20.1.84

81

מד"ר 1 סיכום

סוגי משוואות

הפרדת משתנים: $y' = F(x)\cdot g(y)$

פתרון בשיטת ההצבה

$$y' = F(ax+by+c)$$

הומוגנית אלגברית

$$y' = F\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$y' = F\left(\frac{ax+by+c}{\alpha x+\beta y+\gamma}\right)$$ פתרון במחברת א

משוואת ברנולי: $y' + A(x)y = B(x)y^{\alpha}$ פתרון במחברת א 17

משוואה אקזקטית

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

כאשר

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

פתרונות: הפרדת משתנים:

$$y' = F(x)g(y)$$

כלומר

$$dy/dx = F(x)g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = F(x)dx$$

ולכן

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int F(x)dx$$

$$G(y) = F(x) + C$$

<u>בעזרת הוצבה</u> $y'=F(ax+by+c)$

נציב $u(x)=ax+by+c$ ואז $u'(x)=a+by'$ לכן

$$y'=\frac{u'-a}{b}$$

כלומר

$$\frac{u'-a}{b}=F(u)$$

כלומר

$$\frac{du}{bF(u)+a}=dx$$

לכן

$$\int\frac{du}{bF(u)+a}=x+c$$

<u>הומוגנית</u> $y'=F\left(\frac{y}{x}\right)$ נציב $u=y/x$ ואז

$y=xu$, $y'=x'u+u'x=u'x+u$ ואז המשוואה היא

$$F(u)=u'x+u$$

כלומר

$$F(u)-u=u'x$$

כלומר

$$\frac{du}{F(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

<u>מדויקת</u> $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ כאשר $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$

יש לקרוא איך לפתור. מופיע במחברת ה.

<u>טענה</u> נתון הביטוי $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ בתחום D בו יש ל-M ול-N נגזרות חלקיות רציפות. אז

$$\oint_\gamma Mdx+Ndy=0$$

אם לכל מסילה סגורה γ ב-D אזי קיימת פונקציה פוטנציאל

10.1.84
ב. 83
שגיא סיפר

$u(x,y)$ כך ש

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=Mdx+Ndy$$

טענה אם בתחום D פשוט קשר (תנאי) ... ... התנאי הבא: מספיק לקיום פונקציה פוטנציאל U הוא $\partial M/\partial y=\partial N/\partial x$

גורם אינטגרציה למשוואה $Mdx+Ndy=0$ נקרא גורם אינטגרציה μ המקיים ש

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y}=\frac{\partial \mu N}{\partial x}$$

כלומר, משוואת

$$\mu(M_y-N_x)=N\mu_x-M\mu_y$$

דוגמה עבור $xdy-ydx$ ישנו גורם אינטגרציה $1/x^2$ $1/y^2$ $1/xy$ $1/x^2+y^2$ וכו.

ראה הרצאה 2 $\mu=\mu(x)$, $\mu=\mu(y)$, $\mu=\mu(x+y)$, מקרים נוספים (4)

משוואת לגרנז' $y=F(y')$ פתרון בהרצאה 2
משוואת ריקטי $y'=a(x)+b(x)y+c(x)y^2$ פתרון בהרצאות 1 ו-2.
משוואת קלרו $y=xy'+F(y')$ פתרון בהרצאות 2.

הגדרה תנאי ליפשיץ:

טענה אם $\sigma(x)$ גזירה ומקיימת $\sigma'(x)\le c\,\sigma(x)$ לכל $x\in[a,b]$ אז לכל $x\in[a,b]$

$$\sigma(b)e^{c(x-b)}\le\sigma(x)\le\sigma(a)e^{c(x-a)}$$

טענה (משפט היחידות לפתרון משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון): נתונה $y'=F(x,y)$ כאשר F מקיימת תנאי ליפשיץ בתחום D. צריך

בכל נקודה בD עובר לכל היותר פתרון אחד.

<u>טענה</u> בתנאי משפט היחידות הפתרון אף קיים תלוי ברציפות בשינויים

בנקודת ההתחלה (x_0,y_0).

<u>טענה</u> (משפט הקיום של Picard): נתונה $y'=F(x,y)$ כאשר F

רציפה ומקיימת תנאי ליפשיץ במלבן $|x-x_0|\le a$, $|y-y_0|\le b$ אז

נסמן

$$a^*=\min\left(a,\frac{b}{M}\right)$$

כאשר $M=\max_D F$ אזי קיים לכל $|x-x_0|\le a^*$

ו- $|y-y_0|\le b$ קיים למשוואה פתרון (ויחיד), דרך (x_0,y_0) (מוגדר ב...)

<u>טענה</u> (משפט ההפרעה [בהרצאה 3.ה]). בתנאי משפט פיקרד, תהי

$R\in C(D)$, $\|R\|_\infty<\delta$ ויהי y הפתרון העובר ב(x_0,y_0)

של $y'=F(x,y)$ ו- $\bar{y}$ הפתרון העובר ב(x_0,y_0)

של $\bar{y}'=F(x,\bar{y})+R(x,\bar{y})$ אזי בקטע $|x-x_0|\le a^*$

$$|y-\bar{y}|\le\left(a^*e^{La^*}\right)\delta$$

כאשר L הוא קבוע ליפשיץ המשותף של שני המשוואות.

<u>הגדרה</u> המשוואה הלינארית מסדר 2:

$$y''+P(x)y'+Q(x)y=R(x)$$

או

$$L\circ y=\left[\frac{d^2}{dx^2}+P(x)\frac{d}{dx}+Q(x)\right]y=R(x)$$

יש 2 בעיות מעשיות ואפשריות:

① $y(a)=C_1,\ y(b)=C_2$ תנאי שפה

② $y(a)=C$ $y'(a)=C'$ תנאי התחלה.

<u>פרק/כה 3.5.ה</u> של משוואה לינארית מסדר 2: למתקדמים 2.

<u>הגדרה</u>. וורונסקיאן

<u>טענה</u> אם $\{y_i\}$ תלויים לינארית אזי הוורונסקיאן שלהם הוא זהותית אפס.

<u>משוואת אוילר</u> $x>0$ $\alpha x^2y''+\beta xy'+\gamma y=0$ פתרון בתבנית [illegible]

20.1.84
מגד' סיכום
דף 3

85

<u>טענה</u> נתונה $u''+p(x)u'+Q(x)=0$ כאשר P,Q רציפות בקטע I,
ונניח $f(x), g(x)$ פתרונות לה. ונניח קיימת $A\in I$ כך ש
$$W(A)=f(A)g'(A)-f'(A)g(A)\neq 0$$
אזי כל פתרון ניתן להציג כ $\alpha f(x)+\beta g(x)$ (מתקדמת א)

<u>טענה</u> בקטע I נתונה $y''+p(x)y'+Q(x)y=0$, ונניח f,g פתרונות לה. ~~שאם~~ יהי $a\in I$. אזי
$$W(x)=W(a)e^{-\int_a^x p(x)dx}$$

<u>טענה</u> (משפט ההפרדה) תהי $Ly=0$ משוואה ליניארית מסדר שני, ויהיו f,g פתרונות בת"ל שלה. אזי השורשים של f,g בקטע הקלטש מפרידים לסירוגין.

<u>טענה</u> (משפט ההשוואה) תהי f הפותרת את $u''+A(x)u=0$ ו-g הפותרת את $u''+B(x)u=0$ ונניח $A\geq B$ בקטע I. אזי בקטע זה יש ל-f לפחות שורש אחד בין כל שני שורשים של g (מתקדמת א)

<u>הגדרה</u> בעית שפה: $Ly=R(x)$ עם תנאי:
$$\alpha y(a)-\beta y'(a)=\mu$$
$$\beta y(b)-\delta y'(b)=\nu$$
בה"כ $\mu=\nu=0$ כי אחרת רק בחירה מתאימה של $\tilde{y}=y+cx+d$ נקבל שני אפסים. מקרים פרטיים:
<u>דיריכלה:</u> $\beta=\delta=0$ ולכן נתון: $y(a)=y(b)=0$
<u>נוימן:</u> $\alpha=\beta=0$ ולכן נתון: $y'(a)=y'(b)=0$

<u>טענה</u> המד"ר נתונה $y'=a(x)y+b(x)$ כאשר a,b רציפות ב-I
ונתון $y(x_0)=y_0$ אזי למשוואה פתרון יחיד Fr בכל I, והוא נתון ע"י
$$y(x)=e^{\int_{x_0}^{x}a(u)du}\left[y_0+\int_{x_0}^{x}b(z)e^{-\int_{x_0}^{z}a(u)du}dz\right]$$
מתקדמת א

<u>משפט</u> נתונה המשוואה $P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$ ונתונה (x_0,y_0) כך ש

(א) $P(x,y), Q(x,y)$ רציפות בתחום $|x-x_0|<a, |y-y_0|<b$

(ב) באותו תחום $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ והנגזרות רציפות

(ג) $Q(x_0,y_0) \neq 0$

אז קיים פתרון יחיד למשוואה, המקיים $y(x_0)=y_0$, והוא מוגדר בסביבה כלשהיא של x_0. (מתקדמות ח)

<u>הגדרה</u> מערכת משוואות דיפרנציאליות, מד"ר מסדר n מנורמלית.

<u>משפט</u> (מעבר) קיום ויחידות הפתרון למד"ר מערכת: תהי $\bar y' = \bar F(x,\bar y)$ מד"ר מערכת, ונניח $x_0, \bar y_0 \in R^n$ נתונים, ונניח

(א) $\bar F$ רציפה בתחום

$$\Delta: |x-x_0| \le a \quad \|y-\bar y_0\| \le b$$

(ב) תנאי ליפשיץ: קיים $L>0$ כך ש

$$\forall (x,\bar y),(x,\bar z) \in \Delta \quad \|\bar F(x,\bar y) - \bar F(x,\bar z)\| \le L\|\bar y - \bar z\|$$

אז אם נגדיר

$$\delta = \min(a, b/M)$$

כאשר $M = \sup_\Delta \|\bar F(x,\bar y)\|$ אז למד"ר פתרון יחיד $\bar y$ על הרווח $|x-x_0|<\delta$ שעבורו $\bar y(x_0) = \bar y_0$ (מתקדמות)

<u>הגדרה</u> מד"ר מסדר n.

<u>משפט</u> קיום ויחידות פתרון למד"ר מסדר n.

<u>שיטת וריאציית הקונסטנטות</u>: (מתקדמות א).

<u>הגדרה</u> אופרטור צמוד לעצמו מסדר 4:

$$(a(x)y'')'' + (b(x)y')' + c(x)y = 0$$

<u>משפט</u> (מעבר) פונקציית גרין: יהיו $f(x), g(x)$ פתרונות בתחום של $Ly=0$ המקיימים $f(a)=g(b)=0$ כאשר a,b נקודות של צמודות. נגדיר

$$G(x,t) = \begin{cases} f(x)g(t)/W(t) & a \le x \le t \\ f(t)g(x)/W(t) & t < x \le b \end{cases}$$

כאשר $W(t)$ הוא הורונסקיאן. נגדיר כעת $u = \int_a^b G(x,t)R(t)dt$. אז u פותר את $Lu=R$

20.1.64

מנוך סיכום

דף 4

87

טענה נתונה המשוואה $(pu')' + (\lambda\rho + q)u = 0$ כאשר $\rho, p > 0$ ב-$[a,b]$ ולקצותיה הקטע נתונים תנאי שפה. הטרנספורמציה

$t=\int_0^x \sqrt{\rho/p}\,dx$ $\quad v=\sqrt[4]{\rho p}\,u$ מעבירה את הבעיה לבעיה $v''+(\lambda+s(t))v=0$, ונשמרים הע"ע. (ללא הוכחה)

הגדרה בעית SL: $(p(x)u')' + (\lambda\rho(x)+q(x))u=0$ ותנאי השפה

$$\alpha u(a)=\beta u'(a)$$
$$\gamma u(b) = \delta u'(b)$$

המכפלה הפנימית המתאימה לה $(f,g)=\int_a^b fg\rho\,dx$

טענה לערכים שונים של λ בעית SL מתאימות פונקציות עצמיות אורתונורמליות. (מחברת א2)

טענה (משפט שטורם ליוביל) לבעיה SL על קטע סופי $[a,b]$. אינסוף ערכים סדרת ע"ע ממשיים, ומתאימה לה סדרה של פונקציות עצמיות $\{u_n\}$, כך שלפונקציה $u_n(x)$ יש בדיוק n שורשים ממשיים ופשוטים בין a ל-b. (היא יחידה עד כדי כפל בקבוע. (ללא הוכחה)

טענה (משפט ההשוואה של שטורם): תהי נתונה f הפותרת את $u''+A(x)u=0$ ו-g הפותרת את $u''+B(x)u=0$. אם $A\geq B$ בקטע I, אזי בקטע זה יש ל-f שורש אחד לפחות בין כל שני שורשים של g. (מחברת 6)

הגדרה המשוואה הצמודה, משוואה צמודה לעצמה

טענה תהי נתונה המד"ר $P_0y''+P_1y'+P_2y=0$. אם נכפול ב-$\frac{1}{P_0}\exp\int\frac{P_1}{P_0}dx$ נקבל משוואה צמודה לעצמה. (מחברת א) (א4)

טענה נתונה המד"ר $P_0y''+P_1y'+P_2y=0$ ב-$[a,b]$, ונתון $P_0\neq0$ שם. לבעיה עם תנאי שפה $u(a)=c$, $u(b)=d$ יש פתרון יחיד אמ"ם לבעיה עם $0=u(a)=u(b)$ יש רק את הפתרון הטריוויאלי. (מחברת ב)

בעיית המיתר: מחברת ד?

[illegible] 2 צילינדר, [illegible], הרגיל לגרד

מד"ר 1 תרגיל 1

① הראו שקיים פתרון ספרטי לשיעור $x(t)=G^{-1}\left(G(x_0)+\int_{t_0}^{t}f(s)ds\right)$
(כאשר $G(x)$ הקדומה של $1/g(u)$ ב-(x_1,x_2)) הוא הפתרון של
$\dot{x}=f(t)g(x)$
(השתמשו ב- $G(x(t))=G(x_0)+\int_{t_0}^{t}f(s)ds$).

② פתרו $(1+e^x)yy'=e^x$ כך ש $y(1)=1$

③ מצאו את האינטגרל "הכללי" של

$$xy(1+x^2)y'=1+y^2$$

④ פתרו $(1+x^2)y'-2xy=(1+x^2)^2$, $y(0)=1$

⑤ רשמו את האינטגרל "הכללי" עבור

$$xy'+y=y^2\ln x$$
$$(1-x^2)y'-xy=axy^2$$

⑥ ~~מצאו את~~ פתרו

$$y'=\frac{x^2-2xy-y^2}{x^2+2xy-y^2}$$ כש $y(1)=1$

⑦ נתונה המשוואה $y'+p(x)y=Q(x)$, $p,Q\in C(I)$. יהיו $\{y_i\}_1^3$
פתרונות של המשוואה. הוכח כי:

$$\frac{y_1(x)-y_2(x)}{y_3(x)-y_2(x)}=\text{קבוע}$$

⑧ עבור משוואה לינארית: או שכל ~~הם~~ הפתרונות
שלה חסומים, או שלכל היותר אחד.

מד"ר 1 - תרגיל ב:

① תהי מד"ר $y'=F\left(\frac{ax+by+c}{a'x+b'y+c'}\right)$ הראה:

(א) אם $ab'-a'b\neq0$ אז ההצבה $x=\alpha+u$, $y=\beta+v$ כאשר (α,β) נקודת החיתוך של הישרים $ax+by+c=0$, $a'x+b'y+c'=0$ תוביל למשוואה הומוגנית...

(ב) אם $ab'-ba'=0$ נציב $y=g(u)$ כאשר $ax+by+c=u$ מה המשוואה שמתקבלת?

② פתור את המשוואות: (א) $(x+y+2)dx+(x-y-4)dy=0$ (ב) $(x+y+1)dx+(2x+2y-1)dy=0$

③ לכל אחת מהמשוואות הבאות מצא את האינטגרל הכללי:

(א) $(2xy^2-y)dx+(y^2+x+y)dy=0$ (חפש גורם אינטגרציה מהצורה $\mu(x)$ או $\mu(y)$).

(ב) $(x^2+yx^2+2xy-y^2-y^3)dx+(y^2+xy^2+2xy-x^2-x^3)dy=0$ [גורם מהצורה $\mu(x\cdot y)$ או $\mu(x+y)$]

(ג) $(x^2+y^2+1)dx-2xydy=0$ [רק כן מהצורה $\mu(x^2+y^2)$].

④ תהי $y'=a(x)y+b(x)$, $a(x),b(x)$ רציפות ב-(x_1,x_2) ויהי $y(x)$ פתרון כך ש-$y(x_0)=y_0$, $x_0\in(x_1,x_2)$. הוכח שאם $z(x)$ מקיים $z'(x)\le a(x)z(x)+b(x)$ $\forall x\in[x_0,x_2)$ וכן $z(x_0)\le y_0$ אז $z(x)\le y(x)$ בקטע $[x_0,x_2)$

⑤ תהי $y'=a(x)y+b(x)$, $a(x),b(x)$ רציפות ב-$[0,\infty)$ אם $a(x)\le m<0$ בקטע $[0,\infty)$ ו-$b(x)$ חסומה שם אז כל פתרון של המשוואה הנ"ל חסום ב-$[0,\infty)$.

מד"ר 1 : תרגיל 2

(1) מצא את הפתרון הכללי של המד"ר $x^2y'=x^2y^2+xy+1$
בשידוע שיש פתרון פרטי מהצורה $y=\frac{a}{x}$ כאשר a קבוע.

(2) נתונה המד"ר $y'=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$ כאשר P,Q,R רציפות בקטע I
(משוואת ריקאטי) יהיו $\{y_i\}_1^4$ ~~ארבעה~~ פתרונות שלה.
הוכח כי:

$$\frac{y_1-y_3}{y_2-y_3} : \frac{y_1-y_4}{y_2-y_4} = K$$

הסק כי אם ישלנו שלושה פתרונות פרטיים אזי יש לנו
את הפתרון הכללי.

(3) נתונה המשוואה: $y'=x^2+y$ בתחום: Δ: $x\in[0,1]$, $y\in[0,2]$

תנאי ההתחלה: $y(0)=1$

(א) בדוק אם בתחום הנ"ל מתקיימים תנאי משפט פיקרד
לקיום וחד-ערכיות הפתרון.

(ב) מצא לפחות 3 איברים של הסדרה שגבולה הוא
הפתרון.

(ג) מהו התחום המקסימלי בו קיים פתרון זה.

(ד) מהי השגיאה שעושים כשמסתפקים באיבר השלישי
של הקירוב.

מד"ר תרגיל מס' 4

1. מצא מטריצה פונדמנטלית עבור

$$\bar{Y}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \bar{Y}$$

2. פתור עבור

$$Y_1' = Y_2$$
$$Y_2' = Y_3$$
$$Y_3' = 4Y_2$$

3. נתונה המערכת

$$\bar{Y}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \bar{Y} + \begin{bmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{bmatrix}$$

מצא את הפתרון הכללי שלה וכן פתרון פרטי כך ש $\bar{Y}(0)=\bar{0}$

4. נתונה המערכת

$$\bar{Y}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \bar{Y} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \end{bmatrix}$$

מצא פתרון כך ש $\bar{Y}(0)=\bar{0}$