

$$u(0,t) = a+kt \qquad u(x,0) = f(x)$$

$$u(l,t) = b+kt$$

ע"י ההצבה

$$v = u - \left[kt + a + \frac{b-a}{l}x + \frac{x(x-l)}{2}k\right]$$