תורת הגרפים

המוצגה: שוני ספרים להמשך

<u>הגדרה:</u> גרף G הוא זוג סדור $G(V,E)$ כאשר V קבוצה של קודקודים / Vertices ו- $E\subseteq[V]^2_{i\neq j}$ קבוצה של צלעות / קשתות Edges

<u>הגדרה</u> שני קודקודים נקראים שכנים אם יש קשת ביניהם

<u>הגדרה</u> $H(V',E')$ נקרא תת גרף של $G(V,E)$ אם $V'\subseteq V$ וכן $E'\subseteq E$ וכן H גרף.

<u>סימון</u> $H\subseteq G$

<u>הגדרה</u> $H\subseteq G$ נקרא תת-גרף פורש אם H מכיל את כל הקשתות רק ש H עדין גרף.

<u>הגדרה</u> $v(G)=|V|=$ הסדר של G

$e(G)=|E|=$ הגודל של G

<u>הגדרה</u> $G(n,m)$ גרף מסדר n וגודל m

<u>הגדרה</u> שני גרפים נקראים איזומורפיים אם קיימת פונקציה הפיכה התאמה חח"ע ועל המשמרת שכנים לשכנים ולא שכנים ללא שכנים.

<u>טענה</u> יהי G גרף מסדר n ו $\{v_i\}_1^n$ הקודקודים של G
יהי H " " " $\{w_i\}_1^n$ " "
מתקיים אם: $\{G-v_i\}_1^n$ ו $\{H-w_i\}_1^n$ גרפים
הגרפים הם איזומורפיים לגרפי G מתקבל
שהגרף G איזומורפי לגרף H

<u>השערה</u> זה לא מוכחת ונקראת השערת ULAM

<u>הגדרה</u> K_n הגרף המלא שסדרו n

הערה: $e(K_n)=\binom{n}{2}$

הגדרה: E_n הגרף הריק מסדר n $\quad e(E_n)=0$

הגדרה: יהי G גרף. המשלים של G, יסומן $\bar{G}$ ויכיל את כל הקשתות שאין ב-G

הגדרה: יהי $x\in G$ אזי $\Gamma(x)$ קבוצת השכנים של x

הגדרה: יהי $x\in G$ הדרגה של x

$$d(x)=|\Gamma(x)|$$

הגדרה

$$\delta(G)=\min\{d(x)\,|\,x\in G\}$$

$$\Delta(G)=\max\{d(x)\,|\,x\in G\}$$

הגדרה: אם בגרף G $\Delta=\delta$ אזי הגרף נקרא רגולרי

הערה: יהי $x\in G$ אזי

$$d_G(x)+d_{\bar{G}}(x)=v(G)-1$$

משפט: יהי $G=\{v_i\}_{i=1}^{n}$ גרף ויהיו $\{d_i\}$ הדרגות של קודקודי G. אזי

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2e(G)$$

הגדרה: p_i מספר הקודקודים בעלי דרגה i

הערה: $n=\sum_{0}^{n} p_i$

הערה: $2e=\sum_{1}^{n} i p_i$

הערה: מספר הקודקודים בעלי דרגה אי-זוגית הוא זוגי

ספרים:

Bela Bollobas — Graph Theory

Harary — Graph theory

Berge — Graph theory

תהי $d_1 \geq d_2 \geq \dots \geq d_p$ סדרה של מספרים טבעיים. נשאלת השאלה: האם קיים גרף שבו סדרת הדרגות של קודקודיו (כלומר האם הסדרה גרפית.)

$$d_1 \geq \quad d_{m+1} = \dots = d_{d_1+1} = \dots = d_n \quad \geq d_p$$

נגדיר

$$e_i = \begin{cases} d_{i+1}-1 & 1,\dots,m-1 \\ d_{i+1}-1 & n-(d_1-m)-1,\dots,n-1 \\ d_{i+1} & \text{אחרת} \end{cases}$$

סדר את ערכות e

$$e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_{p-1}$$

וכן אם $\{e_i\}_1^{p-1}$ גרפית אזי $\{d_i\}$ גרפית כי $\{e_i\}$ התקבלה מ $\{d_i\}$ ע"י מחיקת של ~~אצל~~ הקשרים של d_1 נקודות ומחיקת d_1.
אם $\{e_i\}$ גרפית נוסיף לה נקודה ונחבר אותה ל... ונקבל גרף ל $\{d_i\}$

<u>טענה</u> $\{d_i\}_1^p$ גרפית אם"ם

$$\forall j \quad \sum_{i=1}^{j} d_i \leq j(j-1) + \sum_{i=j+1}^{p} \min(j, d_i)$$

<u>הוכחה</u> נניח כי יש גרף של $\{d_i\}$ אזי $\sum_{i=1}^{j} d_i$ הוא מספר הקשתות שיוצאים מהקודקודים הגדולים כלומר מספר הקשתות בינם לבין עצמם ועוד מספר הקשתות בינם לבין הקטנים. מספר הקשתות בינם לבין הגדולים קטן מ $(j-1)j$, ומספר הקשתות בין הגדולים לבין הקטן ה-i קטן מ $\min(j,d_i)$ חוזר

כי יש רק j גדולים וכן זה הקשורים לקודקוד

ה-i. ולכן

$$\sum_{i=1}^{j} d_i \leq j(j-1) + \sum_{i=j+1}^{p} \min(j, d_i)$$

(7) נניח ש-$\{d_i\}$ מקיימת את התנאי נראה ממנה את הסדרה $\{e_i\}$ כמו קודם. נניח ש-$\{e_i\}$ לא מקיימת את התנאי אז קיים j מספרי שעבורו התנאי לא מתקיים. נסמן אותו כ-h. כלומר (נניח h מספיק גדול)

$$(1)\quad \sum_{i=1}^{h} e_i > h(h-1) + \sum_{i=h+1}^{p-1} \min(h, e_i)$$

אבל

$$(2)\quad \sum_{i=1}^{h-1} e_i \leq (h-1)(h-2) \sum_{i=h}^{p-1} \min(h-1, e_i)$$

וגם

$$(3)\quad \sum_{i=1}^{h-2} e_i \leq (h-2)(h-3) \sum_{i=h-1}^{p-1} \min(h-2, e_i)$$

ובפרט עבור $j=h+1$

וכן את השוויון מתקיים עבור ה-$\{d_i\}$ לכל j (4)

נתבונן ב- $[(4)-(1)]$, $[(3)-(1)]$ ו- $[(2)-(1)]$

$$[(4)-(1)]:\quad \sum_{i=1}^{h+1} d_i - \sum_{i=1}^{h} e_i \leq 2h + \sum_{i=h+2} \min(h+1, d_i) - \sum_{i=h+1}^{p-1} \min(h, e_i)$$

נגדיר S להיות מספר המקומות שבהם יש הבדל בין d_{i+1} ל-e_i עבור $i \leq h$

כעת אפשר לכתוב את ~~...~~ הקודם בצורה

$$\boxed{1}\quad d_1 + S \leq 2h + \sum_{i=h+1}^{p-1} \left[\min(h+1, d_{i+1}) - \min(h, e_i)\right]$$

$$\boxed{2}\ [(2)-(1)]:\quad e_h > 2(h-1) - \min(h-1, e_h) - \sum_{h+1}^{p-1} \left[\min(h-1, e_i) - \min(h, e_i)\right]$$

$$\boxed{3}\ [(3)-(1)]:\quad e_{h-1} + e_h > 4h - 6 + \min(h-2, e_{h-1}) - \min(h-2, e_h) - \sum_{h+1}^{p-1} \left[m(h-2, e_i) - m(h, e_i)\right]$$

הערה: $h \le e_h$ כי אם $e_h < h$ מקבלים לפי (1)-(2) סתירה

נסמן a: מספר ה e_i שמקיימים $e_i > h$ $\quad i>h$

b: מספר ה e_i // $e_i = h$ $\quad i>h$

c: // // // // $e_i < h$ $\quad i>h$

a': // // // $e_i > h$ וכן $e_i = d_{i+1}-1$ $\quad i>h$

b': כנ"ל $\quad i>h$

c': כנ"ל $\quad i>h$

ברור ע"פ ההגדרות $d_1 = \cancel{a}s + a' + b' + c'$ (0)

נכתוב כעת את $\boxed{1}$ בצורה הבאה:

$\tilde{1}$ $$d_1 + s < 2h + a + b' + c'$$

את $\boxed{2}$:

$\tilde{2}$ $$e_h \ge h + a + b$$

$\tilde{3}$ $$e_{h-1} + e_h > 2h - 2 - \sum_{h+1}^{p-1} \left(\min(h-2, e_i) - \min(h, e_i)\right)$$

כעת מקרה I: $c' = 0$

$$d_1 \ge e_h > h - 1 + a + b$$

ולכן

$$d_1 > h - 1 + a + b$$

$$2d_1 \ge 2h + 2a + 2b$$

לפי $\tilde{1}$ ו (0) נקבל

$$2d_1 < 2h + a + a' + 2b'$$

$a \ge a'$, $b \ge b'$ ולכן קיבלנו סתירה. ובעצם לא השתמשנו בנוסחה $\tilde{3}$ ולכן עדיין צריך להוכיח עבור $h=1$, $c'=0$ כלומר:

~~$e_i = d_{i+1} - 1$ ... ~~

ולכן $c' = 0$, $e_i \le 1 \Rightarrow e_i = 0$ כי: ... $d_{i+1} = 0$ ...

ולכן זוהי מקרה I כנ״ל שהראנו $e_i=d_{i+1}-1$ ולכן 1-קדים. פתרון לפי ① מקבלים 2-קדים

כלומר 1-קדים סתירה למקסימליות

מקרה II: $c'>0$, $d_{h+1}>h$ כלומר קיים i כך ש $e_i>h$ ולכן $e_i=d_{i+1}-1$ אבל אז ונסיק שדרך הבנייה של $\{e_i\}$ שמתקבל

$a=a'$, $s=h$

כמו לפי $\tilde{1}$ וכן ⑤

$$d_1+h = 2h+a'+b'+c' = 2h+a+b'+c'$$

מקרה III: $d_{h+1}=h$, $c'>1$: $\Longleftarrow$ $e_h=h$ ועוד לפי הבנייה אפשר לקבל $a'=b'=0$

לפי ⑤ מקבלים

$$d_1=s+c'$$

ולפי $\tilde{3}$ מקבל

$$e_{h-1}>h-2+c'$$

$c'\geq 2$ ולכן

$$e_{h-1}>h$$

ולכן $e_{h-1}=d_h-1$ ולכן מדרך הבנייה

ולכן $s=h-1$

$$d_1=h-1+c'\leq e_{h-1}<d_h$$

אבל סתירה, וזה גומר את המקרה הנ״ל.

מקרה IV: $d_{h+1}=h$, $c'=1$ (דומה [illegible])

הגדרה: $P(V,E)$ מסלול אם $V=\{x_0,x_1,\dots,x_n\}$ $E=\{x_0x_1,x_1x_2,\dots,x_{n-1}x_n\}$ מאורך l: P_l

הגדרה: שביל – מסלול ללא חזרות של נקודה

דרך – שביל ללא חזרות של קודקוד

מעגל פשוט: מסלול סגור [illegible]

מעגל: שביל סגור

הגדרה $x,y\in G$ $d(x,y)$ המרחק בין x לבין y = אורך המסלול המינימלי שבין x לy

הגדרה גרף G יקרא קשיר אם יש מסלול בין כל שתי נקודות שלו

הגדרה קומפוננטה של גרף הוא תת-גרף הנוצר ע"י הגרף שהוא מקסימלי קשיר.

הגדרה נקודת חתך: נקודה שאם מוציאים אותה מהגרף היא מגדילה את מספר הקומפוננטות

הגדרה ~~[illegible]~~ גשר: קשת שאם מוציאים אותה מהגרף גדל מספר הקומפוננטות

הגדרה גרף דו צדדי הוא גרף שאפשר לחלק את קודקודיו לשתי קבוצות זרות V_1, V_2 כך שהגרף V_1 הוא ריק וגם V_2 ריק

סימון: $K_{n,m}$ הגרף המלא הנ"ל.

הגדרה גרף ח-צדדי: כנ"ל.

הגדרה גרף מוכלל גרף שבו מותרות קשתות כפולות וכן קשתות כאלה:

הגדרה גרף מכוון: גרף שבו לכל קשת יש כיוון

הגדרה היפר-גרף: $H(V,A)$ V קבוצה קודקודים $A\subseteq 2^V$ קבוצת קשתות

טענה: כל גרף הוא איחוד זר של הקומפוננטות שלו

טענה e גשר $\iff$ e לא קשת של מעגל כלשהו

טענה G דו-צדדי אמ"מ G לא מכיל מעגל מאורך אי-זוגי.

טענה אם בין שתי נקודות יש שני מסלולים שונים אז יש בגרף מעגל.

הגדרה עץ: גרף קשיר ללא מעגלים.

טענה: הטענות הבאות שקולות:

① G עץ

② G קשיר מינימלי מבחינת קשתות (כל $e \in G$ הוא גשר)

③ ב-G יש מסלול יחיד בין כל שני הקודקודים

④ ב-G אין מעגלים, אך אם מוסיפים עוד קשת מקבלים מעגל

טענה: ההגדרות הבאות שקולות:

① T עץ על n קודקודים

② T קשיר ובעל n קודקודים ו-$n-1$ קשתות

③ T בעל n קודקודים ו-$n-1$ קשתות, וכן אין בו מעגלים

טענה: יהי T עץ

$\exists v \in T \quad d(v)=1$

הוכחה: נתבונן בקצוות של מסלול מקסימלי באורכו [illegible]

טענה: לכל גרף קשיר יש עץ מקסימלי:

~~טענה: לגרף קשיר~~

הגדרה: מעגל אוילר: מעגל שעובר דרך כל הקשתות, דרך כל קשת פעם אחת

טענה: לכל גרף קשיר שבו לכל קודקוד יש דרגה זוגית יש מעגל אוילר

הוכחה: אם לא היה מעגל ב-G אזי הוא היה עץ ואזי היה בו קודקוד מדרגה 1 סתירה. לכן יש ב-G מעגל. יהי C המעגל המקסימלי ב-G. נוציא מ-G את כל הקשתות של C. אם זה היה גמרנו. אם לא, לכל קודקוד של מה שנשאר יש דרגה זוגית. ולכן יש קומפוננטות

שקול יש מעגל אוילר שאותו עובר לגרף G C סתירה.

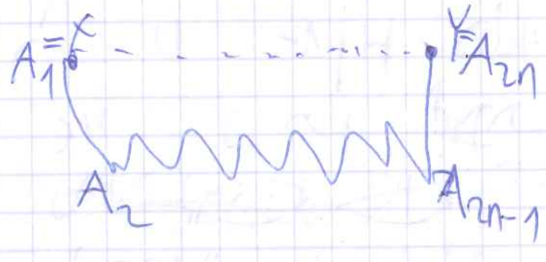
<u>מסקנה</u> ולכן C מעגל אוילר

אם בגרף יש בדיוק שני קודקודים בעלי דרגה אי-זוגית אז יש בו מסלול אוילר.

<u>הגדרה</u> יהי G גרף, מעגל העובר דרך כל קודקוד יקרא מעגל המילטון.

<u>משפט</u> יהי G_{2n} גרף. אם $d(v) \geq n$ לכל $v \in G_{2n}$ אז ל-G_{2n} יש מעגל המילטון. (PÓSA)

<u>הוכחה</u> נסמן $G \in \mathcal{H}$ אם ל-G יש מעגל המילטון. כעת נניח ש-$G_{2n} \notin \mathcal{H}$ נוסיף לו קשתות עד שיהיה בו מעגל המילטון. נניח שזה קורה כבר לאחר הוספת הקשת הראשונה כלומר: $G^0 = G_{2n} + xy \in \mathcal{H}$ מעגל המילטון ב-G^0 חייב להכיל את xy ולכן הוא מהצורה



כאשר $d(A_i) \geq n$ $\forall i$ ולכן אל A_{2n} קשורות ב-G_{2n} לפחות $n-1$ נקודות מתוך

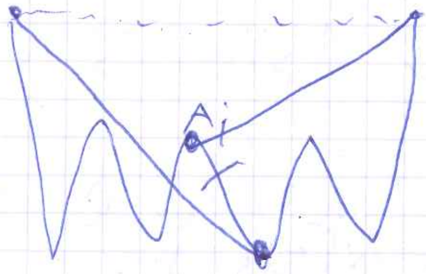
$$k_1 = \{A_2 \cdots A_{2n-2}\}$$

וכן אל A_1 קשורות ב-G_{2n} לפחות $n-1$ מתוך $A_3 \ldots A_{2n-1}$ כלומר לפחות $n-1$ מתוך $k_2 = \{A_2 \ldots A_{2n-2}\}$ הקודקוד הקודם ל-x. מתקיים:

$$A_i \in k_1 \Longleftrightarrow A_i Y \in E$$

$$A_j \in k_2 \Longleftrightarrow A_{j+1} X \in E$$

נניח קבוצות ש $\phi \neq K_1 \cap K_2$ ולכן קיים i כך ש



כך קיבלנו שיש מסלול מעגל המילטון לכן $G_{2n}\in\phi$ סתירה ולכן הטענה נכונה.

טענה: אם ~~לכל~~ גרף G_{2n} כך ש $v_1,v_2\in G$ מתקיים $d(v_1)+d(v_2)\geq 2n$ אז יש בגרף מעגל המילטון

הגדרה: K_n הגרף המלא מסדר n.

טענה: אם n אי-זוגי, אז ניתן לפרק את K_n ל $\frac{n-1}{2}$ מעגלי המילטון זרים

הוכחה: בהמשך.

הגדרה: נאמר ש $H|G$ כלומר H מחלק את G אם ניתן לפרק את G כאיחוד זר ~~של גרפים~~ (מבחינת הקשתות) של גרפים איזומורפיים ל H

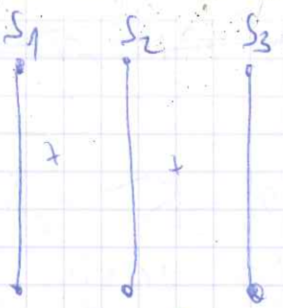
טענה: (Steiner) $K_3|K_7$

הוכחה: נחלק את K_7 למשולשים:

1	2	4
2	3	5
3	4	6
4	5	7
5	6	1
6	7	2
7	1	3

טענה: $K_3|K_n$ אמ"מ $n\equiv 1,3 \mod 6$.

הוכחה למשפט עבור $n=21$ נחלק את הגרף ל3 עמודים:



נחלק את s_1 לפי השלב הקודם. כעת אם
$v_1,v_2 \in s_2$ ניקח להם כשלישי את צד שהיה
שמתחלק למסלול ב-v_1 ב-s_2 (והוא נמצא
ב-s_1)
כנ"ל עבור s_3, נחבר גם את כל השורות.

יש כנ"ל בניה אינדוקטיבית.

<u>הגדרה</u> P_n: מסלול בן n קשתות.
<u>טענה</u> $P_{n-1} | K_n$ אמ"מ $n \equiv 0 \mod 2$
<u>הוכחה</u> עבור $n=14$

צריכים להיות 7 מסלולים שאותם נקבל ע"י הזזה ציקלית. כלומר המסלול הראשון הוא:

0 13 . . . 6 7

ואחריו:

1 0 . . . 7 8

2 1 . . . 8 9

⋮

קל לראות שזה פותר את הבעיה.
עבור כל n זוגי קל להכליל את הבניה שלמעלה.

<u>טענה</u> $C_n | K_n$: ההוכחה לשלב נוסף הודהוד 15

ונקרא ~~... השאר ...~~ לקבוצות של כל מסלול.

~~הגדרה הדטרמיננטה מעל R~~
הגדרה קומוטר קרוי ביטוי מהצורה

$$\sum_{\sigma}(-1)^{\sigma}\prod_{i=1}^{n}a_{\sigma_i}$$

כאשר σ עובר על כל הפרמוטציות של n ...
$a_i \in R$ ו-R חוג.

טענה (סימון) יהיו $\{A_{ij}\}_{i,j}^{2k} \in M_{k}(R)$, R חוג קומוטטיבי.
אז הקומוטטור ה-$2k$ הוא זהותית $=0$.

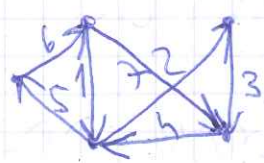
הוכחה מספיק להוכיח את המשפט עבור מטריצות שבהן כתוב 1 במקום אחד ואפס בכל השאר כי הן מהוות בסיס למטריצות (E_{ij}).

~~...~~ לשם ההוכחה נשתמש בלמה

למה יהי $\vec{G}(n,m)$ גרף מכוון מוכלל (הרבה קשתות, קשתות-לולאה)
נגדיר כמו בקבוצה $\epsilon\vec{G}(x_0,y)$ תהיינה m ... של
הקשתות. נניח שיש לגרף מסלול אוילר.
אז הוא $e_{\sigma_1}\dots e_{\sigma_n}$ עבור σ מסוים. נגדיר
$\epsilon(p)=(-1)^{\sigma}$ כאשר p מסלול אוילר, ו-σ הפרמוטציה
המושרית. כן נגדיר כעת

$$\epsilon\vec{G}(x,y)=\sum_{p}\epsilon(p)$$

כאשר p עובר על כל מסלולי אוילר
שמתחילים ב-x וגומרים ב-y.
כעת אם $m \geq 2n$ אזי $\epsilon\vec{G}(x,y)\equiv 0$
נתבונן למשל בגרף:



דוגמא:

$$\epsilon(1234567)=+1$$
$$\epsilon(1567423)=-1$$

הוכחה: נתבונן בקבוצה $\{E_{i_1j_1}, E_{i_2j_2} \ldots E_{i_{2n}j_{2n}}\}$

נגדיר גרף $G(V,E)$ המשויך לקבוצה זו כך:

$$V=\{1..n\}$$
$$E\{i_1j_1, i_2j_2, \ldots, i_{2n}j_{2n}\}$$

וזהו גרף מכוון מוכלל. כעת

$$E_{ih}E_{kj}=\delta_{hk}E_{ij}$$

ולכן

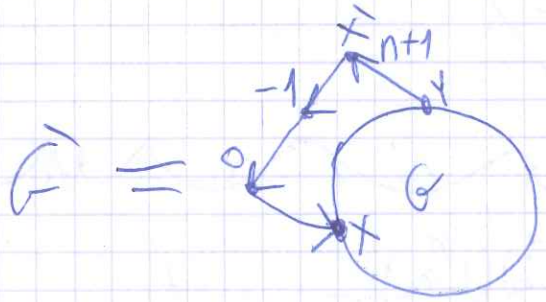
$$E_{i_1j_1} \cdots E_{i_{2n}j_{2n}} = \begin{cases} E_{i_1j_{2n}} & \text{אם אוילרי} \\ 0 & \text{אחרת} \end{cases}$$

ולכן הקומוטטור יהיה שווה ל

$$\sum_{i,j} \epsilon\vec{G}(i,j)E_{ij}$$

ולפי הלמה זה שווה ל-0. כעת נוכיח את הלמה:

סימון חוקים



נוסיף t נקודות חדשות, כך ש ערך הגרף ישמר $m=2n$ כלומר:

$$m+t+1=2(n+t)$$
$$t=m-2n+1$$

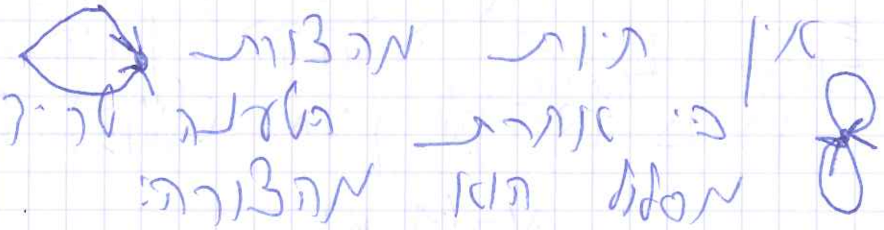
כעת נניח ש

$$\epsilon\vec{G}(x,y)=\epsilon G(x',x')$$

קל לראות את זה מדרך הבניה.

כלומר, הורדנו את הקודקוד למצב שדרגה=m, וגם רק
$\epsilon G(x,x)=0$

מקרה א' אין תוית מחזורית ~~...~~ ומחזורה



כי אחרת הטענה טריוויאלית כי כל מסלול הוא מחזורי:

חד=m ש $\dots (uv) \dots (uv) \dots e_1, e_2$

ואפשר להחליף בין (uv) אחד לשני, והצורה מתהפכת.

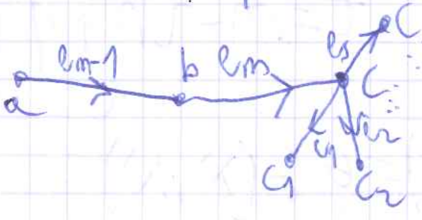
~~...~~ מקרה א' יש קודקוד שונה מ-X מדרגה 2
~~...~~ כלומר

נניח ש $c=a$ הגרף יהיה מחזורה:

~~אם נוריד את אקצועת מעגל אוילר הוא יהיה~~

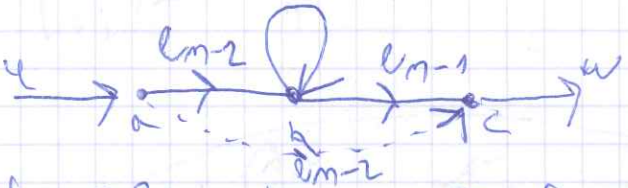
$$e_1 \dots \overset{e_{n-1}}{(ab)}\overset{e_n}{(ba)} \dots e_t$$

ולכן אם נוריד את $(ab)(ba)$ נקבל מעגל אוילר ב-G', קבל אותה צלעות. ולכן $\epsilon G(x,x)=\epsilon G'(x,x)=0$, ולכן לפי האינדוקציה המשפט נכון. נניח כעת ש $c\neq a$ אז המצב הוא:



נייצר $\hat{G}_1$ ע"י מחיקת b, e_m, e_{m-1} ו-e_1 ונוסיף
e_1 מ-a אל c_1 ולכן קבוצת המסלולים ב-G
זהה לקבוצת המסלולים באיחוד של $\hat{G}_2 \ldots \hat{G}_1$ הנוצרים
באותה הדרך. כל הצביעות נשמרות ושוב לפי האינדוקציה
המשפט נכון!

מקרה ג:



נוריד מ-G את הנקודה b ונוסיף את (ac)
אזי מסלול ב-G יהיה:

$$q(m-2)(m)(m-1)w$$

קל לראות שלאחר השינוי הצביעה נשמרת.

מקרה ד: נסמן p_i מספר הקודקודים מדרגה i ונע:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i p_i = 2|E| = 4n$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} p_i = |V| = n$$

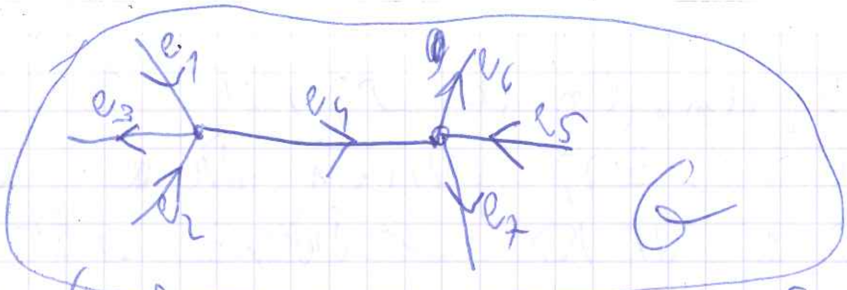
נכפיל את השניה ב-4, ונחסר:

$$\sum_{i=2}^{\infty} (i-4) p_i = 0$$

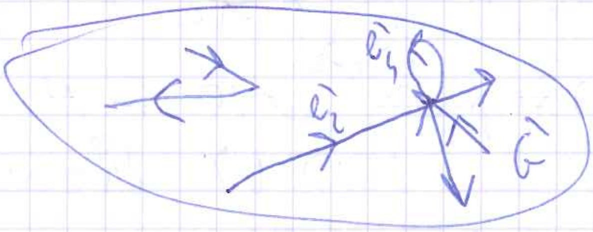
כנ"ח כיוון ש-$d(x) \geq 0$
מכאן אפשר לקבל ש-$n = p_4$ כי את שתי האפשרויות
הקודמות בדקנו.
אפשרות שניה היא ש-$p_4 < n$, ואפשר לבנות
דוגמה לקבל של סדרה המתאימה לגרף הזה

$$2, 4 \ldots 4, 6$$

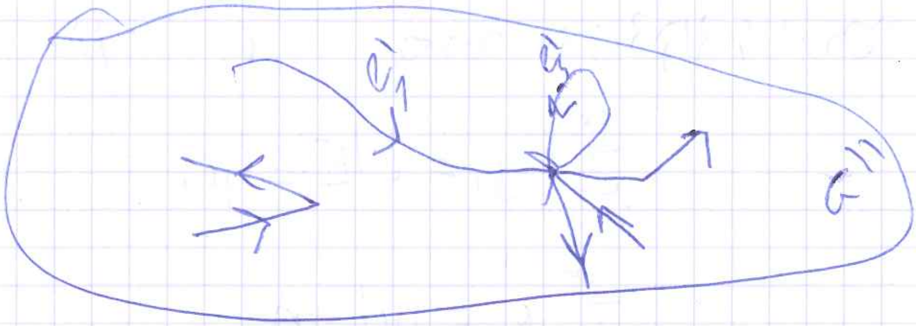
בשתי האפשרויות יש שני קודקודים שדרגתם
מ-4, ולכן המצב הוא:



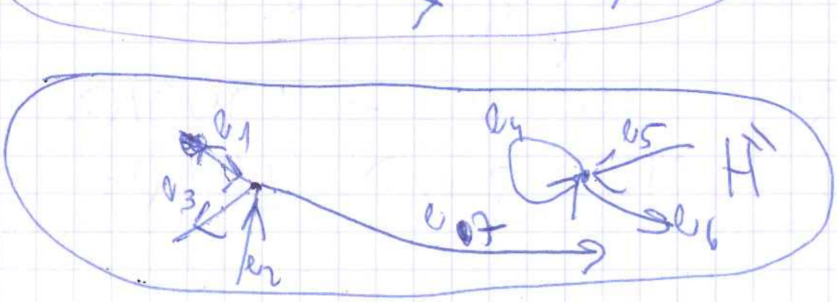
(את כל שאר השכנויות כפלנו)
כעת אין מסלול אוילר כלשהו עובר דרך (e_1, e_3)
~~בשמה~~ בסדור ל



וגם הוא עובר דרך (e_2, e_3) בסדור ל:



כל מסלול ב-G עובר ב-G' או ורק או ב-G'',
וכולתו נשמרת - אולם ב-G'', ו-G' יש יותר
מסלולים מ-G, כי ב-G אחד יש חילופים
ב-e_4 וכאן לא. נקבל כעת H', H'' שיכילו
את כל המיותרים ורק אותם.



כמו כן ל- G', G'', H, H' אפשר להפעיל את חלק 1

א וגם ההנחה כי הם מכילים קודקודים בגודל

וכן:

$$\epsilon(G,x,x)=\epsilon(G_1,x,x)+\epsilon(G_2,x,x)-\epsilon(H,x,x)-\epsilon(H,x,x)=$$

$$=0+0-0-0=0$$

מ.ש.ל.

משפט: יהי G גרף עם $p=|V|>3$ ונניח כי לכל $1\le n<\frac{p-1}{2}$

(Pósa) $F(n)=|\{v\mid d(v)\le n\}|<n$ אזי G המילטוני

הוכחה: כמו (במשפט Pósa) ~~הקודקוד~~ נניח בשלילה

ש- G אינו המילטוני, ונוסיף קשתות עד שנקבל

G^* שבו כל הוספה של קשת הופכת

אותו להמילטוני. לפי שלב ג' במשפט

עצם הקודם אפשר להסיק שבה"כ כל

הנקודות שדרגתם $\ge p/2$ קשורות ביניהן.

G^* > אין מעגל המילטון ולכן יש שתי נקודות

מדרגה $< p/2$ נגדיר m להיות המקסימום

של הדרגות שלהן. כלומר, $p/2>m$, יש נקודה

v כך ש- $d(v)=m$, וכן

$$d(w)>m \Rightarrow d(w)\ge p/2$$

הערה: אם $p=1 \bmod 2$ אז כל קודקוד שמקיים $d(v)=\frac{p-1}{2}$ קשור לכל הקודקודים שדרגתם גדולה מ- $p/2$

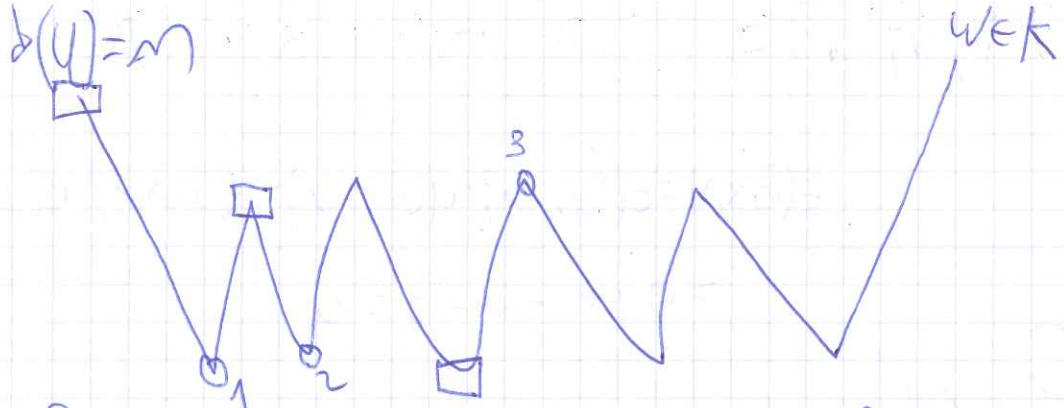
כעת נסמן $K=\{v\mid d(v)\ge p/2\}$ אז:

(1) $|K|=p-F(m)>p-m>p-p/2=p/2>m$

(2) כמו כן יש u כך ש- $d(u)=m$ לכן

קיימת $w\in K$ כך ש- $wu\notin E$

ב- G^* ולכן יש מסלול המילטון:



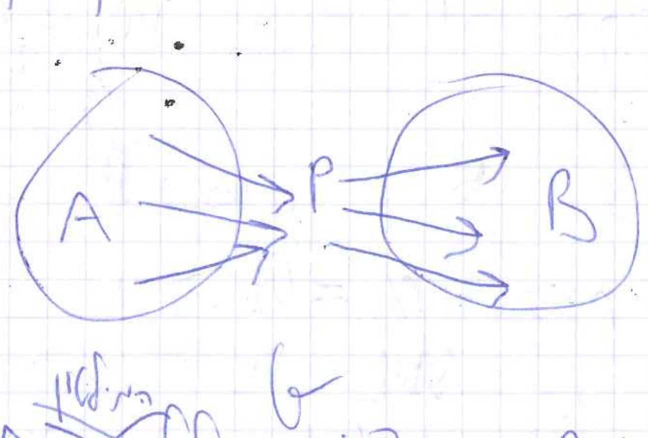
כך נגדיל את הנקודות שקשורות ל-y
לפי אותו טיעון כמו במשפט Pósa הקודם
נקבל שיש לנו קשת בין אחת מהנקודות
הקודמות לנקודות $1,2,3,\dots,m$ נסמן ב-$\square$
מספרם m $(\boxed{1},\dots,\boxed{m})$ לכן לפחות
אחת מהנקודות $\square$ שייכת ל-k ולכן
קשורה ל-w סתירה. לכן משפט Pósa
נכון.

מ.ש.ל.

טענה (הרחבה קטנה של משפט Pósa): אם $p\equiv 1\ (2)$, אז
מותר שיהיה גם $f\left(\frac{p-1}{2}\right)\le\frac{p-1}{2}$

טענה: בכל גרף מכוון שבו לכל $x,y\in V$ $xy\notin E$
גורר $yx\in E$. יש מסלול המילטון.

הוכחה באינדוקציה: עבור 1,2 הטענה קלה כעת
יהי $n=|G|$ נוציא מ-G ~~את~~ קודקוד p.

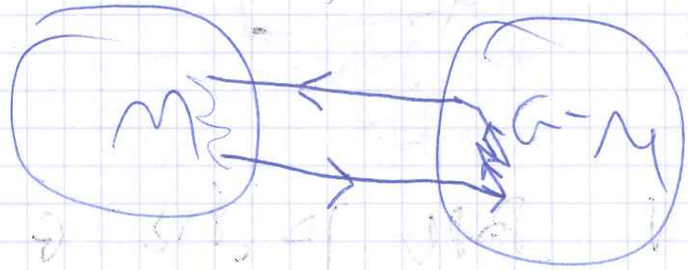


אם $A\neq\phi$, $B\neq\phi$ נמצא מסלול המילטון ל-A, ל-B ונחבר
הנ"ל דרך p, אחרת זה מקרה קל.

משפט: יהי G גרף [illegible] אפשר להפוך אותו לגרף מכוון שבו לכל קשת שאינה גשר יש כיוון כך שלכל x,y יש מסלול מx לy ומסלול מy לx.

הוכחה: יהי $M \subseteq G$ הגרף המקסימלי החלקי לG שאפשר להפוך אותו למכוון כנדרש.

M אינו ריק. נניח $M \neq G$ נתבונן ב$G-M$. G קשיר ולכן קיימת לפחות קשת אחת מM ל$G-M$. אם ~~[illegible]~~ היא גשר, אז אנו נעשה אותה דו-כיוונית ונוסיף לM את הנקודה ב$G-M$ שקשורה בגשר. סתירה למקסימליות M. אם ~~[illegible]~~ לא, אז היא חלק ממעגל ואז נקבל



~~דוגמה: יהי G גרף~~

הגדרה: יהי G גרף, $s,t \in G$ נאמר שקבוצה של קודקודים מפרידה בין s לt אם היא קבוצה של קודקודים שאם נוציא אותם מG לא יהיה קשר בין s לt.

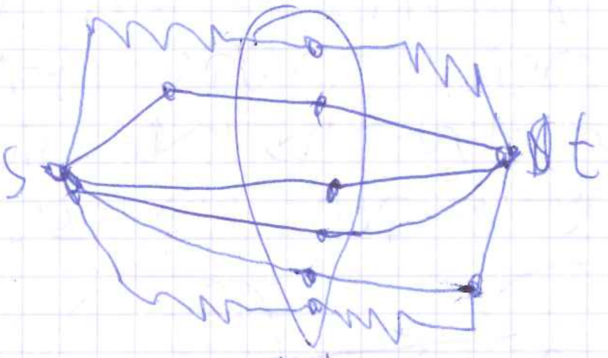
משפט (מנגר): יהי G, $s,t \in G$ לא שכנים. יהי k הסדר של הקבוצה המינימלית המפרידה ביניהם. אז יש k מסלולים זרים מs לt.

הוכחה: נסמן m מספר המסלולים המקסימלי הזרים בין s לt.

ברור ש: $m \leq k$

[illegible]

נניח בשלילה שקיים גרף H או אחד כזה:
~~אם נוריד את v שכנה משותפת~~ נתקדם דרגת
המינימלי G שבו מתקיים אחד מהם
למספר הקשתות. אז G לא מקיים v
שכנה גם של s וגם של t, כי אז נוריד אותה
ונקבל קונטרדיקציה סתירה.
כעת תהי K הקבוצה מקסימלית מספר
k בין s ל-t. נניח שבין s ובין t שכנים
של כל אחד k. כלומר המצב:



$|K|=k$

__טענה__ יהי G גרף, כך שלכל v $d(v)=$ ..., G קודקודי
אז גרף G מקיים את השערת ...
__הוכחה__ ... - מקרה פרטי של ... טרידוויאלי ...
__הגדרה__ יהי T עץ, נגדיר ND להיות קבוצת
הוקטורים שמגדירים מספרים ~~...~~ לקודקודים
בכל קומפוננטה שנוצרת ~~#~~ מהורדת הקודקוד
שאינו לקבה.

__דוגמה__

$T_1 \ncong T_2$, ~~...~~ T_x

$ND(T_1)=ND(T_2)=\{$ ~~...~~ $(6,1,1),$
$(5,3,1),(5,3),(6,2),(7,1)\}$

משפט (מנגר): (menger) המספר המינימלי של נקודות המפריד בין
שתי נקודות לא מחוברות בגרף שווה למספר המקסימלי
של מסלולי s-t זרים.

הוכחה: יהי k המספר המינימלי של נקודות המפרידות בין
s ו-t. קל לראות שלא יכולים להיות יותר מ-k
מסלולי s-t זרים. עבור $k=1$, טריוויאלי. נניח
כי $k>1$ שעבורו המשפט אינו נכון, ונסמן ב-h
את ה-k המינימלי כזה. יהי F הגרף המינימלי
מבחינת קודקודים שבו יש h נקודות מפרידות
בין שתי נקודות מסוימות, אך יש פחות ממש מ-h מסלולים
זרים בין אותן שתי נקודות. נוריד מ-F קשתות
עד שנקבל גרף G שבו יש צורך ב-h נקודות כדי
להפריד בין s ל-t, אך לכל קשת x ב-G, מספיקות
$h-1$ נקודות כדי להפריד בין s ל-t ב-$G\setminus x$. כעת
לכל x קשת ב-G נגדיר $S(x)$ להיות הקבוצה כלשהי
של $h-1$ נקודות המפרידה בין s ל-t ב-$G\setminus x$. לכן לכל x
$G\setminus S(x)$ מכיל לפחות מסלול s-t אחד. משום שיש
צורך ב-h נקודות כדי להפריד בין s ל-t ב-G.
נניח כי מסלול s-t בגרף מכיל את הקשת $uv=x$ כי הוא
כבר אינו מסלול ב-$G\setminus x$ ולכן $u,v\notin S(x)$, שאם כן
$u\neq s,t$ ואז $S(x)\cup\{u\}$ מפרידה בין s ל-t ב-G.

I. אם יש נקודה w שכנה גם של t וגם של s אזי $G-w$ דורש
$h-1$ נקודות כדי להפריד בין s ל-t, ולכן יש בו $h-1$ מסלולי
s-t זרים, ויחד עם swt נקבל בו h מסלולי s-t
זרים. סתירה ולכן לא קיימת נקודה w כזו.

II. כעת תהי W קבוצה של h נקודות המפרידה בין
s ל-t ב-G. נגדיר מסלול s-W להיות מסלול בין
s ל-w_i עבור $w_i\in W$ כלשהו, שאינו מכיל שום נקודות נוספות
של W. נקרא לאוסף כל מסלולי s-W ו-W-t P_s, P_t

בהתאמה. אזי כל מסלול s-t מתחיל באיבר של P_s ונגמר
באיבר של P_t, כי כל מסלול כזה מכיל נקודה של W
ולכן, למסלולים ב-P_s וב-P_t יש בדיוק את הנקודות של
W, ואותן בלבד, משום שכל $w_i \in W$ הוא בתוך מסלול בלעדי
לכל אחד מ-P_s ו-P_t, ולכן אם ~~היתה~~ היתה נקודה בלעדית
משותפת למסלול W-s ומסלול W-t שאינה ב-W, אזי
היה מסלול s-t שאינו עובר ב-W, סתירה. לבסוף, אז ש
$P_s - W = \{s\}$ וגם $P_t - \{w\} = \{t\}$ כי אחרת גם בלום P_s
~~בלום~~ הקשתות $\{w_1t, \dots, w_ht\}$ וגם P_t בלום הקשתות
$(sw_1, \dots, sw_h)$ היו גרף G עם פחות נקודות מ-G,
שבהם s,t היו לא שכנות שיש צורך להוציא h
נקודות כדי להפריד ביניהם, ולכן לכל אחד מהם יש
h מסלולי s-t זרים, וכשמצרפים את חלקי ה-W-s
וה-W-t שבמסלולים האלו מקבלים h מסלולי s-t
זרים ב-G. סתירה. ולכן כל אוסף W מגודל h
שמפריד בין s ל-t הוא שכן כולו או של s או
של t.
כעת יהי $P = \{s, u_1, \dots, t\}$ המסלול s-t הקצר ביותר ב-G.
ויהי $x = u_1u_2$. לפי I $u_2 \neq t$. תהי $S(x) = \{v_1, \dots, v_{h-1}\}$ כמקודם.
לפי I $u_1t \notin G$ ולכן לפי II נצ״ר $W = S(x) \cup \{u_1\}$ ונקבל
$sv_i \in G$ לכל i, ולכן לפי I $v_it \notin G$ לכל i. כעת נצ״ר
ב-II $W = S(x) \cup \{u_2\}$ ונקבל משום ש-$v_it \notin t$ ש-לכל $w \in W$
$sw \in G$, ולכן בפרט $su_2 \in G$ בסתירה לבחירת P כמסלול
s-t הקצר ביותר.
מ.ש.ל.

טענה: קדקודת x ~~נ~~ נקודות 2 הן אם רק אם כל שהוא אומרים:

① לכל וקטור לפחות 2 קומפוננטות ~~...~~ איזה? זה כל וקטור שקל M.

② סכום הערכים לכל הוקטורים שווה.

③ אם נסמן m_i להיות הערך המקסימלי לוקטור v_i ~~...~~ אז: אין יותר קדקוד וקטור אחד כך ש $m_i<\frac{n}{2}$ או שיש קדקוד 2 וקטורים כך ש $m_j=m_k=\frac{n}{2}$. לכל שאר הוקטורים, בשני המקרים $m_n>\frac{n}{2}$

④ יהי $x\neq 1$, נסמן $k(x)$ להיות מספר הפעמים ש x מופיע $>$ ~~...~~ 2. אז:

$$k(x)=k(n-x)$$

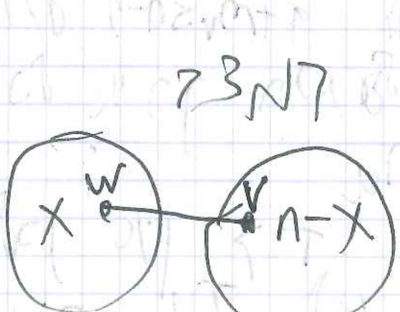
<u>הוכחה</u> 2 הולך אם $\Leftarrow$ ①, ② טריוויאלי.

$\Leftarrow$ ③: נגדיר $M=\min_i m_i$, $\mathcal{C}=\{c\mid m_c=M\}$:
אז: ב-$\mathcal{C}$ יש נקודה אחת או ~~...~~ 2 והם קשורות ביניהם. <u>הוכחה</u>: ניקח את הגרף המושרה על $\mathcal{C}$. נניח שיש ~~...~~, נקודה t שמחוץ $\Leftarrow$ אז $M>m_t$. לכן אין נקודה כזאת. לכן $\mathcal{C}$ יכול להיות רק

•—• או •

כעת אם ~~...~~ $|\mathcal{C}|=2$ אז $M=\frac{n}{2}$, ואם $|\mathcal{C}|=1$ אז
$M<\frac{n}{2}$

$\Leftarrow$ ④ נשתמש ב-3?

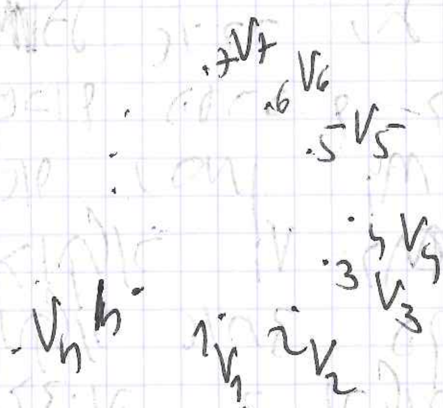


לכל ~~...~~ נקודה שלה יש קומפוננטה בגודל x (v) מגדירה נקודה

ש~~[illegible]~~ שבה קומפוננטה מדרגה x אחת, ולהיפך. ולכן

$$k(x)=k(n-x)$$

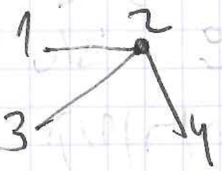
③ ⇐ נניח $|S|=n$. נצ"ר



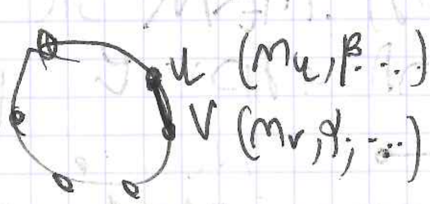
כעת, ע"פ תנאי ② לכל i יתכן שיש דוקטור אחד לi X ועל X-n. נקודה התאמה כשהיא בין הx-i לבין ה(n-x)-i. נשאר רק המקודות להתאים להתאמה לפי כל הx-ים.

כעת נוסיף לכל קודקוד קודקודי מדרגה 1 להתאים. לדוגמה: ה $S=\{(7,1,1),(3,3,3),(1,1,1)(1,1,1)\}$

אזי הגרף שנבנה יהיה:



נקרא לגרף שנבנה T. נניח שיש בT מעגל



u, v קשורות, ולכן קיימות α,β ל-m_v כך ש-$n=\beta+\alpha$

אבל $\alpha<\frac{n}{2} \Rightarrow \beta>\frac{n}{2} \Rightarrow \beta=m_u$, ולכן לה"כ $n=m_u+\alpha$,

אבל $n-1\geq m_v+\alpha$ ולכן $m_v<m_u$ וזה ממשיך

לכל אורך המעגל, ולכן

$m_a<m_a$ סתירה.

ולכן אין לT מעגלים

כעת נניח שT לא קשיר. אזי הוחת הקומפוננטות

לT יש מעבר מ ש ~~[illegible]~~

נסמן קומפוננטה כזו T_1 ב-T יש קודקוד
v כך ש-v_m מינימלי. התהליך על v הוא:

$(v_m, \dots)$

שהולך להפרשים דרך

תרגיל: יהי T עץ על n נקודות. כמה וקטורים שונים יכולים להיות דומים שלו.
(תת שאלה: $\left[\frac{3}{4}n\right]-1$ הוכיחו)

הגדרה: H-פירוק (H-decomposition): נאמר כי לגרף $G(V,E)$ יש H-פירוק אם הוא ניתן להיפרד לגרפים זרים בקשתות כך שכל אחד מהם איזומורפי ל-H.
נסמן $H|G$

טענה: תנאי הכרחי לכך ש-$H|G$ הוא $|E(H)| \,\big|\, |E(G)|$

טענה: " " " $\Delta(G) \geq \frac{|E(G)|}{|E(H)|}$

תרגיל: יהי G גרף קשיר. אז: $P_3|G$ אמ"מ $|E(G)| \equiv 0 \pmod 2$

תרגיל: $t \,\big|\, |E(K_{m,n})| \Rightarrow$ אפשר לפרק את $K_{m,n}$ ל-t חלקים איזומורפיים

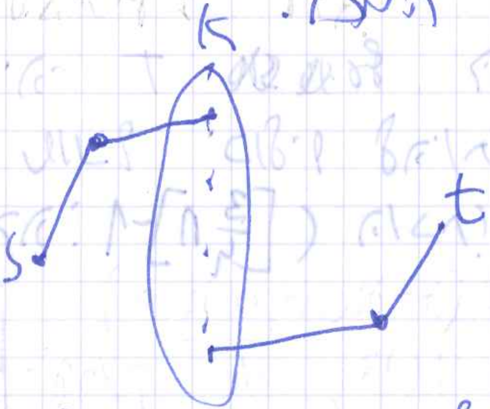
תרגיל: יש הוכחה ש... $T_1, \dots, T_{n-1}$ ... שמכסים את K_n

הוכחת הטענה לגבי הגרף המשותף:

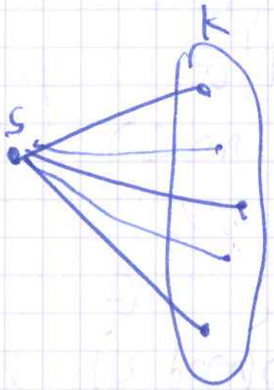
נניח שהטענה אינה נכונה. ניקח גרף G הסותר את הטענה וגם מינימלי; (מספר הקשתות מינימלי) נניח שקיים. יש נקודה v הקשורה גם ל-u וגם ל-w. נמחק את הנקודה v וקיבלנו גרף G' שהוא ~~לא~~ לא סותר את הטענה. סתירה למינימליות של G.

(5) ~~נניח~~ תהי: $|K|=k$ קבוצה מפרידה בין s ל t. אזי לא יתכן שגם s וגם t אינם קשורים ~~ל~~ לכל נקודות K.

כי: נניח המצב:



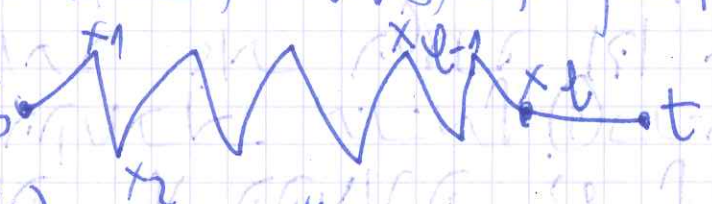
אזי: נחליף את החלק של s במעבר בין K ל s ע"י



~~מצאנו מסלול קצר יותר מינימלי~~
זהו גרף יותר קטן ולכן עפ"י המינימליות יש k מסלולים זרים בין s לt דו.
כעת נחליף את K המסלולים הזרים שהגיעו עד t (דרך v) ונקבל סתירה

למינימליות.

(3) נתבונן במסלול מינימלי ביניהם לt: כדי:



~~אזי~~ אזי: ע"פ (1): $x_k,t\notin E(G)$

וכן מינימליות $x_2s\notin E(G)$

בה"כ נניח x_1x_2 ב-G ממינימליות G
נובע שקיימת קבוצה $|W_0|=k-1$ המפרידה
בין s ל-t ב-$G-x_1x_2$
לכן הקבוצה $W_0\cup\{x_1\}=W_1$ מפרידה בין s ל-t
ב-G
כמו כן $W_2=W_0\cup\{x_2\}$
וכן $|W_1|=|W_2|=k$
כעת לפי (2) $x_1t\notin E(G) \Leftarrow$ s קשורה לכל
הנקודות של W_1
וכן $x_2s\notin E(G) \Leftarrow$ t קשורה לכל הנקודות
של W_2.
ולכן s ו-t קשורות לכל הנקודות של
W_0, $|W_0|=k-1\geq 1$ ולכן יש v כך ש-
$vt, vs \in E(G)$ בסתירה ל-(1).
מ.ש.ל.

ג) כלל כעת בעיית החתונה!
מהו תנאי הכרחי ומספיק לכך שתהיה
קיימת פונקציית בחירה חח"ע ל-family
$A_1 \dots A_s$

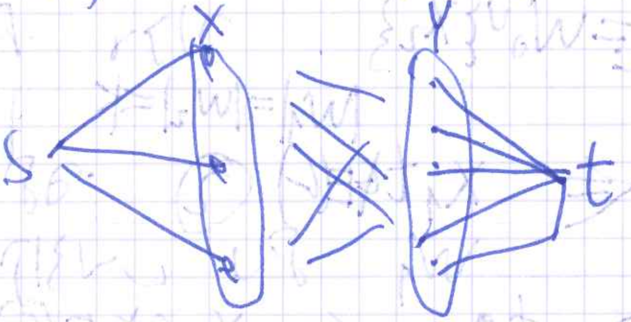
__טענה:__ תנאי הכרחי ומספיק כזה הוא שגודל
של כל איחוד של חלקי מה-family יהיה
גדול שווה ממספר הקבוצות באיחוד:

$$\forall J\subset I \quad \left|\bigcup_{i\in J} A_i\right|\geq |J|$$

כאשר $I=\{1,\dots s\}$

__הוכחה:__ ההכרחיות - טריוויאלית.
__מספיקות:__ הבעיה שקולה לבעיה הבאה
בקבוצות הגרפים: יהי G גרף דו-צד
דו-צדדי עם X ו-Y. כאשר $X=\{1,\dots s\}$

ג) $Y=\bigcup_{i=1}^{s} A_i$ ~~אם~~ נקודה $y\in Y$ קשורה ל $i\in X$
~~אמ״מ~~ אמ״מ $y\in A_i$. והגדרה: הוא קיים
$|X|$ קשתות ברשת בין X ל Y.
נבנה מגרף הזה מתקיים התנאי
שלנו. נוסיף לו שתי נקודות s, t:



תהי $K=X_1\cup Y_1$ קבוצה מינימלית מפרידה
בין s ל t. כאשר $X_1\subset X$, $Y_1\subset Y$
K מפרידה $\Rightarrow$ כל מסלול $s-t$ העובר דרך $Y-Y_1$
עובר דרך X_1
K מפרידה $\Rightarrow$ כל מסלול $s-t$ העובר דרך $X-X_1$
עובר דרך Y_1
כאשר $\Gamma(x)$ הוא הקבוצה המתאימה לנקודה
x את כל השכנים שהיא קשורה

$$\Gamma(X-X_1)\subset Y_1$$

ולכן

$$|\Gamma(X-X_1)|\le|Y_1|$$

שבגלל שנתון ההנחה היא:

$$|X-X_1|\le|\Gamma(X-X_1)|$$

(זהו התנאי שצריך להוכיח את מספיקותו).

ולכן

$$|X_1\cup Y_1|=|X_1|+|Y_1|\ge|X_1|+|X-X_1|=|X|=s$$

ולכן כל הקבוצה מפרידה מכילה לפחות s
אלמנטים, ולכן יש לפחות s מסלולים זרים $s-t$
משמ

יהי G כל פרט. דרגת הכללה: נתונות $\{A_i\}_1^n$

$\{B_i\}_1^n$ קבוצות של קבוצות. צריך למצוא

פונקציית בחירה חח״ע $\{A_i \cap B_i\}_1^n$: $f: \bigcup_{i=1}^n A_i \cup B_i$

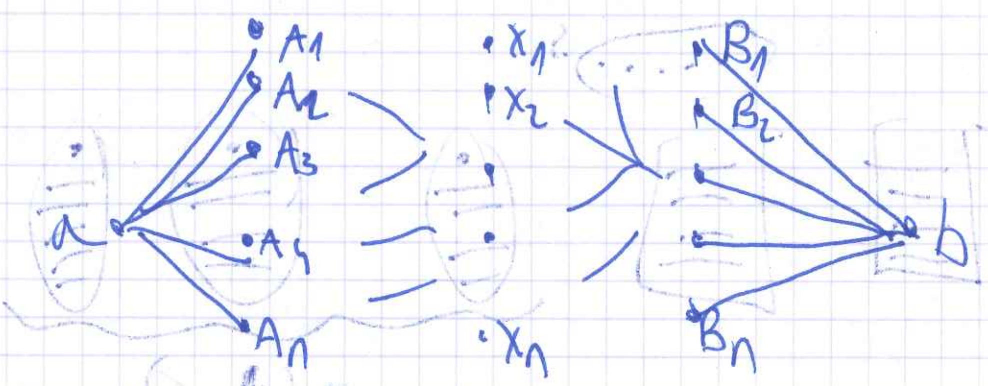
פונקציה כזאת תסומן CSDR.

<u>משפט</u>

$\exists CSDR \iff \forall I,J \subset [1..n] \quad |\bigcup_I A_i \cap \bigcup_J B_j| \ge |I|+|J|-n$

<u>הוכחה</u> הכרחיות: לא קשה

מספיקות: נבנה את הגרף המוגדר!



נחבר x_i קשת לכל ה־A_j וה־B_k המכילים אותו. תהי

$K = A \cup X \cup B$

הקבוצה מפרידה.

K מפרידה $\Leftarrow$ כל מסלול היוצא מ־$\bar{A}$ ל־$\bar{B}$ עובר דרך X

נניח $|A|=r$, $|X|=s$, $|B|=t$ אנו מנסים למצוא את $r+s+t$.

$|\Gamma(\bar{A}) \cap \Gamma(\bar{B})| \le |X|$

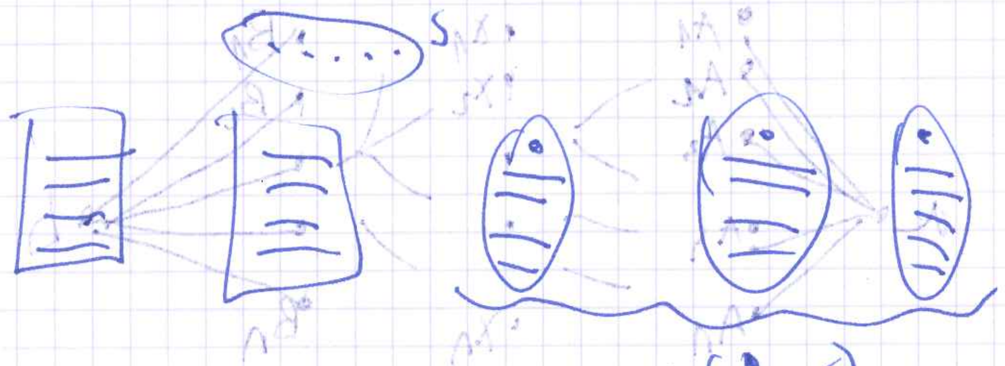
מתנאי ההוכחה שקבלנו:

$|X| \ge |\Gamma(\bar{A}) \cap \Gamma(\bar{B})| \ge n-r+n-t-n = n-r-t$

ולכן $n \geq s+t$ והמשך כמו בהוכחה הקודמת.
מש"ל

משפט (TUTTE) נסמן $q(G)$ שווה מספר הקומפוננטות שמספר קדקודיהן הוא אי-זוגי בגרף. בגרף ניתן למצוא בגרף כיסוי ע"י —— שקודקודיהן זרים אמ"מ $\forall S \subseteq V(G) \; q(G-S) \leq |S|$ □

הוכחה: כנ"ל ניתן למצוא כ"פ. נסמן לקומפוננטות זוגיות וקומפוננטות O אי-זוגיות. אז:

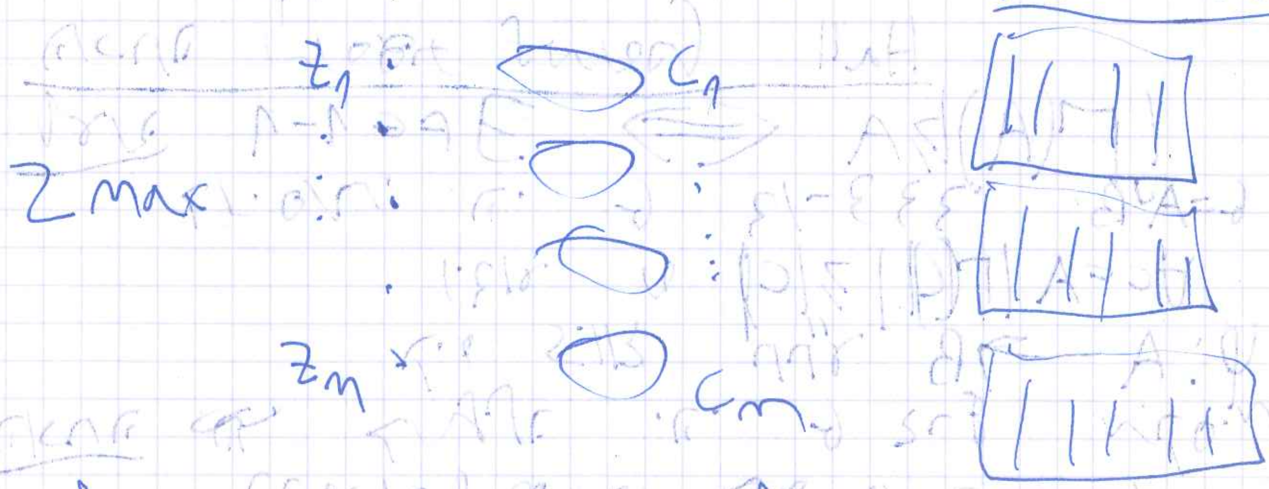


קל לראות שצריך להיות $|S| \geq q(G-S)$
כעת נניח ש $\forall S \subseteq V(G) \; q(G-S) \leq |S|$ אז: צ"ל
תהא שנבחרת מקסימלית. קיימת Z
כך ש $|Z| = q(G-Z)$ אז: נסמן $|Z|=m$ ונטען:
① לכל קומפוננטה זוגית ב $G-Z$ יש
זיווג פנימי. הוכחה באינדוקציה:
תהי D_j אחת הקומפוננטות הזוגיות ב $G-Z$
שבה אין זיווג פנימי. תהי $S_j \subseteq V(D_j)$ אז:

$$q(G-(Z \cup S_j)) = q(G-Z) + q(D_j - S_j) \leq |Z| + |S_j|$$

נובע כי $|Z| = q(G-Z)$ (נובע קודם את Z ואז S_j)
ולכן $q(D_j - S_j) \leq |S_j|$ (א"ז) והאינדוקציה נקבעת בשלמותה

② אם בנוסף מכל קומפוננטה אי-זוגית שהיא C_i
נקודה $c \in C_i$ כלשהי אם מוציאים $C_i - \{c\}$ ניתן
לצמצם את ה-Z המקסימלי שמוגדר
לגודל B כך ש $|Z| = q(G-Z)$ כעת ניתן
להגדיל: קיימת קומפוננטה אי-זוגית C_i וכן
$S_i \subset C_i - \{c\}$ כך ש $q((C_i-\{c\})-S_i) > |S_i|$ אבל מתוך
זוגיות $C_i - \{c\}$ יוצא שקיים
$$q((C_i-\{c\})-S_i) \geq |S_i|+2$$
כעת, לפי הנחה על G
$$|Z|+|S_i|+1 \geq q(G-(Z\cup\{c\}\cup S_i)) = q(G-Z)+q(C_i-\{c\}-S_i)-1 \geq$$
(צריך להוריד אחד כי פירקנו את C_i ולא צריך לספור אותה פעמיים.)
$$\geq |Z|-1+|S_i|+2 = |Z|+|S_i|+1$$
ולכן $q(G-(Z\cup\{c\}\cup S_i)) = |Z|+|S_i|+1$
בסתירה למקסימליות של Z
הצעה למצב:



כאשר גרפים מחולקים לזוגות שניתן לחלק
את C_i לכל $\{c\}$ שנוציא מהם
③ צ"ל שניתן להתאים זיווג חח"ע לכל Z_i
$C(Z_i) \in C_j$ כך ש $C(Z_i)\in C_j, C(Z_k)\in C_j \Rightarrow i=k$

צהו הדיוק המשפט הקודם: ~~A⊆~~

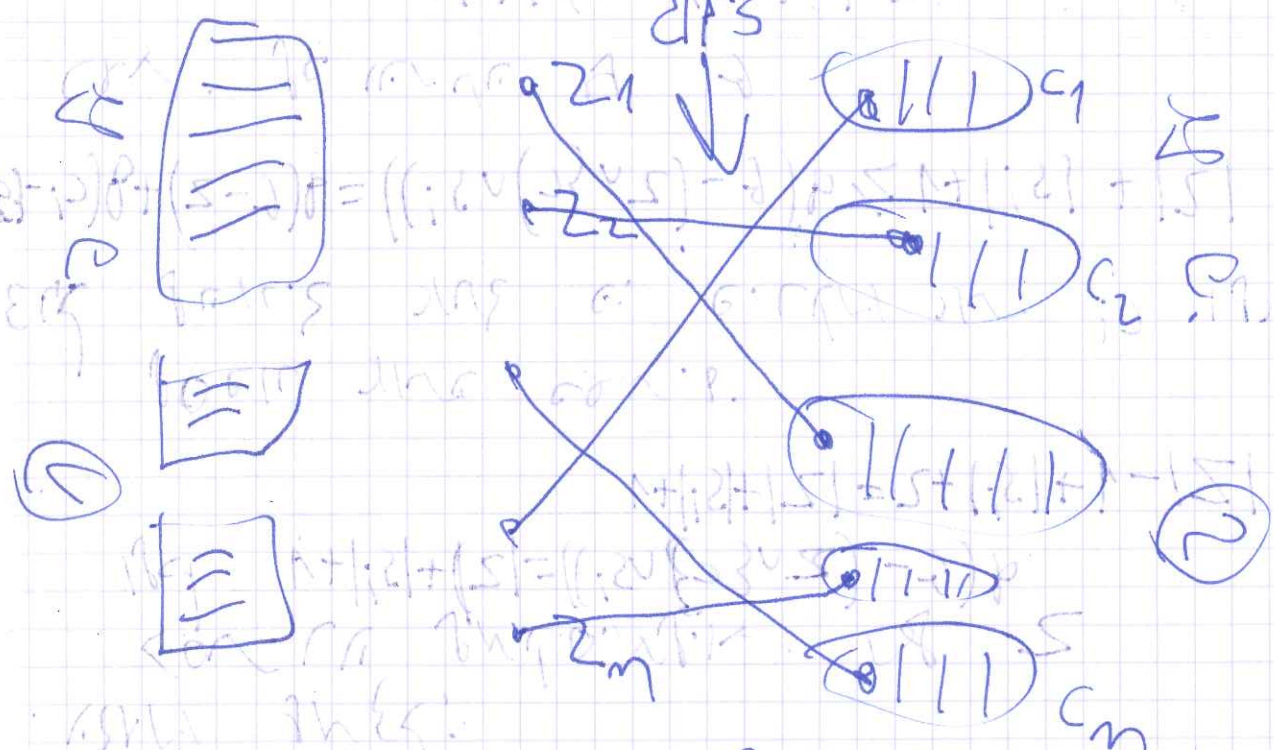
~~(c) נסמן $B=\Gamma(A)$ ונקבל~~

~~$|B| \geq q(G-B)$~~

יהי $A\subseteq\{C_i\}$ נסמן $B=\Gamma(A)$ ונקבל

$$|\Gamma(A)|=|B|\geq q(G-B)=q(G-\Gamma(A))\geq|A|$$

מתקיים תנאי המשפט הקודם, ולכן קיים זיווג מלא כנדרש:



הכללה נוספת למשפט Hall

משפט: $|\Gamma(A)|\geq A \iff \exists F$ 1-1

דו-סדרי: יהי G דו-צדדי $G=A\cup B$, $|A|=B$,

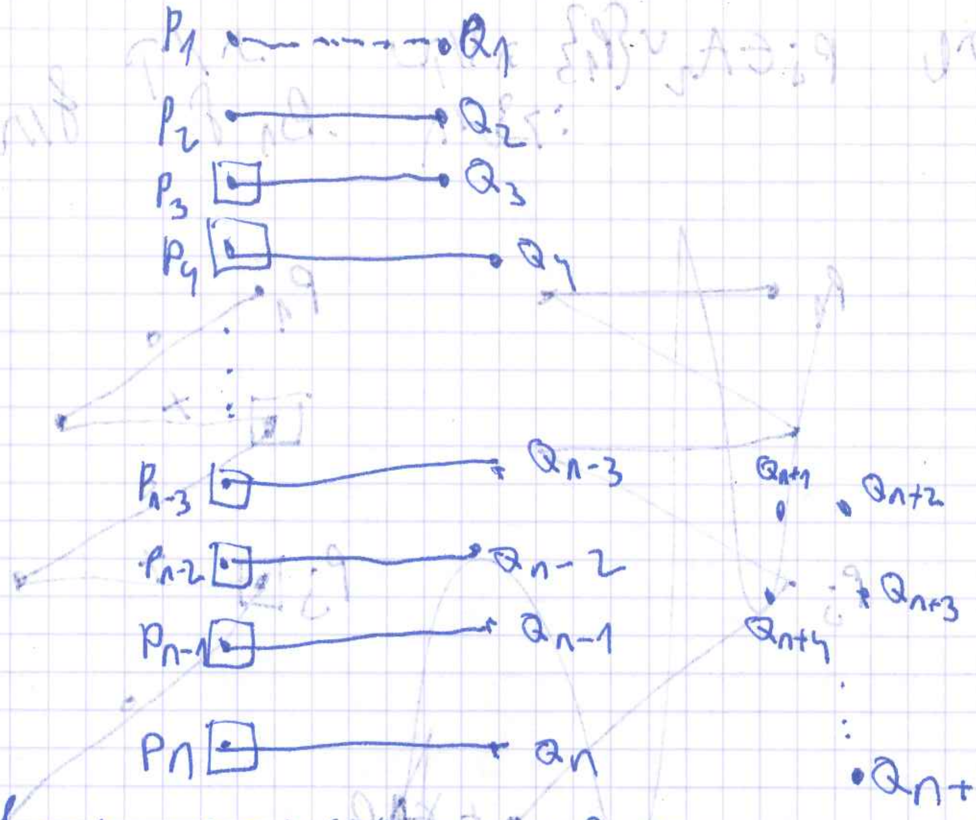
ונניח ש $\forall C\subseteq A\ |\Gamma(C)|\geq|C|$ אז:

קיים זיווג מושלם $\varphi: A\longrightarrow B$

הוכחה: ~~נניח~~ בשלילה: יהי G גרף מקסימלי (מקסימום

הקשתות ~~שנותן~~ שמקיים את ~~התנאי~~)

אך לא קיים בו זיווג מושלם. G יהיה!



~~נניח את הראשון~~ בה"כ $P_1Q_1 \notin G$ נוסיף זווית זו

ל-G ונקבל זיווג. בה"כ הוא הראשונה

כמו שמתואר. נגדיר מסלול שזור להיות

מסלול המתחיל ב-P_1 וזורת:

$$P_1 Q_{i_1} P_{i_1} Q_{i_2} P_{i_2} \ldots\ldots Q_{i_n} P_{i_n}$$

נסמן ב-$\square$ את הקודקודים שאפשר להגיע אליהם ע"י מסלול כזה.

נסמן $A_1 = A \setminus \{P_1\}$, $A_2=\{\square$ הנקודות$\}$

$B_1=\{Q_i \mid P_i \in A_1\}$, $B_2=\{Q_i \mid P_i \in A_2\}$

טענה: ① $A_2 \neq \emptyset$ ~~אחרת~~. כי [illegible]

$|\Gamma(\{P_1\})| \geq 1$ כלומר P_1 קשור לנקודה

כלשהי, ואם $Q_j \in B_1$ אז: מיידית

$A_2 \neq \emptyset$ ואם $Q_j \notin B_1$ נקבל של G

זיווג גדול יותר. סתירה.

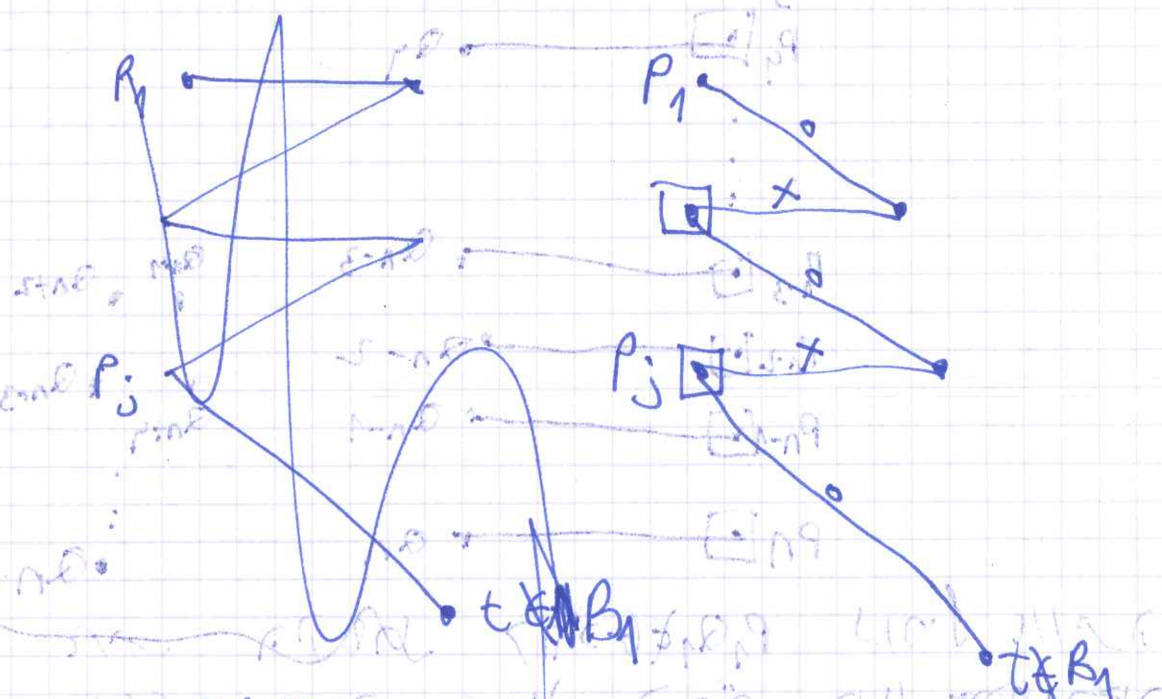
② $\Gamma(A_2 \cup \{P_1\}) \cap (B_1 - B_2) = \emptyset$ מיידית מהגדרה

מסקנה:

$$|\Gamma(A_2 \cup \{P_1\})| \geq |A_2| + 1 :$$

כלומר

ולכן קיימת שקולה $p_j \in A_2 \cup \{p_1\}$ שמתאימה שמחובר ל-B_1. המצב:



קל לראות שאפשר לקבל זיווג את הקשתות המסומנות כx ולהוסיף את המסומנות כo ולקבל זיווג מלא.
מש"ל.

תהי G חבורה מסדר nm ו-$H<G$ מסדר m. יהיו

קוסטים שמאליים: $\boxed{H}$ $\boxed{C_1}$ ... $\boxed{C_{n-1}}$

קוסטים ימניים: $\boxed{H}$ $\boxed{C'_1}$ ... $\boxed{C'_{n-1}}$

השאלה היא האם קיימת קבוצה שתהיה גם קבוצה מייצגת של הקוסטים הימניים וגם הקוסטים השמאליים. לשם כך נסמן כמשפט הקודם הסימונים המתאימים הקודם: יהיו I, J קבוצות של קוסטים ימניים ושמאליים בהתאמה. A כלומר:

$$\Big|\bigcup_I C_i \cap \bigcup_J C_j\Big| = \Big|\bigcup C_i\Big| + \Big|\bigcup C_j\Big| - \Big|\bigcup_I C_i \cup \bigcup_J C_j\Big| \ge |I|n + |J|n - n\cdot n =$$

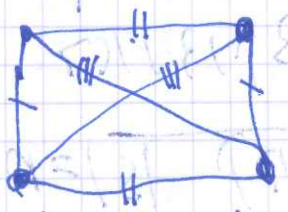
$$= n(|I|+|J|-n) \ge |I|+|J|-n$$

וזהו התנאי המספיק ע"פ המשפט, ולכן קיים מצ'ינג כנדרש

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u> 1-factorization - נאמר על גרף G שיש לו 1-fact אמ"מ יש לו סדרה של זיווגים זרים המכסים את כל קשתות הגרף. (זיווג הוא קבוצה של קשתות שהקודקודים הקצוות לקשתות זרות הקשתות המתקבלת כיוונים) 1-factorization (נקרא זיווג מלא)

<u>דוגמא</u>: K_4:



הזיווגים הם:

<u>טענה</u>: ל-K_{2n} יש 1-factorization

הוכחה נתאר למשל למקרה של K_8: תחילה את הקודקודים ל-K_8. נבנה בדרך הבאה

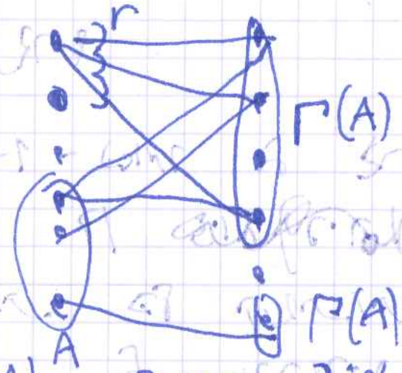
16	25	34	78
27	36	45	18
31	47	56	28
42	51	67	38
53	62	71	48
64	73	12	58
75	14	23	68

מוסיפים — 3 קדימה
1 ברק
8-ל

בשורה הראשונה - הפרשים הם 5
" " השניה " " 3
" " השלישית " " 1

<u>טענה</u> (משפט) (König): יהי $K_{n,n}^{(r)}$ גרף דו-צדדי
שבו לכל נקודה קשורות r קשתות. אז
יש בו זיווג מלא (כלומר r רגולרי גרף).

<u>הערה</u> G



כדי להראות שתנאי הול: $|\Gamma(A)|\geq|A|$ כי
אם $|\Gamma(A)|<|A|$ נקבל שיש $v\in\Gamma(A)$ כך ש
$r<d(v)$). ולכן יש לG זיווג. ננקה אותו!
ונמשיך באינדוקציה.

<u>טענה</u> יהי $|S|=n$ קבוצה. תהי A קבוצה
כל התת-קבוצות של k איברים, כל B
$n-k$ איברים, אז הקבוצות האלה ניתן לסדר
אותם בזוגות:

$$\begin{array}{ccc}
B_1 & \supset & A_1 \\
B_2 & \supset & A_2 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
B_{\binom{n}{n-k}} & \supset & A_{\binom{n}{k}}
\end{array}$$

(כל B_i מכילה את A_i)

פתרון: על הקבוצה הסימולטנית. נבנה
B_i קשור ל A_j אם $A_j\subset B_i$. קל
לראות שכל קודקוד בגרף $\{B_i\}\cup\{A_j\}$
קשור לדרגה $\binom{n-k}{n-2k}$, ומשתמשים לפי
המשפט הקודם.

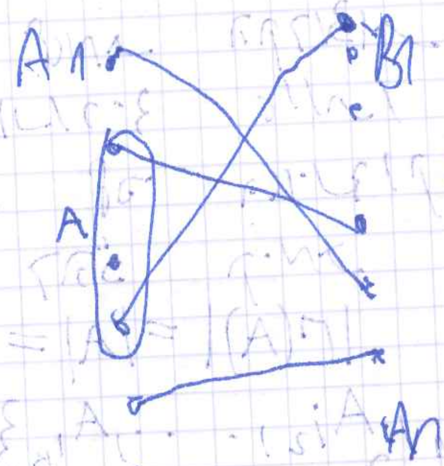
הגדרה: ~~[illegible]~~ מטריצה $(a_{ij})_{n\times n}$ נקראת סטוכסטית כפולה

אם: סכום כל שורה וכל עמודה ב-A הוא 1.

טענה: לכל מטריצה A כנ"ל הדטרמיננטה של (a_{ij})

שונה מ-0 [illegible]

הוכחה: יהי $G(A)$ הגרף



כאשר B_j קשור ל-A_i אמ"מ $a_{ij}\neq 0$.

~~[illegible]~~ צריך להראות כי איבר בפרמוטציה A ב-$\det(a_{ij})$

$\prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$ מופיע אם"ם [illegible] כפלה

המוגדרת מ-0, כאשר σ פרמוטציה:

זוג אמ"מ לכל i ש-$a_{i\sigma(i)}\neq 0$, התאמה

אמ"מ יש בגרף זיווג מושלם.

עבור $A\subset\bigcup_{i=1}^{n}\{A_i\}$

$$|A|=\sum_{i\in A}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}=\sum_{i\in A}\sum_{\substack{j=1\\a_{ij}\neq 0}}^{n}a_{ij}=\sum_{i\in A}\sum_{j\in\Gamma(A)}\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\in\Gamma(A)}a_{ij}=\sum_{j\in\Gamma(A)}\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\sum_{j\in\Gamma(A)}1=|\Gamma(A)|$$

ונקבל את התנאי של Hall. סוף הוכחה.

זיווג.

ההוכחה הסטנדרטית למשפט Hall:

טענה: $|\Gamma(A)|\ge|A|$ תנאי מספיק לקיום זיווג.

הוכחה:

הוכחה משפט: מ.נציגים לקבוצה של קבוצות

$A_1 \ldots A_n$. ההוכחה באינדוקציה:

שריקאלא

① עבור $n=1$

② נניח עבור $1 \ldots n-1$ המשפט נכון.

כעת נניח שלכל $A \subset \{A_i\}$ מתקיים $\Gamma(A) \geq |A|+1$.

אזי לוקחת הקבוצה נבחר שרירותית מ.נ

אותו ונוריד אותו מכל שאר הקבוצות.

כעת לפי האינדוקציה משלימים את ההוכחה.

ולכן להניח קיימת $A \subset \{A_i\}$ כך ש

$|\Gamma(A)| = |A| = k < n$. נתמקד ב A:

$$A = \{A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_k}\}$$

לפי האינדוקציה אפשר לבחור מ.נציגים

מ $\{A_{i_t}\}_{t=1}^{k}$. נתמקד ב A^c. מכל קבוצה

ב A^c נוריד את הנציגים שבחרנו

בקבוצות נסמן את הקבוצות מה שנותרו כ

$A'_{k+1}, \ldots, A'_n$. כעת: הקבוצות הנ"ל מקיימות

את התנאי. הוכחה: הנ"ל: נניח קיימת

$\bar{A} \subset \{A'_i\}_{i=k+1}^{n}$ כך ש

$$|\Gamma(\bar{A})| \le |\bar{A}| = \ell$$

אז נתבונן ב $A \cup \bar{A}$ אז נקבל מהבנייה

$$|\Gamma(\bar{A} \cup A)| = k + \Gamma(\bar{A}) < k + \ell = |\bar{A} \cup A|$$

סתירה לנתון. ולכן התנאי מתקיים ולכן אפשר

לבחור מ.נציגים לקבוצות $\{A'_i\}_{i=k+1}^{n}$.

מ.ש.ל

הגדרה: יהי $n \in \mathbb{N}$, H גרף. אזי $T_n(H)$

יהיה המספר המקסימלי של הקשתות שיכול

להיות לגרף בעל n קודקודים שלא

מכיל את H

טענה $T_n(\text{מזלג})=n-1$

הוכחה כי גרף יש $n-1$ קשתות.

טענה $T_n(K_3)=[\frac{n^2}{4}]$ הוכחה בהמשך

הגדרה $Ex(n,H)$ הוא גרף מקסימלי מבחינת הקשתות שיש לו n קודקודים (והוא אינו מכיל את H.

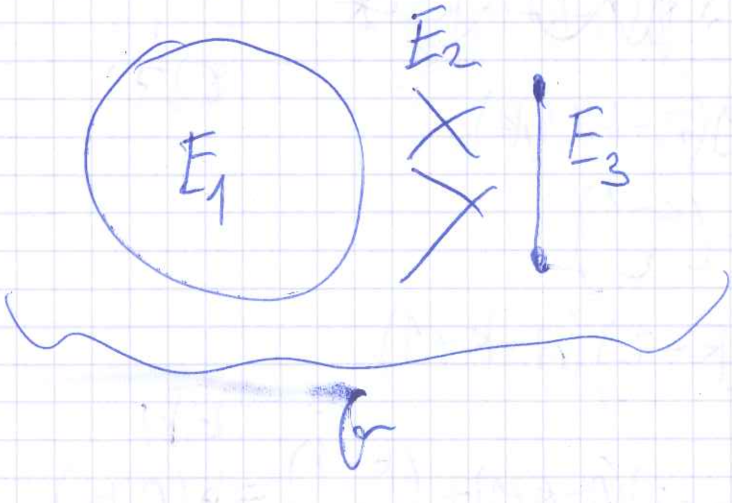
טענה $K_{[\frac{n}{2}],n-[\frac{n}{2}]} \in Ex[n,K_3]$

טענה אם $n=2m$ אז: $T_n(K_3)\geq m^2$

הוכחה מהטענה הקודמת.

טענה $n=2m$ אז $T_n(K_3)\leq m^2$

הוכחה באינדוקציה: עבור גרפים קטנים זה טריוויאלי. יהי G גרף מקסימלי מבחינת הקשתות (Turan) בעל $2m+2$ קודקודים:



נוציא מ-G קשת אחת יחד עם הקודקודים.

אז: $|E|=\underbrace{|E_1|}_{\text{מהאינדוקציה}}+|E_2|+|E_3|\leq m^2+2m+1=(m+1)^2$ מ״ד

מ.ש.ל.

טענה הגרף היחיד ב-$Ex(n,K_3)$ הוא $K_{[\frac{n}{2}],n-[\frac{n}{2}]}$

הוכחה באינדוקציה כמו קודם.

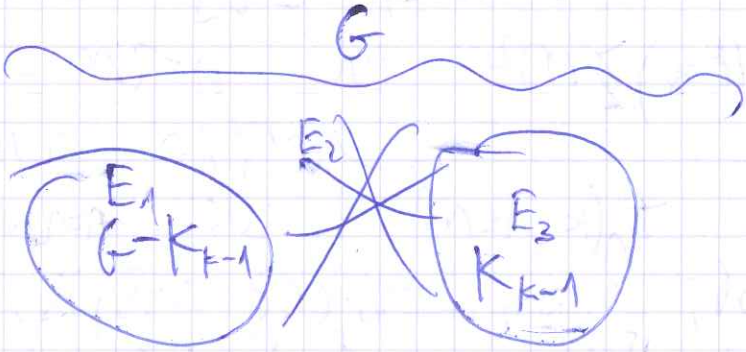
משפט טוראן $T_n(K_k)=g(n,k)$ אז: אם $n=t(k-1)+r$

חילוק עם שארית אז: $g(n,k)=\frac{k-2}{2(k-1)}(n^2-r^2)+\binom{n}{r}$

<u>הוכחה</u> אינדוקציה על k. עבור $k=3$ הוכחנו.
כעת נניח הוכחנו עבור $k-1$ ונוכיח:
עבור k. אם $n<k$ נקבל שזה טריוויאלי.
ולכן נניח $n\geq k$, ונוכיח כי:

$$T(n-k+1,k)=g(n-k+1,k) \Rightarrow T(n,k)=g(n,k)$$

יהי G גרף מקסימלי מקיים הדרישות
שאין בו K_k. יש מצב:



נוכיח כי G מכיל K_{k-1}. זה אפשרי ממקסימליות G.
ולכן

$$|E|=|E_1|+|E_2|+|E_3| \leq \cancel{g(n-k+1,k)}\ *$$

ידוע:

$$|E_1| \leq g(n-k+1,k)$$

$$|E_3| = \binom{k-1}{2}$$

$$|E_2| \leq (k-2)(n-k+1)$$

ולכן

$$* = g(n-k+1,k)+(k-2)(n-k+1)+\binom{k-1}{2} = g(n,k)$$

ולכן $T(n,k) \leq g(n,k)$ הצד ההפוך מקיים.
מ.ש.

<u>בעיה פתוחה</u>: נגדיר גרף שבו כל תשלישיה ממולאת על קודקודים היותר כי:

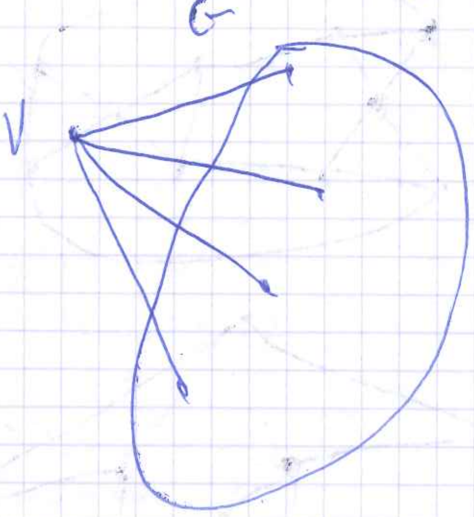
$$n=3m \Rightarrow T_n^{(3)}(\ ) = m^3+\frac{3m^2(m-1)}{2}$$

(מספר המינימלי שאפשר לגייס
מבלי שיווצר טטראדר)

__טענה__ $T_n(P_k) \le \frac{k-1}{2} n$

__הוכחה:__ אם $n \le k$ זה מיידי.

ולכן נניח $k < n$ ואינדוקציה. יהי G גרף
מקסימלי מבחינת הקשתות שאין בו P_k.
אם G לא קשיר, מהאינדוקציה זה טריוויאלי.
~~אאאא~~ ולכן נניח G קשיר.

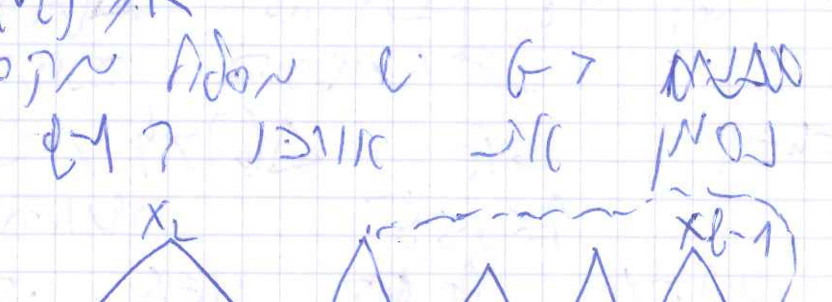


מספיק להראות שקיימת ב-G נקודה
v כך ש $d(v) \le \frac{k-1}{2}$, כי מאינדוקציה
זה יהיה מיידי. נניח בשלילה: לכל $\frac{k-1}{2} < d(v)$
אז לכל $v_{1,2} \in G$

$$d(v_1)+d(v_2) \ge k$$

מצאנו ב-G מסלול מקסימלי באורכו.
נסמן את אורכו ב-$\ell-1$ ואת נקודותיו:

P :



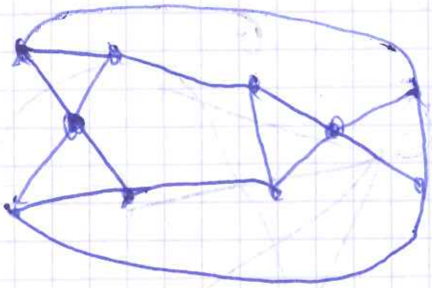
~~...~~ כעת $x_1 x_\ell \notin G$ כי אחרת יש בגרף
מעגל שאורך ℓ, והוא קשיר. ולכן הוא מוכל
שיש בו P_ℓ. ולכן מיידי ש $\Gamma(x_1,x_\ell) \subset P$
כעת אם נקודה x_i קשורה ל-x_ℓ אז
לא ייתכן ש-x_{i+1} קשורה ל-x_1 (לפי הציור)

ולכן $k \geq d(x_1)+d(x_2) \geq 2\ell-1$. סתירה. ולכן קיים $v \in G$ כך ש $d(v) \leq \frac{k-1}{2}$ ונגמרנו.

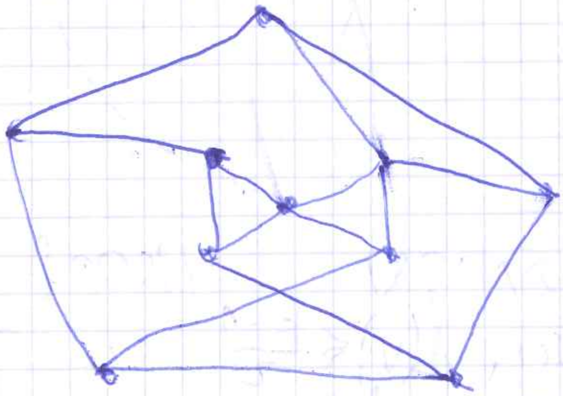
מ.ש.ל

שאלה ה: $T_{10}(C_4)=16$, $Ex(10,C_4)=\{G_1,G_2\}$ כאשר

$G_1=$



$G_2=$



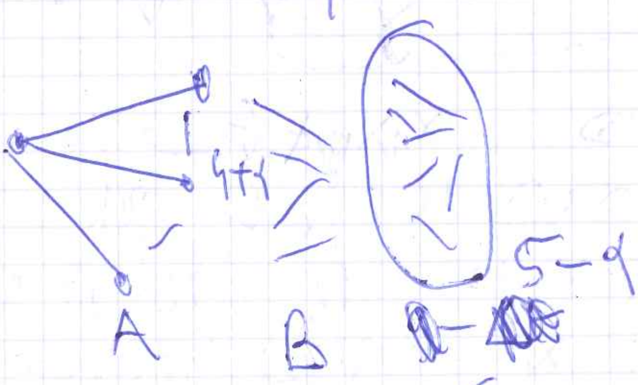
את ההוכחה נעשה דרך הטענות הבאות:

טענה: $|E(G)|>15,\ G\not\supset C_4,\ |G|=10 \Rightarrow \Delta(G)=4$

הוכחה: $\Delta(G)<4$ לא יתכן כי סתירה על מספר הקשתות

נניח $\Delta(G)>4$ אזי $\Delta(G)=\Delta=4+d$ כאשר $1\leq d\leq 5$

יהי $v\in G$ קדקד כך ש $d(v)=\Delta$ אזי המצב:



ד) A לא יכול להיות ~~מסלול~~ מסלול שאורכו 2 כי אז היה מעגל C_4. לכן

$$e(A) \le \left\lceil \frac{4+q}{2} \right\rceil + 4 + q = 6 + q + \left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil$$

אם $e(B) > 5-q$ אז יש מעגל C_4 לכן
(כי מכל נקודה כבר יוצאת רק קשת אחת אל B)

$$e(B) \le 5-q$$

$$e(C) \le \begin{cases} q=0: & 6 \\ q=1: & 4 \\ q=2: & 3 \\ q=3: & 1 \\ q=4: & 0 \\ q=5: & 0 \end{cases}$$

קל לראות שמתקבל ש

$$e(G) = e(A)+e(B)+e(C) = 6+q+\left\lceil \frac{q}{2} \right\rceil + 5 - q + e(C) \le 15$$

סתירה.

לכן $\Delta = 4$

מ.ש.ל

טענה: $18 \le T_{11}(C_4)$.

מסקנה: $T_{11}(C_4) = 18$

בעיה: מהו ה-n המינימלי כך שאם נצבע קשתות K_n בשני צבעים (A,B) תהיה קליקה או בצבע A K_k או בצבע B K_l.

סימון: $n \xrightarrow{\text{arrows}} (k,l)^{(2)}$ n מכריח קליקה של K_k בצבע A או K_l בצבע B:

סימון: ~~$R(k,l) = \{n \mid n \to (k,l)\}$~~

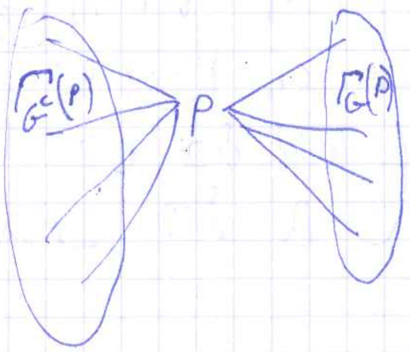
$$R(k,l) = \min\{n \mid n \to (k,l)^{(2)}\}$$

טענה: $n = \binom{k+l-2}{k-1} \longrightarrow (k,l)^{(2)}$ (Erdős ?)

<u>הוכחה</u> הנחת האינדוקציה:

$$\binom{k+l-2}{k-1} = \binom{k+l-3}{k-2} + \binom{k+l-3}{k-1}$$

יהי $G(V,E)\subset K_n$. ונבחר $p\in G$. אזי נקבל:



ולכן

$$d_{K_n}(p) = d_G(p) + d_{G^c} = \binom{k+l-2}{k-1} - 1$$

ולכן או

$$d_G(p) \geq \binom{k+l-3}{k-2} \qquad (i)$$

או

$$d_{G^c}(p) \geq \binom{k+l-3}{k-2} \qquad (ii)$$

נניח למשל (i) אז:

$$d_G(p) \geq \binom{k+l-3}{k-2} = \binom{(k-1)+l-2}{(k-1)-1} \xrightarrow{\text{לפי האינדוקציה}} (k-1,l)^{(2)}$$

כעת המשך שרירותי לפי $G\longrightarrow(3,3)^{(2)}$

<u>טענה</u> קיים $n\in N$ כך ש $n\longrightarrow(K_{s_1},K_{s_2},\dots,K_{s_c})$ (כלומר, אם נצבע את K_n ב-c צבעים יהיה לפחות i אחד כך ש הצבע ה-i מכיל את K_{s_i}).

<u>הוכחה</u> באינדוקציה: $c=2$ הוכחנו כבר בהקדמה. כעת נניח המשפט נכון עבור $c-1$. כעת ~~[illegible]~~

אזי יהי m כך ש $m\longrightarrow(s_1,s_2)^{(2)}$

לפי האינדוקציה קיים n כך

$n\longrightarrow(m,s_3,s_4,\dots,s_c)$. אם עבור $i\geq3$ יש

K_{s_i} בצבע ה-i סיימנו. אחרת יש K_m בצבע

בצבע 1 או 2 ולכן $m\to(s_1,s_2)$ ולכן סיימנו

עובדה: $R(3,3)=6$, $R(4,4)=18$, $R(3,4)=9$, $R(3,6)=18$, $R(3,5)=14$

$21 \le R(3,7) \le 25$

תרגיל הוכח $9=R(3,4)$

טענה קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש $n \to (K_k^{(r)}, K_l^{(r)})^{(r)}$

(כלומר: צובעים את הקשתות, שהם אוסף תת-קבוצות מספר r. לדוגמא:

$$|E(K_n^{(r)})| = \binom{n}{r}$$

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה. נניח קיום $n(k-1,l)^{(r)}$, $n(k,l-1)^{(r)}$ כך ש $n(k-1,l)^{(r)} \to (K_{k-1}^{(r)}, K_l^{(r)})^{(r)}$, $n(k,l-1)^{(r)} \to (K_k^{(r)}, K_{l-1}^{(r)})^{(r)}$, ונניח הוכחנו עבור $r-1$. נגדיר:

$$m = m^{(r-1)}(n^{(r)}(k-1,l), n^{(r)}(k,l-1))+1$$

ונתבונן ב K_m. נבחר $x\in K_m$ ונתבונן ב $Y = V-\{x\}$ ($V=V(K_m)$)

1 $|Y| = n^{(r-1)}(\cdots,\cdots)$

נניח שה r-יות ב V צבועות בצבעים $\{1,2\}$. נצבע כעת את ה $(r-1)$-יות ב Y בדרך הבאה: אם $y\in Y^{[r-1]}$ $(r-1)$-יה. נצבע את y באותו צבע שבו צבוע $Y\cup\{x\}$ ב V. מתוך 1 נובע שפעמים ב Y יש $S=K^{(r-1)}_{n^{(r)}(k-1,l)}$ בצבע 1. ולכן אם ב S יש $K_l^{(r)}$ גמרנו. אחרת יש ב S: $D\subset S$, $K^{(r)}_{k-1}=D$. כעת כל $(r-1)$-יה ב $D\subset Y^{(r-1)}$ צבועה בצבע 1, שהגדרת S. ולכן ה r-יה $Y^{(r-1)}\cup\{x\}$ צבועה ב 1 גם כן, שהגדרת הצביעה של $(r-1)$. ולכן $D\cup\{x\}$ הוא בצבע $K_{k}^{(r)}$

טענה יהיו $1\le r,k<\infty$ שלמים ותהי A קבוצה מנית אינסופית. נצבע כל r-יה באחד מ k צבעים. אז קיימת $S\subset A$ אינסופית שכל ה r-יות בה צבועות באותו צבע.

הוכחה: ההוכחה באינדוקציה על r. עבור $r=1$ טריויאלי.
נניח כעת (המשפט) נכון עבור $r-1$. נתונה
צביעה $c: A^{(r)} \to \{1,\dots,k\}$ של r-יות של A
ב-k צבעים. נגדיר $A_0=A$ נקח $x_1\in A_0$. נגדיר
$B_1=A_0\setminus\{x_1\}$. נגדיר $c_1: B_1^{(r-1)}\to\{1,\dots,k\}$ בצורה:

$$(b_1,\dots,b_{r-1})\longmapsto c((b_1,\dots,b_{r-1},x_1))$$

לפי הנחת האינדוקציה יש ל-B_1 תת"ק אינסופית A_1
שכל ה-$(r-1)$-יות שלה הן בעלות צבע קבוע d_1.
נבחר כעת $x_2\in A_1$ ונגדיר: $B_2=A_1\setminus\{x_2\}$, $c_2: B_2^{(r-1)}\to[1,k]$
בצורה: $(b_1,\dots,b_{r-1})\longmapsto c((b_1,\dots,b_{r-1},x_2))$
לפי הנחת האינדוקציה יש ל-B_2 תת"ק אינסופית A_2
שכל ה-$(r-1)$-יות שלה הן בעלות צבע קבוע d_2.
כעת נמשיך את הבניה האינדוקטיבית. הבניה מגדירה
סדרה אינסופית של נקודות $\{x_i\}$, צבעים $\{d_i\}$
וקבוצות $\{A_i\}$ שמקיימות $A_0\supset A_1\supset A_2\dots$ ולכן מתקיים:
$x_{i+1}\in A_i$, כל ה-$(r-1)$-יות ב-A_i צבועות ב-d_i
לפי הצביעה שמתקבלת כשמוסיפים לכל $(r-1)$-יה
את x_{i+1}, ומתקבלים צביעה c. כעת $\{d_i\}$
סדרה אינסופית של מרחב סופי. ולכן יש לה
נקודת הצטברות d. נבחר את כל הנקודות
x_i כך ש-$d_i=d$ ונסמנם ב-X. כעת
תהי T r-יה ב-X. יש ל-T איבר מינימלי
x_k. אז $T\in A_{k-1}^{(r)}$ ולכן $T\setminus\{x_k\}\in B_k^{(r-1)}$ ולכן
$T\setminus\{x_k\}$ צבועה לפי x_k, כלומר ל-d. ולכן
T צבועה ב-d.

מש"ל.

משפט: $r(sK_2,tK_2)=2s+t-1$, $s\ge t\ge 1$.

הוכחה: (א) נתבונן בגרף $G=K_{2s-1}\dot\cup E_{t-1}$. ב-G יש $2s+t-2$
נקודות ואין בו sK_2, ובמשלים אין tK_2

שאלה 33 סעיף א: עבור $t=1$ כבר הוכחנו בתרגיל. כעת באינדוקציה:

למה: $r((s+1)K_2,(t+1)K_2)\le r(sK_2,tK_2)+3$ נניח הוכחנו את הלמה.

אז: נניח הוכחנו עבור t. אז:

$$r((s+1)K_2,(t+1)K_2))\le r(sK_2,tK_2)+3 \cancel{= r((s-1)K_2,(t-1)K_2)+t}$$

$$=2s+t-1+3=2(s+1)+(t+1)-1$$

ולכן סיימנו. נותר להוכיח את הלמה:

הוכחה: נראה $r(sK_2,tK_2)+3\to((s+1)K_2,(t+1)K_2)$: נסמן $n=r(sK_2,tK_2)+3$

כעת יהי G מסדר n. אם $G=K_n$ או $G=E_n$

אז זה טריוויאלי ולכן קיימות $x,y,z\in G$ כך ש-

$xy\in G$, וכן $zy\notin G$. נוציא את x,y,z מ-G.

ונסמן את התוצאה ב-G'. $|G'|=r(sK_2,tK_2)$, ולכן

יש ב-G' למשל sK_2 ואז $+xy$ סיימנו. או

יש ב-G'^c tK_2 ואז $+yz$ סיימנו.

מ.ש.ל.

טענה: $r(sK_3,tK_3)=3s+2t$. $s\ge 2$, $t\ge 1$.

הוכחה: ① $r\ge 3s+2t$: יהי $G=K_{3s-1}\vee(K_1,2t-1)$ ב-G $3s+2t-1$

מקיים: אין בו sK_3 וב-G^c אין tK_3

② למה: $r((s+1)K_3,(t+1)K_3)\le r(sK_3,tK_3)+5$: הוכחה: נניח הלמה, ונקבל באינדוקציה על t:

(מקרה בסיס $t=1$) $r((s+1)K_3,(t+1)K_3)\le r(sK_3,tK_3)+5=3s+2t+5=3(s+1)+2(t+1)$

כעת הוכחת הלמה: נראה ~~$r((s+1)K_3,(t+1)K_3)\to(sK_3,tK_3)$~~

$r(sK_3,tK_3)+5\to((s+1)K_3,(t+1)K_3)$. נסמן $n=r(sK_3,tK_3)+5$

נצבע את K_n ב-R ו-W. נניח ב-K_n

יש משולש R, שנסמנו ב-K_R. נגדיר $\hat G=K_n-K_R$

אז $\hat G\to(sK_3,tK_3)$ ולכן או יש ב-$\hat G$ sK_3 בצבע

R, וסיימנו. אחרת יש בו tK_3 בצבע W.

נבחר אחד מהם, ונסמנו K_W. יש ב-K_n 9

קשתות בין K_R ל-K_W, ולכן לפחות 5 מהם

באותו צבע. ולכן לפחות מאחד הקודקודים של

K_W יוצאים 2 קשתות ל-K_R. והם בצבע K_R

משלים K_*. נניח ש K_n אינו K_w ואינו K_* ונסמן

אז נראה התוצאה ב-G: $|G| = r(sK_3, tK_3)$. ולכן $G \to (sK_3, tK_3)$

ולכן אם ב-G יש sK_3 בצבע R, סיימנו. ולכן אין

K_* וגמרנו. ואם יש ב-G tK_3 בצבע W סיימנו

ולכן אין K_w וגמרנו. כלומר סגרנו מקרים

כל שאר האפשרויות.

טענה להוכחה: $r(sK_3, K_3) \le 3s+2$ עבור $s \ge 2$ ~~מה~~ מה קורה!

למה: $r(G, H_1 \cup H_2) \le \max\{r(G,H_1)+|H_2|, r(G,H_2)\}$

<u>הוכחה</u>: נסמן $n = \max\{r(G,H_1)+|H_2|, r(G,H_2)\}$ ונתבונן ב-K_n. נצבע

בצבעים R, W. נניח $G \not\subset K_n$ בצבע R. אז: $H_1 \subset K_n$, $H_2 \subset K_n$ בצבע W כנדרש.

נוציא את הקודקודים של H_2 בצבע W מ-K_n

יש לנו $r(G, H_1)$. ולכן יש H_1 בצבע W

(כי אין G ב-R) ולכן יש ב-K_n $H_1 \cup H_2$ ב-W

מש"ל.

<u>המשך הוכחת הטענה</u>

$$r(sK_3, K_3) = r((s-1)K_3 \cup K_3, K_3) \le \max(r((s-1)K_3, K_3)+3, r(K_3, K_3)) =$$
$$= r(K_3, (s-1)K_3) \le \dots \le r(2K_3, K_3) + 3(s-2) =$$
$$= 8 + 3(s-2) = 3s+2$$

מש"ל.

<u>טענה</u>: $11 = r(C_4, C_4, C_4)$

<u>הוכחה</u>: $r \le 11$: $|E(K_{11})| = 55$ ולכן קיימות צלעות

בצבע אחד 19 קשתות. $T_{11}(C_4) = 18$ ולכן יש

מעגל בצבע C_4.

$r = 11$: קיימת צביעה של K_{10} ב-3 צבעים

שאין בה C_4 בצבע אחד.

<u>טענה</u>: $2^{k/2} \le r(K_k, K_k)$

<u>הוכחה</u>: יהי $N \le 2^{k/2}$. המספר הכולל של צביעות גרף עם N קודקודים

במקום קודם.

$2^{\binom{N}{2}}$ מתוכם, מספר הגרפים שמכילים K_k הוא

$$2^{\binom{N}{2}}/2^{\binom{k}{2}} = 2^{\binom{N}{2}-\binom{k}{2}}$$

ולכן מספר הגרפים הכולל שמכילים K_k כלשהו הוא:

$$M = \frac{\binom{N}{k}2^{\frac{N(N-1)}{2}}}{2^{\frac{k(k-1)}{2}}}$$

כעת

$$M < \frac{N^k}{k!}\cdot\frac{2^{\binom{N}{2}}}{2^{\binom{k}{2}}} \underset{\text{נוכיח}}{<} \frac{1}{2}2^{\binom{N}{2}}$$

ולכן קיים גרף שלא הוא ולא המשלים שלו מכילים K_k.. הוכחת הטענה: צ"ל:

$2N^k < k!\,2^{(k-1)k/2}$ כשידוע $N \le 2^{k/2}$

$$2N^k \le 2\cdot 2^{k^2/2} = 2^{k^2/2+1} = 2^{\frac{(k-1)k}{2}+\frac{k+2}{2}} = 2^{\frac{k+2}{2}}2^{\frac{k(k-1)}{2}} < k!\,2^{(k-1)k/2}$$

עבור $k\ge 3$.

מ.ש.ל.

משפט (van der Waurden) לכל (p,k) קיים $W(p,k)$ כך שאם נצבע את $[1,w]$ ב-k צבעים יהיה קיים סדרה חשבונית מאורך p (AP מאורך p [arith' progression])

הוכחה: עבור k קבוע נסמן $V(k)$ את הטענה "VDW נכון עבור k"

נסמן $S(l,m)$ את הטענה: "קיים $w=w(l,m,k)$ כך שאם נצבע את $[1,w]$ ב-k צבעים, ונתבונן לקוביה $\{(x_1,\ldots,x_m) \mid x_i\in[0,l]\}$, נגדיר $w \sim v$ (אקוויוולנטיים וקטורים)

אם $l=v_i=w_i$ עבור i כל מהם ולכל $j\neq i$ $l\neq v_j,w_j$

או שגם v וגם w לא מכילים l. ($\sim$ מחלק ל-$m+1$ מחלקות)

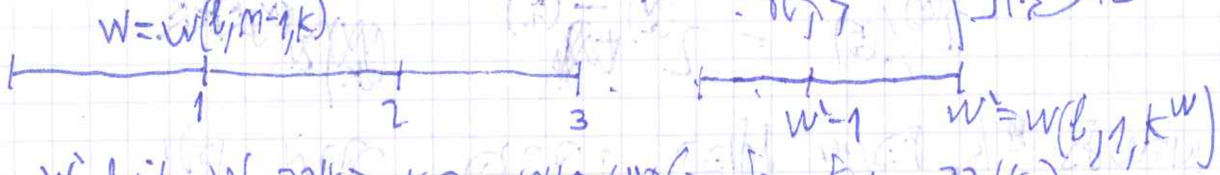
אז: קיימים $a,d_1,\ldots,d_m$ כך ש $a+l\sum_{i=1}^{m} d_i \le w$

וכן הצבע של $a=a+\sum_{i=1}^{m} x_i d_i$ הוא קבוע עבור מחלקות האקוויוולנציה

$(x_i)_{i=1}^{m}$ "

1 נוכיח כי: $S(l,1)\wedge S(l,m-1)\to S(l,m)$

נתבונן בקטע:



(החלוקה) של כל קטע מסוים הוא באורך W ויש W' בלוקים.

נצבע את נקודות הקטע ב-K צבעים. יש בדיוק

K^W אפשרויות לצבוע כל קטע. נגדיר את

הצבע של הקטע להיות ה-i מתוך k^W הצבעים שאנו

מגדירים. $(c':[1,w']\to[1,k]^W)$

מאחר ו-$w'=w(l,1,k^w)$, נובע שקיימים a,D כך ש

$c'(a+iD)=\text{const}$, $0\le i\le l-1$.

מכך ש-$W=w(l,m-1,k)$ נובע שקיימים $a,d_1,\dots,d_{m-1}$ כך

ש-$c(a+\sum x_i d_i)=\text{const}$ לכל ההשמות של

$(x_i)_{i=1}^{m-1}$ וכך ש-$a+l\sum d_i\le aW$ וכן $W(a-1)\le a$

נגדיר כעת $d_m=DW$ מכל הבחינות לקבל כאשר

הוכחנו ש-$S(l,m)$ מתקיים עבור $[1,WW']$ (הבחירה

אחידה: $(a,d_1,\dots,d_m)$

משפט (ון דר ורדן): לכל $p,k\in\mathbb{N}$ יש מס' $W(p,k)$ כך שבכל צביעה k של $[1,W(p,k)]$ יש סדרה אריתמטית חד-צבעית מאורך p.

הגדרה: יהי $l,m\in\mathbb{N}$. אזי $(x_i)_1^m,(y_i)_1^m\in[0,l]^m$ יקראו l-שקולים אם $x_i=y_i$ לכל i קטן שווה המקום האחרון ב-$(x_i)_1^m$ וב-$(y_i)_1^m$ שבו מופיע l. כמו כן כל שני m-יות שלא מכילות את l יקראו שקולות. נקרא לפסוק הבא "$S(l,m)$": "לכל $k\in\mathbb{N}$ קיים $W(l,m,k)\in\mathbb{N}$ כך שלכל $c:[1,W(l,m,k)]\longrightarrow[1,k]$ קיימים $a,d_1,\dots,d_m\in\mathbb{N}$ כך ש $a+l\sum_1^m d_i\le W(l,m,k)$, וכן לכל $(x_i)_1^m,(y_i)_1^m\in[0,l]^m$ שקולים מתקיים

$$c\left(a+\sum_1^m x_i d_i\right)=c\left(a+\sum_1^m y_i d_i\right)"$$

$S(l,1)$

הפסוק $S(1,1)$ הוא נכון. נניח $S(l,m)$ נכון ויהי k. נסמן $W=W(l,m,k)$, $W'=W(l,1,k^W)$ וכן $W_j=[(j-1)W+1,jW]$ עבור כל $1\le j\le W'$. תהי $c:[1,WW']\to[1,k]$. נגדיר $c':[1,W']\to[1,k^W]$ בצורה

$$j\longmapsto 1+\sum_{\nu=0}^{W-1}\left(c((j-1)W+1+\nu)-1\right)k^\nu$$

כעת, מהגדרת W' קיימים $a',d'\in\mathbb{N}$ כך ש $a'+ld'\le W'$ כך שלכל $x,y\in[0,l-1]$ $c'(a'+xd')=c'(a'+yd')$. כעת, $S(l,m)$ נכון לכן בפרט לגבי ה-k של $c:[(a'-1)W+1,a'W]\to[1,k]$ אזי קיימים $a,d_1,\dots,d_m\in\mathbb{N}$ כך ש

$$(a'-1)W+1\le a\le a+l\sum_1^m d_i\le a'W$$

וכן $c(a+\sum_1^m x_i d_i)$ קבוע על מחלקות ה-l-שקילות. נגדיר $d_{m+1}=Wd'$ אזי $a,d_1,\dots,d_{m+1}$ הם כאלו כך ש

$$a+l\sum_1^{m+1} d_i\le WW'$$

וכן

$$c\left(a+\sum_{1}^{m+1} x_i d_i\right)$$

קבוע לכל מחלקות ה-l-שקילות של $[0,l]^{m+1}$.

~~...~~ $s(l)$ ולכן נכון הפסוק $s(l,m+1)$

באת נניח שלכל m $s(l,m)$ נכון. נקח צבור א נתון

$c:[1,W(l,k,k)]\to[1,k]$ צביעה אזי קיים $a,d_1,\dots,d_k\in\mathbb{N}$

כך ש $a+l\sum_1^k d_i\le W(l,k,k)$ וכן $c(a+\sum_1^k x_i d_i)$ קבוע

על מחלקות ה-l-שקילות. הגדר י $c(a+\sum_1^s l d_i)$

עבור $s\in[0,k]$ לכן יהיו להיות מלא שונים, ולכן

קיים $0\le s<t\le k$ כך ש

$$V=c\left(a+\sum_1^s l d_i\right)=c\left(a+\sum_1^t l d_i\right)$$

$$c\Big(\underbrace{\left(a+\sum_1^s l d_i\right)}_{A}+j\underbrace{\sum_{i=s+1}^{t} d_i}_{D}\Big)$$

$s(l)$

קבוע לכל $j\in[0,l]$. ולכן $s(l+1,1)$ נכון

היות ובור $s(1,1)$, ושל הערות. ולכן $s(m,n)$ נכון

לכל n,m ולכן בפרט לכל p $s(p,1)$ נכון

~~...~~ וזהו בדיוק טענת המשפט.

מ.ש.ל.

① נכונות בהנחת $\forall m\ S(l,m) \to S(l+1,1)$

נניח קיום $S(l,k)$ (k מספר הצבעים). ולכן קיים $\{d_i\}$ ... נצבעו

$$c_s = c\left(a + l\sum_{i=1}^{s} d_i\right) \qquad s=0,1,\dots,k$$

יש k צבעים, ולכן קיים $0 \le s < t \le k$ כך ש-

$c_s = c_t$. כלומר

$$c\left(a + l\sum_{i=1}^{s} d_i\right) = c\left(a + l\left(\sum_{i=1}^{t} d_i\right)\right)$$

בצורה סכמטית

הצבע של הרצף $l\ l\ \dots\ l_s\ 0\ 0\ 0\ \dots\ 0_k$

והתוצאה שווה מבחינת מחלקים השקולים $l\ l\ \dots\ l_s\ l_{s+1}\ \dots\ l_t\ 0\ 0\ 0_k$

גם הצבע של

$l\ l\ \dots\ l_s\ d_{s+1}\ \dots\ d_t\ 0\ 0\ 0_k$ יהיה זהה לצבע

לכל j אחרים

$$c\left(\left(a + \sum_{i=1}^{s} l d_i\right) + j\left(\sum_{i=s+1}^{t} d_i\right)\right) = \text{const}$$

כלומר

$$c(A + jD) = \text{const}$$

כאשר $A = a + \sum_{1}^{s} l d_i$, $D = \sum_{i=s+1}^{t} d_i$

② נתבונן בבעיה לקליקות במישור שבהם אין 3 נקודות על ישר

הגדרה: נאמר כי n נקודות במישור

הן במצב קמור אם הן קודקודי פוליגון

קמור (הקמור המכיל אותן)

פולין

טענה: n נקודות במישור הן במצב קמור אמ"ם כל רביעיה חלקית שלהן היא במצב קמור.

טענה: לכל 5 נקודות במישור יש תת קבוצה חלקית קמורה בגודל 4.

טענה: לכל $\ell \geq 5$ קיים מספר נקודות במישור n כך שבהן יהיה לפחות מספר ℓ שהוא קמורה.

הוכחה: נקח $n=R^{(4)}(5,\ell)$ נקודות במישור. נצבע כל רביעיה חלקית שלה בצבע α אם היא לא קמורה ובצבע β אם היא קמורה. לפי משפט רמזי או שקיימות 5 נקודות בצבע α אבל זו סתירה לטענה קודמת ולכן חייבות להיות ℓ נקודות שכל 4 מהן בצבע β כלומר קמורות ולפי משפט קודם כל ה-ℓ נקודות קמורות.

הגדרה: יהי G גרף $G(V,E)$ צביעה של G ב-k צבעים היא:

$$c:V\to[1..k]$$

כך ש

$$xy\in E \Longrightarrow c(x)\neq c(y)$$

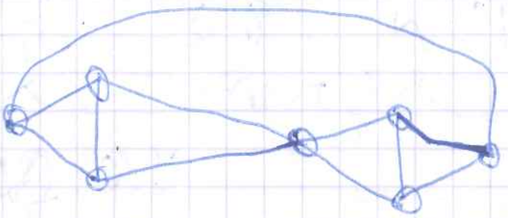
הגדרה: המספר הכרומטי של גרף G יהיה המספר המינימלי של צבעים שדרושים כדי לצבוע את הגרף.

הגדרה: גרף קריטי לפי קודקודים הוא גרף שאם מוציאים ממנו קודקוד אחד יורד המספר הכרומטי.

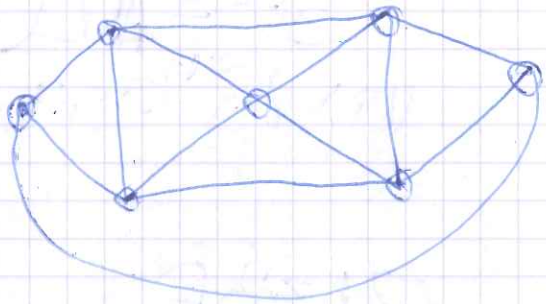
הגדרה: גרף קריטי לפי קשתות הוא גרף שאם מוציאים ממנו קשת יורד המספר הכרומטי לכל קשת.

למה: K_n הוא קריטי קשתי המוקטן.

דוגמא



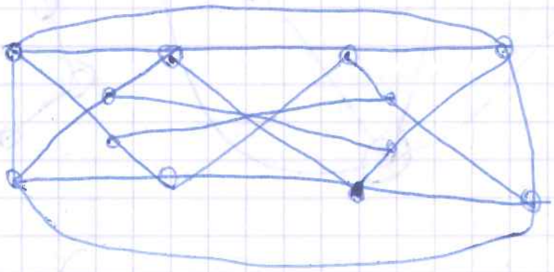
קריטי קשתי המוקטנ



קריטי רק לפי הקדקודים.

טענה: קבוצת כל הגרפים הקריטיים בעלי מספר כרומטי 3 היא $\{C_{2n+1} \mid n \in \mathbb{N}\}$

דוגמא: הגרף הבא אינו בנוי ממשולשים אך צביעה יחידה



טענה: אם G_1 הוא k_1-קריטי, G_2 הוא k_2-קריטי אז: $G_1 + G_2$ הוא k_1+k_2 קריטי:

תזכורת

טענה: משפט אוילר: יהי G גרף מישורי
יהי V-מס' הקדקודים, F-מס' הפאות
e-מס' הקשתות (כולל החיצונית)

$$V-E+F=2$$

אז

טענה אם G גרף מישורי מקסימלי
מבחינת הקודקודים דרגה ≥ 3 קודקודים

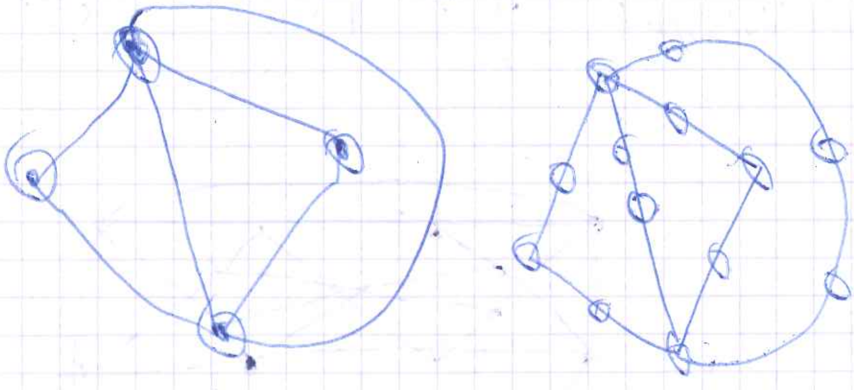
אז

$$3F=2E$$

טענה כל מישורי פשוט

$$2E\geq 3F$$

טענה $K_{3,3}$ K_5 לא מישוריים
הוכחה כי הם לא מקיימים את התנאי שלפני
הגדרה גרפים הם יקראו הומיאומורפיים אם



כלומר (מוסיפים על ה-3 מתחים)
משפט (קורטובסקי) גרף הוא מישורי אמ"מ
הוא לא מכיל תת-גרף שהוא איזומורפי
ל-K_5 או ל-$K_{3,3}$

הוכחה אם הוא מכיל אחד מהם הוא
לא מישורי. נניח בשלילה
שקיים גרף G שלא מכיל אף אחד ולא
מישורי. יהי M גרף כזה של מינימום
שמורידים ממנו הופך למישורי

כיוון:

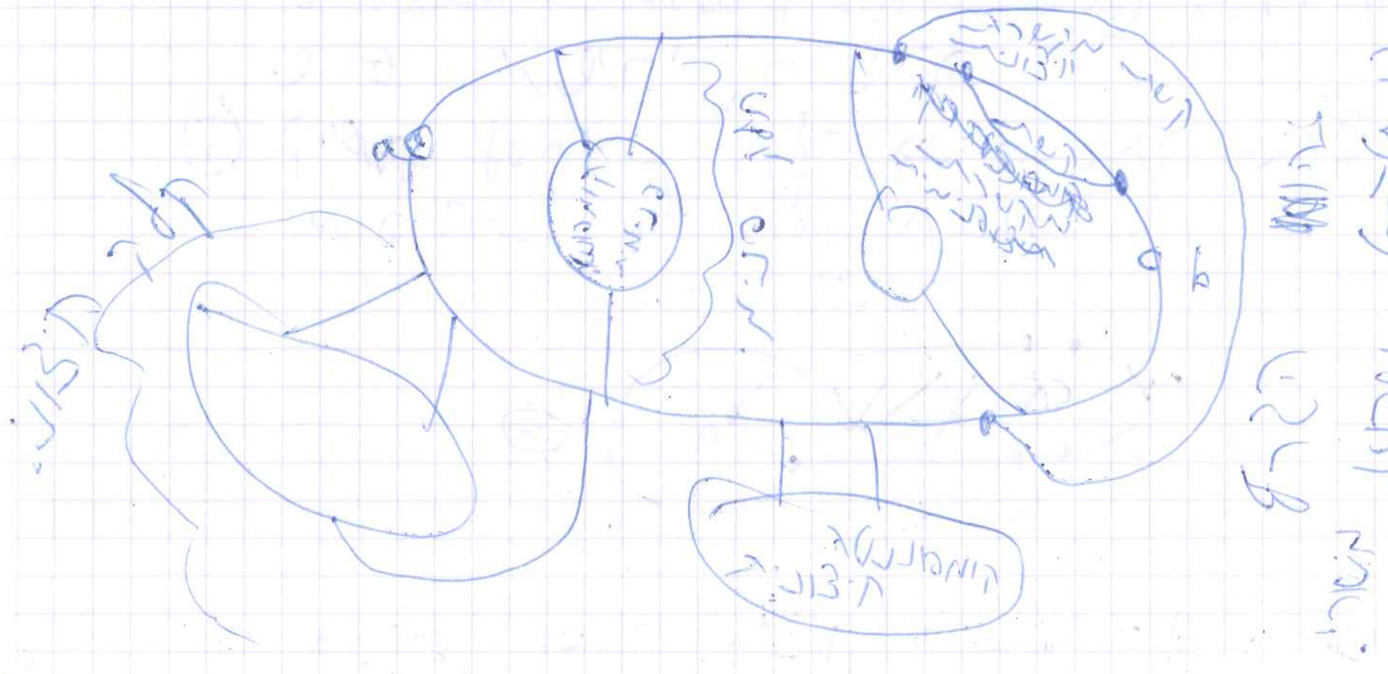
① M קשיר

② $\delta(M) \geq 3$ לפי טענת ואפשר להפוך ל

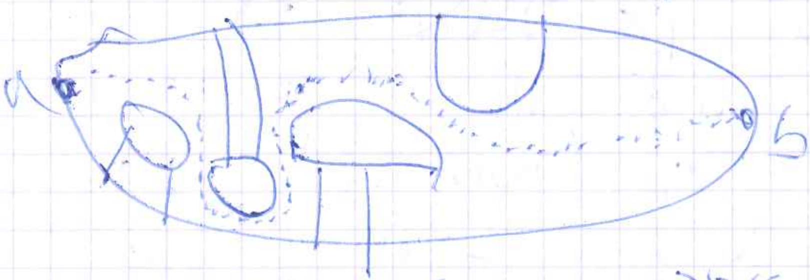
③ אין בM נקודה שאם מורידים אותה הגרף הופך ללא-קשיר

④ ~~[illegible]~~ שכן שאם מוציאים את הקשת (a,b) מM
עדיין יש בM מעגל שמכיל את a ואת b
לכל a, b:
נניח בשלילה שלא קיים מעגל כזה
אז ~~[illegible]~~ אין שני מסלולים
זרים בין a ל b ב $M-(a,b)$
כלומר לפי משפט מנגר נקבל ש כל
שני מסלולים מ a ל b עוברים
דרך נקודה משותפת c.
נוציא את c. נקבל שני קומפוננטות
זרות בגרף, ולכן הן מישוריות
נחבר אותן שוב ונוסיף את (a,b),
ונקבל שM מישורי. סתירה

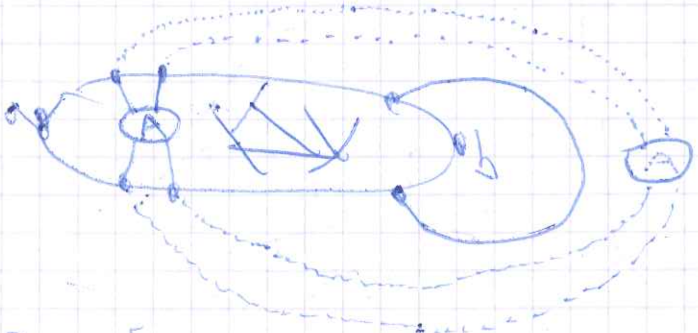
⑤ כעת יהיו a,b קודקודים ~~[illegible]~~ אז:
יש מעגל שמכיל את a,b



נקח את המעגל המקסימלי דרך (t,a) מהתחנות
מספר הארבעות שבתוכו לקשר אליו אפשר
לומר: (1) כל חלק פנימי ~~~~ חיצוני
קשור ~~~~ בו למעגל דרך ~~~~
בנקודה אחת (כי אחרת היתה
נקודת ניתוק).
(2) קיים לכל היותר חלק פנימי אחד הקשור
לשני החלקים של המעגל כלומר
לא יתכן מצב כזה:



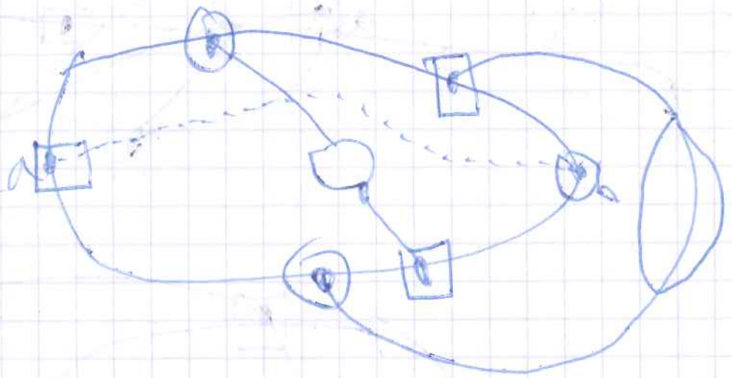
אם כי אחרת t היה מישורי לאחר
הוספת (t,a)
(3) לכל חלק חיצוני יש רגל אחת בדיוק
בכל אחד ~~~~ משני חלקי המעגל.
כי אחרת ~~~~ ~~~~ ניתן להוסיף
עוד ארוך למעגל בסתירה למקסימליות.
(4) יש לכל היותר חלק אחד קשור אחד
כי היה אפשר להוסיף את (t,a) מבחוץ ולקבל
ש-t מישורי, סתירה.
(5) ~~~~ לכל היותר חלק פנימי אחד שרגליו
מופרדות ע"י חלק חיצוני:



כי אחרת אפשר להוציא את כל החלק, הפנימי, בסתירה

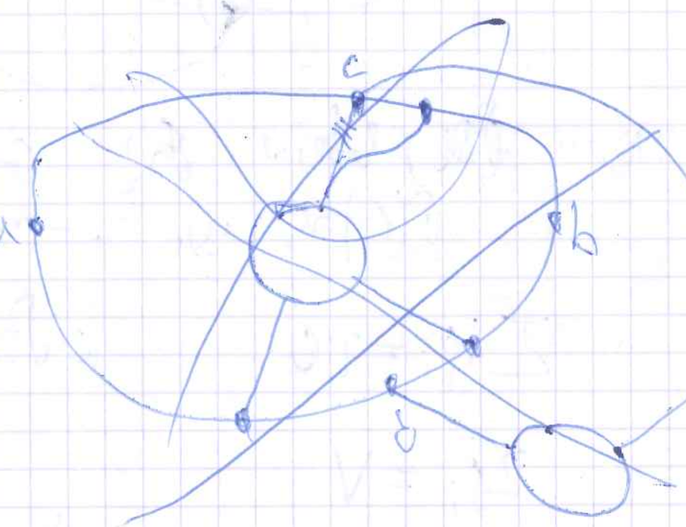
נבדוק כעת את כל האפשרויות

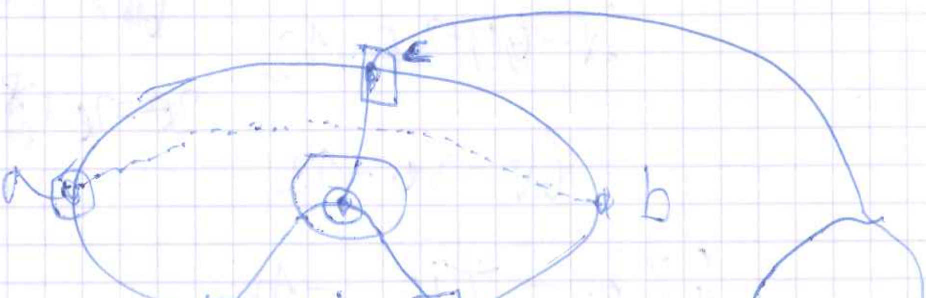
I



אז יש לנו עוד $K_{3,3}$ כפי שמצויר
בקצרת הרגלים והעיגולים סגורה.

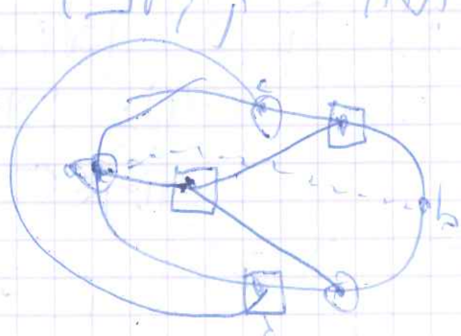
II



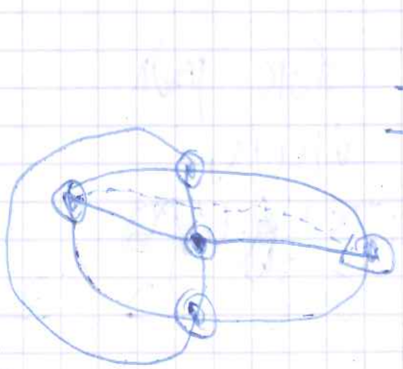


נשאר קיבלנו $K_{3,3}$

III

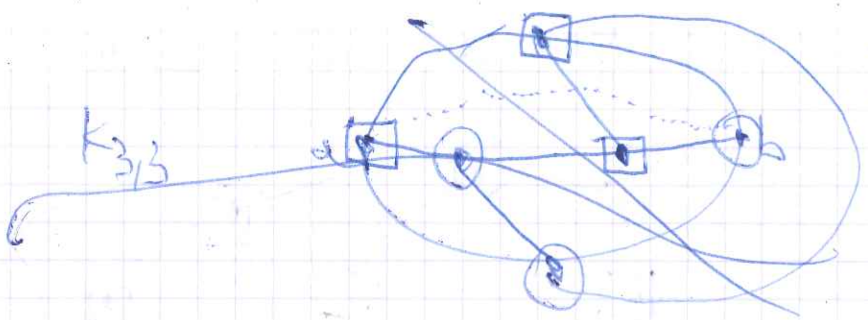


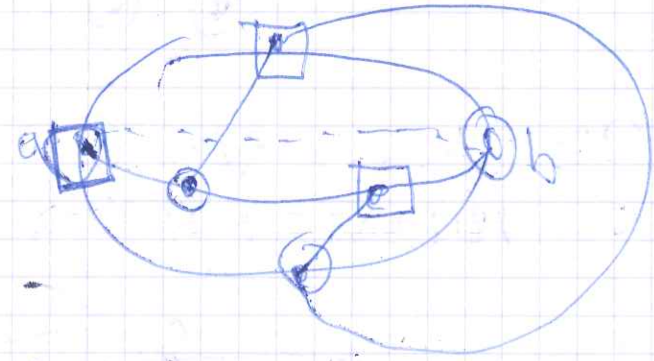
IV



K_5!

V





למה: יהי G גרף מקסימלי (פשוט) מישורי שכל פאותיו משולשים → אז $\delta(G)\le 5$

הוכחה: לכל G

$$\sum i\rho_i = 2e$$

$$\sum \rho_i = V$$

אוילר

$$V-e+f=2$$

נכפיל ב-6

$$6V-6e+3f=12$$

$3f=2e$ בגלל 3

$$6V-2e=12$$

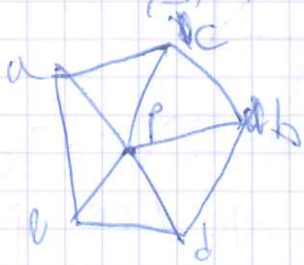
$$6\sum \rho_i - \sum i\rho_i = 12$$

$$\sum_{i=0} (6-i)\rho_i = 12$$

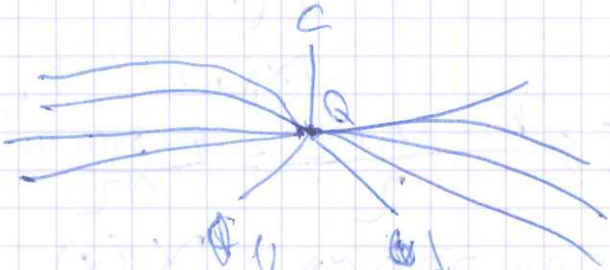
לכן אגף ימין חיובי ולכן צריך שגם אגף שמאל יהיה חיובי, כלומר עבור $i\le 5$ א
שקיים $\rho_i>0$ ולכן $\delta(G)\le 5$

מסקנה: כל גרף מישורי ניתן לצביעה ב-5 צבעים

הוכחה: יהי G הגרף המשולש המינימלי שאותו אין
צביעה. לא יכול להיות — כי (1 ע ע ע) כי
אחרת היה קל לצבוע. לכן
$\delta(G)=5$. אז: המצב

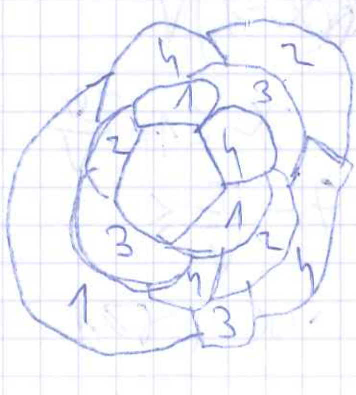


לא יתכן שכל (a,b,c,d,e) קשורים זה לזה, כי
K_5 לא מישורי. ולכן קיים $(a,b)\notin G$
נכווץ את (a,p,b) (לנקודה) אחת
Q. לה יהיה קשור כל מה שהיה קשור
ל-a,b,p. הגרף שנוצר יהיה מישורי וקטן
יותר, ולכן הוא ניתן לצביעה ב5 צבעים.
המצב:

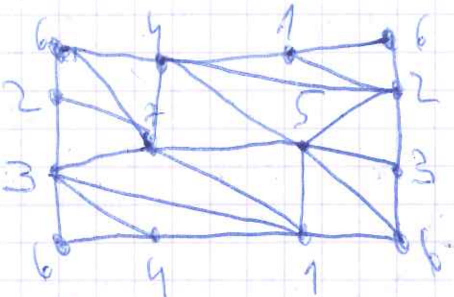


d,e,c,Q צבועים מקסימום ב4 צבעים
c,e,d ב-3. נסמן את הצבע של Q כ
1. נצבוע בגרף המקורי את a,b בצבע
1, ואת p בצבע החמישי.

בצמיו:



דוגמה K_7 ניתן לשיכון מישורי על טורוס:



הגדרה גנוס של גרף - הגנוס המינימלי של המשטח שאפשר לשכן עליו את הגרף ($\gamma(G)$)

טענה $\gamma(K_n) \geq \left\lceil \frac{(n-3)(n-4)}{12} \right\rceil$ ($3 \leq n$ גרף כללי מלא) הוכחה דומה

טענה $V-e+F=2-2\gamma$ (אוילר המוכלל: γ - גנוס המשטח)

הוכחת $\gamma(K_n)$: נכפיל ב-3:

$$3V-3e+3F=6-6\gamma$$

$$3V-e \geq 6-6\gamma$$ ולכן $3F \leq e$

ולכן $\gamma \geq \frac{1}{6}e-\frac{1}{2}(V-2)$

ל-K_n נקבל

$$\gamma \geq \frac{n^2-7n+12}{12} = \frac{(n-3)(n-4)}{12}$$

הגדרה $\chi(\gamma)$ המספר הכרומטי של משטח מגנוס γ

טענה $\chi(\gamma) \leq \frac{7+\sqrt{49-24E}}{2}$ כאשר $E=2-2\gamma$ עבור $\gamma \geq 1$

הוכחה מ- $3V-e \geq 6-6\gamma$ מקבלים $e \leq 3V-3E$

$$2e=\sum i p_i \underset{\text{גרף קריטי}}{\geq} \sum_{i \geq \chi-1} i p_i \geq (\chi-1)V$$

ולכן $\chi \leq 1+\frac{2e}{V}$ ולכן

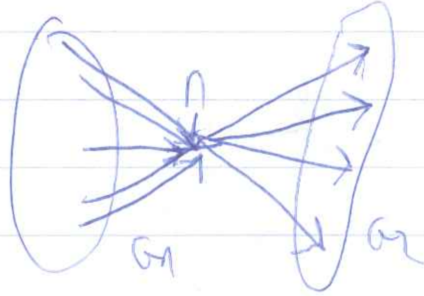
$$\chi \leq 1+\frac{2e}{V} \leq 1+\frac{6V-6E}{V} = 7-\frac{6E}{V} \leq$$

כיוון ש- $\gamma \geq 1$, אזי $E \leq 0$, תמיד מתקיים $V \geq \chi$ ולכן $\leq 7-\frac{6E}{\chi}$

ומכאן קבלת מקבלים

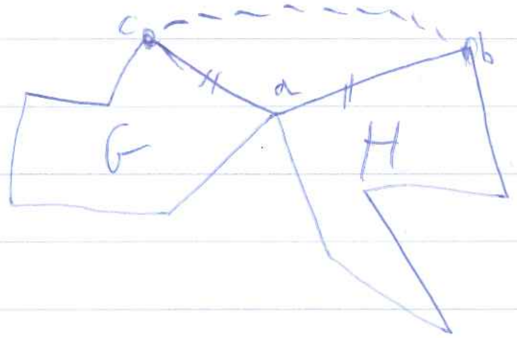
מש"ל.

טענה: בגרף מלא מכוון יש מסלול המילטון.
הוכחה: ניקח קודקוד ונחלק את הגרף לקודקודים שנכנסים אליו ויוצאים ממנו



לפי האינדוקציה יש מסלול המילטון ב-G_1 וב-G_2 אז המסלול הנדרש הוא $G_1 \to v \to G_2$.
מש"ל

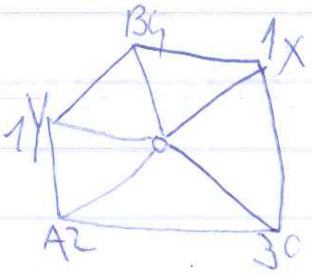
טענה: יהיו G,H גרפים k קריטיים ונצמיד בקודקוד אחד. אז הגרף המתקבל הוא k-קריטי, לאחר הקישור הבא:



משפט 4 הצבעים: הטעות Kempe!

הקבוצה הלן: { }

נסתכל על קודקוד בעל דרגה 5



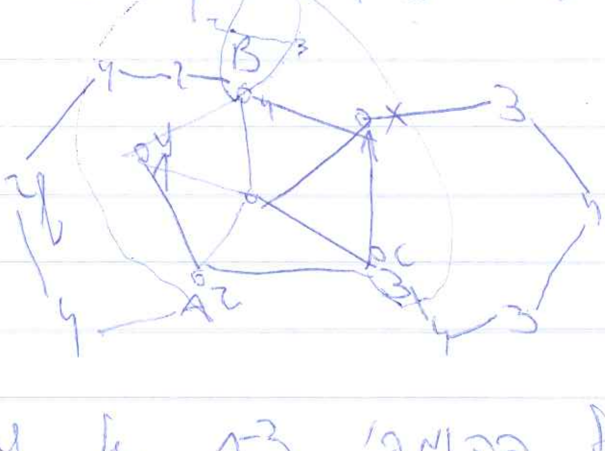
2 קודקודים רק בצבע 3 $\Leftarrow$ לפחות צבע אחד מופיע פעמיים. שקודם: נניח A,B בקומפוננטות קשירות שונות, כלומר לא קיים מסלול 2-4 בין A ל-B. אז בקומפוננטה של B נחליף 4$\leftrightarrow$2 ואז נשתמש רק ב-3 צבעים, ואת האמצעי אפשר לצבוע בצבע הרביעי.

<u>מקרה 1</u>: ראינו דבר זה B<

<u>מקרה 2</u> קיים מסלול 2-4 בין A וB

קיים מסלול 3-4 בין B וC

המצב:



נסתכל על הקומפי 3-1 של y הקומפי זו אינה מכילה את C כי הוא מוקפת במסלול של 4

ולכן לאותה קומפי ניתן להחליף 1$\leftrightarrow$3

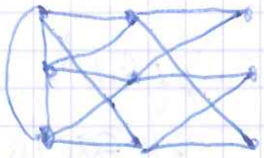
כנ״ל ל-X 1$\leftrightarrow$2 וסיימנו

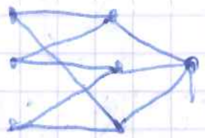
$\gamma(K_n)=\left\lceil\frac{(n-3)(n-4)}{12}\right\rceil$ סוג

הערה ספר של 8

$\chi(\gamma)=\left\lfloor\frac{7+\sqrt{1+48\gamma}}{2}\right\rfloor$ סוג

הגדרה הגרף של TOFT:





משפט TOFT מישורי, 4-קריטי:

מבחן

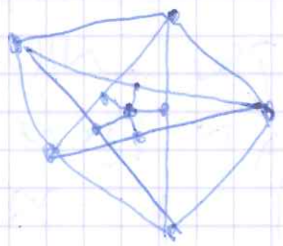
Dirac, Pósa, Hall, Menger, Tutte, Turan, Ramsey, VdW, 5-colour, Kuratowsky, Heawood.

תרגילים ① קיים גרף 4-קריטי כולל $3n+1$, n נקודות

② K_n הוא קריטי 3 קלה

③ קיים גרף n-קריטי כולל $3n$ נקודות

④ הגרף של GROTSCH 4-קריטי



⑤ Q_3 הקובייה מישורית, תן הצגה

⑥ מישורית

⑦ משפט המילטון של מישורים

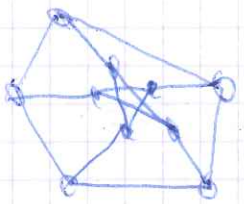
⑧ לכל גרף, $\rho_1 \ge \rho_3+2$ ומתי $\rho_1=\rho_3+2$

⑦ נתון $G(V,E)$ ותהי $S\subseteq V$, $|S|=K$ אז $G-S$ יש יותר מ-K קומפוננטות קשירות אי זוגי אין ב-G מעגל המילטון

⑨ לכל גרף רגולרי-3 קשיר 2-קשיר יש זיווג

(9) יהי G ו $\bar{G}$ משלים של מספר הקודקודים $T(n,\bar{e}) = 2n - \ldots$ מהו הגרף
✓ הפוטנציאלי $n \geq 6$

(10) מהו הגרף ה petersen לא מישורי



(11) 3 ריבועים $\delta(v) = 5$ לכל v

(12) לגרף 1-factor $\iff$ תנאי TUTTE מתקיים עבור $|S| \leq 1$

(13) $R(K_3, K_3) = 6$, $9 = R(2K_3, K_3)$ ✓, $R(2K_3, 2K_3) = 10$, ~~$R(2K_3, K_3) = 8$~~
$R(C_4, C_4) = 6$ ✓

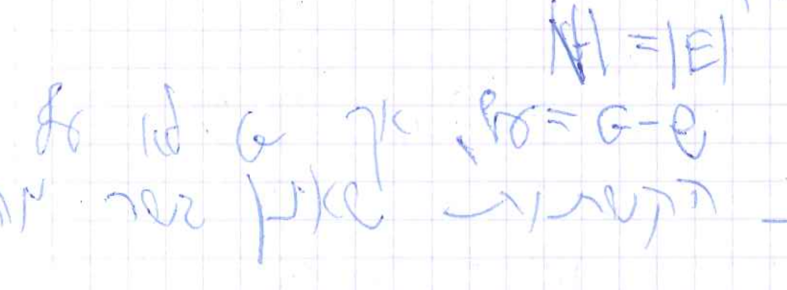
(14) G גרף 5 קודקודים כך ש $G_i = G - v_i$ נתון
$G_1 =$ $G_2 =$ $G_3 =$ $G_4 = G_5 =$
שרטט G

(16) אם $G \cong G^c$ אזי $|V(G)| \equiv 0, 1 \mod 4$

(17) אם G 3-רגולרי אזי v לא נקודת חיתוך אם"ם יש לו
✓ גשר

(19) הוכחת הגדרות שקולות
(a) G הוא מעגל יחיד
(b) G קשיר ו $|V| = |E|$
(c) קיים e כך ש $G - e$ = עץ, אך G לא עץ
(d) G קשיר, קיים הקשתות שאינן גשר מהוות מעגל

(18) מדוע אין 1-factor ?



(20) $G(V,E)$ $\bar{G}(V,E')$ הומומורפיים $\iff$ $|V| + |E| = |V'| + |E'|$

(21) אין גרף מישורי 6-קשיר

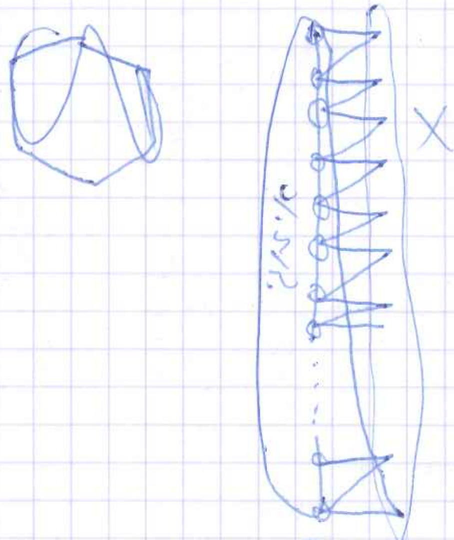
(22) כל גלגל  דואלי לעצמו

(23) מצא את $K_{4,4}$ או Q_4 לטורוס

רמז — פתרונות:

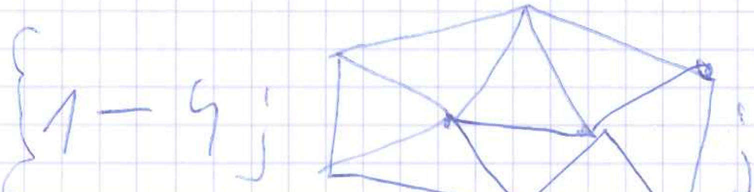
(1) יהי G גרף k-רגולרי. ~~צ~~ נהפוך אותו למכוון כך שיהיה בו מסלול מכוון מאורך k-1. הוכח אפשר לכוון את הכיוונים כך שיהיה מסלול יחיד מאורך k-1

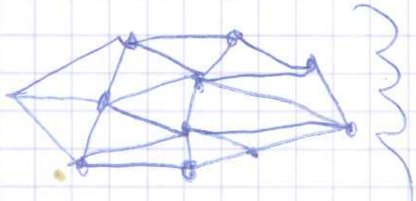
(2) יהי G הגרף



האם לכל n-לוגי לא קונסטנטי ניתן למצוא גרף G כך שG_X ~~...~~ לא יהיה גרף מסוים?

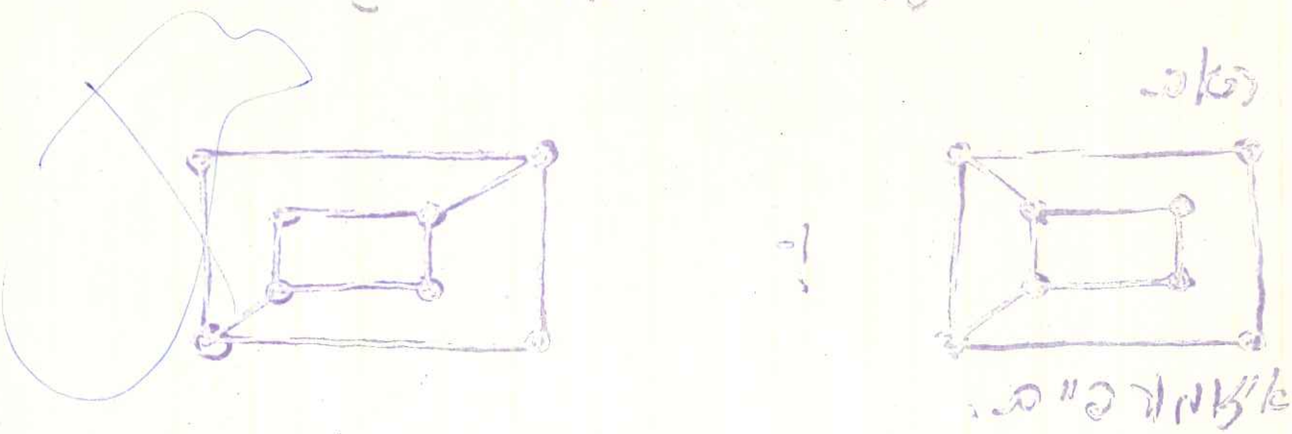
שאלות: גרף משולשי:





תורת הגרפים 1983 תרגיל 1.

1. ראה.



איזומורפיים.

2. כמה גרפים שונים קיימים בעלי 4 קדקדים.

3. קבע את כל הגרפים מסדר 7 הרגולריים 2.

4. איזה מתוך הגרפים ב-3 איזומורפיים עם המשלים.

הוכח: אם G גרף אז G או המשלים קשיר.

6. הוכח אם בגרף קשיר שני מסלולים ארוכים ביותר אז יש להם קדקד משותף.

הגדרנו: יער = גרף בלי מעגלים. הוכח: ליער בעל n קודקודים ו-c קומפוננטות n-c קשתות.

8. אם הגרף בעל 2k קודקודים בדרגה בלתי זוגית אז אפשר לפרק את קשתותיו לאחוד k מסלולים (כל שנים אין קשת משותפת) ו-k הוא מינימלי.

9. אם בגרף $\binom{n-1}{2}+2$ קשתות לפחות אז יש בו מעגל המילטוני. ל-$1+\binom{n-1}{2}$ זה לא חייב להיות נכון.

10. פרק את K_5 למעגלים המילטוניים.

11. בנה את כל הגרפים עם סדרת דרגות 5,5,3,3,2,2

12. הוכח: אין גרף עם סדרת דרגות יורדת.

תורת הגרפים 1983. תרגיל 2.

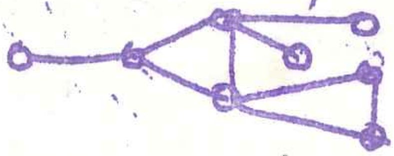
1. תהיינה $A_1, A_2, \dots, A_n$ קבוצות ו- $p_1, p_2, \dots, p_n$ מספרים טבעיים. הוכח כי $|\bigcup_{k=1}^{s} A_{i_k}| \geq \sum_{k=1}^{s} p_{i_k}$ גורר קיום קבוצות $X_1, X_2, \dots, X_n$ זרות לפי זוגות עם $|X_i| = p_i$, $X_i \subset A_i$.

2. קבע ישירות את $T_n(K_4)$ ואת $Ex_n(K_4)$

3. הוכח: $10 \to (K_3, K_4)$ והסק $R(K_3,K_4)=9$.

4. הוכח: $R(2K_3, K_3) = 8$; $R(2K_3, 2K_3) = 10$; $R(C_4, C_4) = 6$

5. בדוק לפי Tutte קיום 1-factor בגרף



6. כל גרף רגולרי $\rho \geq 4$ הוא איחוד של שני 2-factor-ים.

7. אם $A_1, A_2, \dots, A_s$ קבוצות חלקיות של E; $|E|=n$, ו- $|A_i|=k$ לכל i כאשר $k > [\frac{n}{2}]+1$ אז מספר הקבוצות החלקיות בעלות $k-1$ אלמנטים המוכלות ע"י ה-A-ים גדול מ-s.

8. $P_1, P_2, \dots, P_t$ נקודות שונות על ישר. $F(i,k)$ המספר המינימלי של נקודות המבטיח את תת-סדרת i נקודות משמאל לימין כך שהמרחקים מונוטוניים סדרה לכל ~~יורדת~~ עולה, או תת-סדרה דומה בעלת k איברים עם מרחקים לא עולים.

הוכח: $F(i,k) \le F(i-1,k) + F(i,k-1)$