טופולוגיה

1) Kelley – General Topology
2) Dugundji Topology
3) Bourbaki Topology
4) בן עמר מבוא לתורת הטופולוגיה
5) קוראטובסקי טופולוגיה מודרנית

הגדרה תהי X קבוצה. פונקציה $\rho: X\times X \to \mathbb{R}$ נקראת מטריקה על X אם:

1. $\forall x,y\in X \quad \rho(x,y)\geq 0$
2. $\rho(x,x)=0, \quad \rho(x,y)=0 \Rightarrow x=y$
3. $\rho(x,y)=\rho(y,x)$
4. $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq \rho(x,z)$

מרחב מטרי הוא זוג (X,ρ) $X\neq\emptyset$ ו־ρ מטריקה על X.

דוגמאות 1) $X=\mathbb{R}$ $\rho(x,y)=|x-y|$ – המטריקה הרגילה על $\mathbb{R}$

2) $\sigma(x,y)=\dfrac{|x-y|}{1+|x-y|}$

3) $X=\mathbb{R}^2$ $v(x,y)=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$

4) $X=\mathbb{R}^2$ $v_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|$

5) $v_2(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$

6) (המרחב המטרי הדיסקרטי) $\rho(x,y)=\begin{cases}0 & x=y\\ 1 & x\neq y\end{cases}$

7) $I=[0,1]$ X הקבוצת כל הפונקציות הממשיות f (הרציפות) I

$\rho(f,g)=\sup_I |f(t)-g(t)|$

מטריקת המקסימום $(C[0,1],\rho)$

8) על אותו X הם d?

$$d(f,g)=\int_0^1|f-g|dt$$

9) X = כל הפונקציות על [0,1] האינטגרביליות לפי רימן ~~אז~~ נגדיר

$$d(f,g)=\int_0^1|f-g|dt$$

זהו לא מרחב מטרי אבל זהו מרחב פסאודו מטרי

10) $l^p=X=\{R^N \mid \sum_1^\infty |a_n|^p<\infty\}$ $R\ni p\geq 1$

מינקובסקי: $\forall a_n,\beta_n\in X$

אי שוויון מינקובסקי:

$$\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n+\beta_n|^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{n=1}^\infty |\beta_n|^p\right)^{1/p}$$

נגדיר $\rho(a_n,\beta_n\in X)=\left(\sum_{n=1}^\infty |a_n-\beta_n|^p\right)^{1/p}$

זוהי המטריקה הרגילה על l^p

הגדרה: במרחב (ρ,X) כדור פתוח סביב $a\in X$ ברדיוס ϵ חיובי:

$$B(a,\epsilon)=\{x\in X \mid \rho(x,a)<\epsilon\}$$

B הוא ϵ-כדור סביב a

הגדרה: $B'(a,\epsilon)=\{x\in X \mid \rho(x,a)\leq\epsilon\}$ ϵ-כדור סגור

הגדרה: $S(a,\epsilon)=\{x\in X \mid \rho(x,a)=\epsilon\}$ ϵ ספרה סביב a

הגדרה: נניח (ρ,X) מרחב מטרי.

$A\subset X$ נקראת הקבוצה פתוחה אם"ם

$$\forall a\in A\ \exists\epsilon>0\ B(a,\epsilon)\subset A$$

משפט: יהי (X,ρ) מרחב מטרי:

① $\bigcup D_\alpha$ פתוחה אם D_α פתוחות

② $\bigcap$ של מס' סופי של קב' - פתוחה

③ $\varnothing$ פתוחה

X פתוחה

הגדרה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי $F\subset X$ תיקרא סגורה אם F^c פתוחה

משפט: $\cup$ סופי שומר סגירות

$\cap$ כלשהו " "

$\varnothing$ סגורה, X סגורה

משפט: כדור פתוח הוא קבוצה פתוחה

" " סגור " " סגורה

הגדרה: יהיו (X,ρ) (Y,σ) מרחבים מטריים, $F:X\to Y$

F תיקרא רציפה בנקודה $a\in X$ אם

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\ \rho(x,a)<\delta \to \sigma(F(x),F(a))<\epsilon$$

הגדרה: F רציפה אמ"מ

$$\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ F(B(a,\delta))\subset B(F(a),\epsilon)$$

שתי ההגדרות שקולות

משפט: F רציפה אמ"מ לכל $V\subset Y$ פתוחה שמקיימת $F(a)\in V$ קיימת $U\subset X$ פתוחה שמקיימת $a\in U$, $F(U)\subset V$

הוכחה: יהי $\epsilon>0$ ניקח $V=B(F(a),\epsilon)$ לכן קיימת $U\subset X$ פתוחה $a\in U$ $F(U)\subset B(F(a),\epsilon)$ כולל

U קבוצה פתוחה סביב a ולכן היא מכילה

כדור פתוח שמרכזו a ורדיוסו δ כך ש:

$$f(B(a,\delta))\subset f(U)\subset V=B(f(a),\epsilon)$$

מ.ש.ל.

הגדרה: תהי X קבוצה ו- $\tau\subset P(X)$, τ יקרא טופולוגיה של X אם:

1. $\tau_i\in\tau \;\Rightarrow\; \bigcup_{i\in I}\tau_i\in\tau$
2. $\tau_i\in\tau \;\Rightarrow\; \bigcap_{i=1}^{n}\tau_i\in\tau$
3. $\phi, X\in\tau$

הזוג (X,τ) יקרא מרחב טופולוגי. לאברי τ יקראו הקבוצות הפתוחות של X.

כל מרחב מטרי (X,ρ) מגדיר מרחב טופולוגי (X,τ_ρ)

הגדרה (X,τ) מרחב טופולוגי יקרא מטריזבילי אם קיימת מטריקה על X שמגדירה את (X,τ)

מרחבים מטריים

$$X=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1\}\cup\{(x,0)\mid 0\le x\le 1\}$$

$a=(x,y)$
$b=(x',y')$

$$\rho(a,b)=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2}$$

בהינתן מרחב לינארי ממשי X הפונקציה $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}$ נקראת נורמה אם:

1. $\|x\|\ge 0$

$\|x\|=0 \iff x=0$

2. $\|\alpha x\|=|\alpha|\,\|x\|$

③ $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$

מרחק מטרי שמושרה ע"י נורמה נקרא נורמי

בדוק: $\rho(x,y)=\|x-y\|$ מגדיר מטריקה

הגדרה: כל קבוצה חלקית של X המכילה קבוצה פתוחה המכילה את a נקראת סביבה של a

אם V_a פתוחה אז היא נקראת סביבה פתוחה של a.

תהי $\{U_\alpha^{(a)}\}_{\alpha\in\Lambda}$ מערכת סביבות של a נאמר עליה שהיא מערכת פונדמנטלית של סביבות אם כל סביבה של a מכילה אחד של $\{U_\alpha^{(a)}\}$

טענה: חיתוך מספר סופי של סביבות של נקודה הינו סביבה של אותה נקודה

טענה: אם $a\neq b$ אז קיימת סביבה של a V_a וקיימת סביבה של b V_b כך ש $V_a\cap V_b=\phi$

טענה: במרחב מטרי קבוצה U היא סביבה לכל אחת מהנקודות שלה אם"ם היא פתוחה

הוכחה: $\forall a\in U \; \exists \underset{\text{פתוחה}}{D_a} \; a\in D_a\subseteq U$ ואז:

$U=\bigcup_{a\in U} D_a$ ואיחוד של קבוצות פתוחות הוא תמיד פתוח.

הג' (X,ρ) מרחב מטרי ותהי $A\subseteq X$ $a\in A$ נקראת פנימית לA אם קיימת סביבה של a המוכלת ב-A

הגדרה: אוסף כל הנקודות הפנימיות של A נקראת הפנים של A ומסומנת $\mathring{A}, int A$

טענה: הפנים של קבוצה הינו הקבוצה הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-A

$A\subset B\Rightarrow \mathring{A}\subset\mathring{B}$ למה

למה: A פתוחה אמ"מ $\mathring{A}=A$

הגדרה: נקודה a נקראת חיצונית ל-A אם היא פנימית למשלים של A

הגדרה: החוץ של A הוא הפנים של המשלים שלה

הגדרה: מטריקה ρ על X נקראת חסומה אם קיים מספר A כך שלכל $x,y\in X$
$\rho(x,y)\le A$

הגדרה: (X,ρ), (Y,σ) מרחבים מטריים

$f:X\to Y$ חח"ע ועל נקראת איזומטריה של X על Y אם מתקיים

$$\rho(x_1,x_2)=\sigma(f(x_1),f(x_2))$$

משפט: $A^\circ\cup B^\circ\subset(A\cup B)^\circ$

הגדרה: $(A^c)^\circ=\mathrm{ext}\,A$

הגדרה: נקודה $x\in X$ נקראת נקודת סגור של $A\subset X$ אם:
$\forall V\subset X \quad x\in V\Rightarrow V\cap A\neq\emptyset$

משפט: אם $a\in A$ אז a היא נקודת סגור של A

הגדרה: $\bar{A}=\{x\in X\mid \forall V\subset X\ x\in V\Rightarrow V\cap A\neq\emptyset\}$ נקרא הסגור של A

משפט: $A\subset\bar{A}$

משפט: הסגור של קבוצה הוא הקבוצה הסגורה המצומצמת ביותר המכילה את אותה קבוצה

הוכחה: הסגור של קבוצה הוא קבוצה סגורה:
תהי A קבוצה נקח $x\notin\bar{A}$

11.11.82

1) $I=[0,1]$, $C(I)$ היא קבוצת הפונקציות
$f:I\to R$ רציפות. הראה ש-

$$\rho(f,g)=\sup_{x\in I}|f(t)-g(t)|$$

מטריקה על $C(I)$

2) מטריקה על X נקראת חסומה אם קיים מספר A כך
ש לכל $x,y\in X$ — $\rho(x,y)\le A$

תהי ρ מטריקה על X. הראה ש

$\rho^*(x,y)=\min\{\rho(x,y),1\}$ גם כן מטריקה על X והיא
חסומה. כנ"ל עבור

$$\bar\rho(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

3) נסמן ב-m את קבוצת כל הסדרות (x_n) החסומות
והממשיות. נגדיר

$$\rho((x_n),(y_n))=\sup_{n\in\mathbb{N}}\{|x_n-y_n|\}$$

הראה ש-ρ מטריקה על m

4) יהי p מספר ממשי ו-ℓ^p קבוצת כל הסדרות הממשיות
(x_n) כך ש $\sum_1^\infty|x_n|^p<\infty$.
אם $p\ge 1$ נגדיר

$(x_n),(y_n)\in\ell^p$
$$\rho((x_n),(y_n))=\left(\sum|x_n-y_n|^p\right)^{1/p}$$

הראה ש-ρ מטריקה על ℓ^p. (השתמש באי-שוויון מינקובסקי —
כפי שמוכח בספרי האנליזה).

אם $0<p<1$ נגדיר

$$\rho((x_n),(y_n))=\sum_1^\infty|x_n-y_n|^p$$

הוכח שזו מטריקה (השתמש ב- $|a+b|^p\le|a|^p+|b|^p$ עבור $a,b\in R$
ו- $0<p<1$)

5. תן שתי דוגמאות למרחבים מטריים [illegible]

6. יהיו (X,ρ), (Y,σ) מרחבים מטריים, $f:X\to Y$, 1-1, על
ו- $\rho(a,b)=\sigma(f(a),f(b))$ לכל $a,b\in X$ ~~$f(a,b)$~~
נקרא איזומטריה של X על Y. הראה
ש-f^{-1} היא איזומטריה של Y על X
וכי f, f^{-1} רציפות.

14.11.82
מגיש: [illegible]
ת.ז. 22165884

תרגיל טופולוגיה

צריך להוכיח קודם כל ש ρ מוגדר היטב $\sup \dots < \infty$

$\forall g, f, t \in I \quad |f(t) - g(t)| \geq 0$ (1) (1)

$$\Downarrow$$

$$\sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| \geq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\rho(f,g) \geq 0$$

$\forall f, g \quad f = g \Leftrightarrow \forall t \in I \; |f(t) - g(t)| = 0 \Leftrightarrow$ (2)

$$\Leftrightarrow \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| = 0 \Leftrightarrow \rho(f,g) = 0$$

$\forall f, g \quad \rho(f,g) = \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| = \sup_{t \in I} |g(t) - f(t)| = \rho(g,f)$ (2)

$\forall f, g, h \quad \rho(f,h) = \sup_{t \in I} |f(t) - h(t)| \leq$ (3)

$$\leq \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)| \leq \sup_{t \in I} |f(t) - g(t)| + \sup_{t \in I} |g(t) - h(t)| =$$

$$\rho(f,g) + \rho(g,h)$$

$\forall x, y \quad \rho^*(x,y) = \min\{\rho(x,y), 1\} \geq 0$ (1)(1) (2)

למה ρ^* סימטרי?

(2)

$\forall x, y \quad x = y \Leftrightarrow \rho(x,y) = 0 \Leftrightarrow \min\{\rho(x,y), 1\} = 0 \Leftrightarrow \rho^*(x,y) = 0$

לא נכון

סימטריות ρ^* נובעת מתכונות הפונקציה min (3)

$\rho^*(x,z) = \min\{\rho(x,z), 1\} \leq \min\{\rho(x,y) + \rho(y,z), 1\} \leq$ (4)

$$\leq \min\{\rho(x,y), 1\} + \min\{\rho(y,z), 1\} = \rho^*(x,y) + \rho^*(y,z)$$

$\forall x, y \quad \rho(x,y) \geq 0$ (1) (2) (3)

$$1 + \rho(x,y) \geq 1$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1 + \rho(x,y)} \geq 0$$

② $\forall x,y \quad \bar\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=0 \Leftrightarrow \rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

③ $\forall x,y \quad \bar\rho(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}=\frac{\rho(y,x)}{1+\rho(y,x)}=\bar\rho(y,x)$

④ הפונקציה $\frac{x}{1+x}$ היא פונקציה עולה כלומר אם מגדילים את x יגדל ערך הפונקציה ולכן:

$$\forall x,y,z \quad \bar\rho(x,y)+\bar\rho(y,z)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}=\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)+2\rho(x,y)\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)}$$

$$=\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)+2\rho(x,y)\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)} \geq \frac{\rho(x,z)+2\rho(x,y)\rho(y,z)}{1+\rho(x,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)} \geq$$

$$\geq \frac{\rho(x,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)+\rho(x,y)\rho(y,z)} \geq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)}=\bar\rho(x,z)$$

מדוע $\bar\rho$ תואמת?

③ א) $\{x_n\},\{y_n\}$ חסומות ולכן גם $\{x_n-y_n\}$ חסומה ולכן יש לה סופרמום סופי.

ב) $\{x_n-y_n\}$ תמיד חיובית ולכן הסופרמום שלה גדול מ-0

② $\forall \{x_n\},\{y_n\} \quad \{x_n\}=\{y_n\} \Leftrightarrow \forall n\ x_n=y_n \Leftrightarrow \forall n\ |x_n-y_n|=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \sup_n |x_n-y_n|=0$

③ $\forall \{x_n\},\{y_n\},\{z_n\} \quad \rho(\{x_n\},\{z_n\})=\sup_n |x_n-z_n| \leq$

$$\leq \sup_n |x_n-y_n|+|y_n-z_n| \leq \sup_n |x_n-y_n|+\sup_n |y_n-z_n| =$$
$$=\rho(\{x_n\},\{y_n\})+\rho(\{y_n\},\{z_n\})$$

1) $\rho(\{x_n\},\{y_n\})$ קיים תמיד הוכחה:

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\})=\left(\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_1^\infty(|x_n|+|y_n|)^p\right)^{1/p}\ \le$$

מסכם?

$$\left(\sum_1^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_1^\infty |y_n|^p\right)^{1/p}<\infty$$

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\})=\left(\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}\ge 0 \qquad (2)$$

כי $|x_n-y_n|^p\ge 0$

$$\{x_n\}=\{y_n\}\Leftrightarrow x_n-y_n=0\Leftrightarrow |x_n-y_n|^p=0\Leftrightarrow \qquad (3)$$

$$\Leftrightarrow\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p=0\Leftrightarrow\left(\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}=0$$

4) ρ ש $|x_n-y_n|=|y_n-x_n|$ גוררת בקלות חילופיות

$$\rho(\{x_n\},\{z_n\})=\left(\sum_1^\infty |x_n-z_n|^p\right)^{1/p}\le \qquad (5)$$

$$\le\left(\sum_1^\infty(|x_n-y_n|+|y_n-z_n|)^p\right)^{1/p}\le$$

$$\le\left(\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_1^\infty |y_n-z_n|^p\right)^{1/p}=\rho(\{x_n\},\{y_n\})+\rho(\{y_n\},\{z_n\})$$

לפי 1,5 השתמשתי באי-שוויון מינקובסקי:

לכל $\{x_n\}\in\ell^p$, $p\ge 1$, $\{y_n\}\in\ell^p$

$$\left(\sum_1^\infty |x_n-y_n|^p\right)^{1/p}\le\left(\sum_1^\infty |x_n|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_1^\infty |y_n|^p\right)^{1/p}$$

הוכחה: <u>למה:</u> לכל $p \ge 1$

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right]^{1/p} \le$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} + \left[\sum_{i=1}^{n} |y_i|^p\right]^{1/p}$$

<u>הוכחה:</u> עבור $p=1$ האי-שוויון ~~את~~ טריוויאלי. לכן נניח $p>1$ ודי לראות ש

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i+y_i|^p\right]^{1/p} \le \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/p}$$

כעת: $(|x_i|+|y_i|)^p = (|x_i|+|y_i|)^{p-1}|x_i| + (|x_i|+|y_i|)^{p-1}|y_i|$

נחבר לפי i:

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p = \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|x_i| + \sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|y_i|$$

נעריך את המחובר הראשון ע"פ אי-שוויון הלדר:

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^{p-1}|x_i| \le$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} \left((|x_i|+|y_i|)^{p-1}\right)^q\right]^{1/q} =$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right]^{1/p} \left[\sum_{i=1}^{n} (|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/q}$$

אז נבצע את אותה פעולה על המחובר השני ב
אגף ימין ונחבר נקבל

$$\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p \le \left\{\left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{1/p}\right\}\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/q}\right.$$

ע"י חלוקה: (מניחים ש $\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p \neq 0$ אחרת ~~אם~~ אי השוויון הוא טריוויאלי):

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(|x_i|+|y_i|)^p\right]^{1/p} \le$$

$$\le \left[\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right]^{1/p}+\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i|^p\right]^{1/p}$$

ולכן כי ~~אצא~~ אי השוויון הראשון בהוכחה מתקיים אי-שוויון מינקובסקי עבור n סופי.
<u>הוכחת אי השוויון</u>: כאשר משאיפים את n לאינסוף הלמה, מתקיים באגף ימין מספר סופי מאחר ש $\{x_n\},\{y_n\}\in \ell^p$ ולכן גם אגף שמאל שואף לגבול. שוב לפי אי השוויון של הלמה מתקבל שהגבול באגף שמאל קטן מהגבול באגף ימין, כלומר, מתקיים אי-שוויון מינקובסקי.

ג) 1) $|x_n-y_n|^p \ge 0$ ולכן $\rho(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{1}^{\infty}|x_n-y_n|^p \ge 0$

2)

$$\{x_n\}=\{y_n\} \Leftrightarrow x_n-y_n=0 \Leftrightarrow |x_n-y_n|^p=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n|^p = 0 \Leftrightarrow \rho(\{x_n\},\{y_n\}) = 0$$

③ מכיוון ש $|x_n - y_n| = |y_n - x_n|$ בוודאי מתקיימת ρ

④

$$\rho(\{x_n\},\{z_n\}) = \sum_{1}^{\infty} |x_n - z_n|^p =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n + y_n - z_n|^p \le \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n|^p + |y_n - z_n|^p =$$

$$= \sum_{1}^{\infty} |x_n - y_n|^p + \sum_{1}^{\infty} |y_n - z_n|^p = \rho(\{x_n\},\{y_n\}) + \rho(\{y_n\},\{z_n\})$$

(5) (א) המרחב $(\mathbb{R}^2, \rho(x,y)=|x_1-y_1|)$ הוא פסאודו מטריקה:

(1) $|x_1-y_1|$ תמיד חיובי.

(2) $|x_1-y_1|=|y_1-x_1|$ ולכן ρ חילופי.

(3) $|x_1-z_1|\le|x_1-y_1|+|y_1-z_1|$ ולכן מתקיים אי שוויון המשולש

(4) אם $X=Y$ אז $x_1=y_1$, $\rho(x,y)=|x_1-y_1|=0$

אם $\rho(x,y)=0$ לא בהכרח $X=Y$ למשל:

$X=(1,2)$

$Y=(1,3)$

ואז $X\neq Y$ וגם $\rho(x,y)=|x_1-y_1|=|1-1|=0$

(7) יהי X קבוצה ותהי $A\subset X$ כך ש $|A|>1$

נגדיר

$\cancel{\rho(x)=|\sigma(x)|}$ $\sigma(x\in X)=\begin{cases}1 & x\notin A\\ 0 & x\in A\end{cases}$

וגם $\rho(x,y)=|\sigma(x)-\sigma(y)|$

(X,ρ) הוא פסאודו מטריקה:

(1) ρ תמיד חיובית

(2) $|\sigma(y)-\sigma(x)|=|\sigma(x)-\sigma(y)|$ ולכן ρ חילופית.

(3) $|\sigma(x)-\sigma(z)|\le|\sigma(x)-\sigma(y)|+|\sigma(x)-\sigma(z)|$ ולכן ρ מקיימת את אי-שוויון המשולש.

(4) אם $X=Y$ אז או $x\in A$ וגם $y\in A$ או $x\notin A$ וגם $y\notin A$

ולכן $\sigma(x)=\sigma(y)$ ו $\rho(x,y)=0$

$|A|>1$ ולכן קיימים $x\in A$, $y\in A$ כך ש $x\neq y$.

$\sigma(x)=\sigma(y)=0$ ולכן $\rho(x,y)=0$ אולם $x\neq y$ וזוהי אינה מטריקה.

(6) (א) צ"ל כי $\rho(a,b)=\sigma(f(a),f(b))$, $a=f^{-1}(a')$

ועבור $b=f^{-1}(b')$

$\sigma(a',b')=\rho(f^{-1}(a'),f^{-1}(b'))$

f^{-1} היא חח"ע ועל כי f היא חח"ע ועל

ולכן f^{-1} היא איזומטריה של Y על X.

(ז) נכון אם f רציפה. מעתק ו-f^{-1} מקומית אז

(ני) הוכחת את הנתון כדוגמה שאם f רציפה אז גם f^{-1} תהיה רציפה.

<u>הוכחה</u>: יהי $a\in X$ ויהי $\epsilon>0$ נבחר $\delta=\epsilon$ ונקבל:

$$\rho(a,b)<\delta$$
$$\Downarrow$$
$$\sigma(f(a),f(b))=\rho(a,b)<\delta=\epsilon$$

ולכן f רציפה במ"ש.

(ז) (1) צ"ל $\text{int}\, A\cap B=\text{int}\, A\cap \text{int}\, B$

(א) יהי $x\in \text{int}\, A\cap B$ אזי יש לו סביבה $X\subset A\cap B$ כלומר $X\subset A$ וגם $X\subset B$ ולכן $x\in \text{int}\, A$ וגם $x\in \text{int}\, B$ ולכן $x\in \text{int}\, A\cap \text{int}\, B$

(ב) יהי $x\in \text{int}\, A\cap \text{int}\, B$ אזי יש לו סביבה $\alpha\subset A$ וסביבה $\beta\in B$ ולכן גם $\alpha\cap\beta$ היא סביבה של x ומתקיים $\alpha\cap\beta\subset A\cap B$ ולכן $x\in \text{int}\, A\cap B$

(2) נראה דוגמא נגדית: יהי $X=\mathbb{R}^1$ במטריקה הרגילה. נקח A: קבוצת הרציונליים
B: קבוצת האי-רציונליים
$X=A\cup B$ קבוצה פתוחה ולכן $\text{int}\, X=X$
~~int~~ קבוצות כאלו $\text{int}\, B=\emptyset=\text{int}\, A$ כלומר:

$$X=\text{int}\, A\cup B\neq \text{int}\, A\cup \text{int}\, B=\emptyset\cup\emptyset=\emptyset$$

כלומר קיימת סביבה V_x כך ש $V_x \cap A = \emptyset$

ולכן $V_x \subset A^c$ כלומר x פנימית למשלים של A ⇐

$$\subset \bar{A} = (A^c)^\circ$$

$$\bar{A} = ((A^c)^\circ)^c$$

⑧ כדרוש. ~~A פתוחה~~ ⇐ $(A^c)^\circ$ פתוחה ⇐ $((A^c)^\circ)^c$ סגורה

⇐ $\bar{A}$ סגורה

⑦ $\bar{A}$ היא הסגורה המצומצמת קודם:

נניח קיימת ~~נקודה~~ נקודת סגור ל-A שאינה

שייכת לקבוצה סגורה כלשהי $A \subset B$

כלומר היא פנימית ל A^c כלומר

לכן קיימת קבוצה פתוחה של A^c שמכילה את x

כלומר כל סביבה של x מכילה ~~...~~

קבוצה פתוחה סביבו שאינה מוכלת ב A^c

ולכן הסביבה עצמה אינה מוכלת ב A^c

ולכן $x \in \bar{A}$

משפט A סגורה ⇔ $A = \bar{A}$

טענה $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

טענה $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$

טענה $A \subset A \cup B$ ⇐ $\bar{A} \subset \overline{A \cup B}$

$B \subset A \cup B$ ⇐ $\bar{B} \subset \overline{A \cup B}$ ולכן $\bar{A} \cup \bar{B} \subset \overline{A \cup B}$

טענה ~~...~~ $\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cup B}$

טענה $\overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$

הוכחה:

$$A \cap B \subset A \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A}$$

$$A \cap B \subset B \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{B} \quad \Rightarrow \overline{A \cap B} \subset \bar{A} \cap \bar{B}$$

הגדרה יהי (X, ρ) מרחב מטרי ו $A \subset X$

$$\rho(A, a) = \inf\{\rho(x, a) \mid x \in A\}$$

טענה: q נקודת סגור של A $\Leftrightarrow$ $\rho(A,q)=0$

טענה: $a\in X, \epsilon>0 \Rightarrow B(a,\epsilon)=\overline{B(a,\epsilon)}$

דוגמה: $B(a,\epsilon)\neq\overline{B(a,\epsilon)}$ יהי עם

$X=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}\cup\{(x,0)|x^2<1\}$ במטריקה הרגילה

$$B(a,\epsilon)\neq\overline{B(a,\epsilon)}$$

טענה: יהי A קבוצה במרחב מטרי אזי:

$$q\in A, q\notin\bar{A} \Rightarrow \forall V_q\ q\in V_q \Rightarrow |V_q|=\infty$$

הגדרה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $A\subset X$, $x\in X$

x נקודת הצטברות של A אם

$$\forall V_x\ x\in V_x \Rightarrow (V_x-\{x\})\cap A\neq\emptyset$$

טענה: כל נקודת הצטברות היא נקודת סגור

טענה: כל נקודת סגור שאינה שייכת לקבוצה היא נקודת הצטברות.

דוגמה: $A=(1,2)\cup\{3\}$ הנקודה 3 שייכת לסגור אך אינה נקודת הצטברות

הגדרה: אוסף כל נקודות ההצטברות של A נקרא הקבוצה הנגזרת של A ויסומן A'

טענה: $A\cup A'=\bar{A}$

קבוצות צפופות וספרביליות:

הגדרה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $A,B\subset X$ נאמר ש A צפופה יחסית ל B אם

$$B\subset\bar{A}$$

טענה: A צפופה ב B ו B צפופה ב C. נראה A צפופה ב C

~~למה: X נקודות סגור $B\subset\bar A \Rightarrow \bar B\subset \bar A$~~

הוכחה:

$B\subset\bar A \Rightarrow \bar B\subset\bar{\bar A} \Rightarrow \bar B\subset\bar A \Rightarrow C\subset\bar B\subset\bar A$

ולכן C צפופה בA

טענה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי: $A \Leftrightarrow \bar A = X$ צפופה ריקם
לכל $B\subset X$

טענה: כל קבוצה פתוחה ב X חותכת את A
אמ״ $\bar A = X$

הגדרה: אם במרחב מטרי קיימת קבוצה צפופה בו שהיא לכל היותר בת-מניה אומרים שהמרחב ספרבילי

הגדרה: יהי (X,ρ) משפחה $\phi=\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ של קבוצות פתוחות לא ריקות נקראת בסיס של הקבוצות הפתוחות אם כל קבוצה פתוחה לא ריקה היא איחוד כלשהו של תת משפחה של $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$

טענה: $\{G_\alpha\}_{\alpha\in I}$ בסיס לפתוחות אמ"מ

$$\forall x\in X, \forall V_x\ \exists \alpha\in I \quad x\in G_\alpha\subset V_x$$

טענה: מרחב מטרי הוא ספרבילי $\Leftrightarrow$ קיים בסיס לכל היותר בן מניה לקבוצות הפתוחות
אם יש בסיס טריביאלי שהמרחב ספרבילי.
אם המרחב ספרבילי נסתכל על $B=\{B(a,\frac{1}{n})\mid a\in A, n\in\mathbb{N}\}$ כש $\bar A = X$ בת-מניה.

(10) B קרת-מניה

(7) B בסיס: מספיק ~~להראות~~ להוכיח

$$\forall x\in X,\ \forall V_x\ \exists n\in\mathbb{N}\ \ x\in B_n\subset V_x$$

<u>הוכחה</u>: יהי $x\in X$ ותהי V_x מכילה V_x [illegible]

בדרה פתוחה כלשהו המכיל את x. נסמן

את הרדיו r ~~[illegible]~~

יהי n כך ש $\frac{1}{n}<\frac{r}{2}$. הכדור $B(x,\frac{1}{n})$ חותך

את A כי A צפופה ולכן קיים

$a\in A$ כך ש $a\in B(x,\frac{1}{n})$ כלומר

(1) $B(a,\frac{1}{n})\in B$

(2) $\rho(x,a)<\frac{1}{n}\Rightarrow x\in B(a,\frac{1}{n})$

(3) לכל $y\in B(a,\frac{1}{n})$

$$\rho(x,y)\le\rho(x,a)+\rho(a,y)<\frac{r}{2}+\frac{r}{2}=r$$

ולכן

$$x\in B(a,\tfrac{1}{n})\subset B(x,\tfrac{1}{n})\subset V_x$$

<u>תת מרחב של מרחב מטרי</u>

<u>הגדרה</u>: יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $Y\subset X$, (Y,ρ)

נקרא תת-מרחב של המרחב המטרי (X,ρ).

<u>הגדרה</u>: יהיו $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$ מרחבים מטריים. כדור

פתוח סביב a ב (Y,ρ) הוא $B(a,r)\cap Y$

טענה: קבוצה $A\subset Y$ פתוחה ב-Y $\iff$ קיים D פתוחה ב-X כך ש $A=D\cap Y$

(⇐) תהי A פתוחה ב-Y. לכל $x\in A$ קיים $r(x)$ כך ש $B(x,r(x))\subset A$

$$D=\bigcup_{x\in A} B(x,r(x))$$

$A=D\cap Y$, D פתוחה ב-X

(⇒) $A=D\cap Y$ כאשר D פתוחה ב-X $\Rightarrow$ $\forall x\in D$ יש כדור מוכל ב-D $\Rightarrow$ זהו כדור ב-Y $\Rightarrow$ שכן גם ב-A.

טענה: $(Y,\rho_Y)\subset(X,\rho)$ כל פתוחה ב-Y פתוחה ב-X $\iff$ Y פתוחה.

הוכחה: (⇐) נניח Y פתוחה. תהי $D\subset Y$ פתוחה ב-Y, כלומר $\forall x\in D$ קיים $\epsilon>0$ כך ש $B_Y(x,\epsilon)\subset D$

וקיים גם $\epsilon_1>0$ כך ש $B_X(x,\epsilon_1)\subset Y$

ולכן

$B_X(x,\min\{\epsilon,\epsilon_1\})\subset X$

ו-D פתוחה גם ב-X

(⇒) נניח Y איננה פתוחה אזי קיים $x\in Y$ כך שלכל $\epsilon>0$ כך ש $B_Y(x,\epsilon)\subset Y$

נקח $D\subset Y$ שמכילה את x ונניח ש-D פתוחה, אזי קיים ϵ כך ש

$B_Y(x,\epsilon)\subset D\subset Y$

ולכן D איננה פתוחה.

טענה: יהי $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$, $a\in Y$ קבוצה $V\subset Y$ היא סביבה של a ב-Y אמ"מ $V=W\cap Y$ כאשר W סביבה של a ב-X.

הוכחה: תהי V סביבה של a ב-Y אזי קיים $\epsilon>0$ כך ש $B_Y(a,\epsilon)\subset V$

נגדיר $W=V\cup B_X(a,\epsilon)$ (c) $Y\cap W=Y\cap(V\cup B_X(a,\epsilon))=$

$(Y\cap V)\cup(Y\cap B_X(a,\epsilon))=V\cup B_Y(a,\epsilon)=V$

(ב) W סביבה של a ב-X כי הוא מכיל את $B_X(a,\epsilon)$

(ד) אם W סביבה של a ב-X אז קיים $\epsilon>0$ כך ש- $B_X(a,\epsilon)\subset W$ ולכן:

$$B_Y(a,\epsilon)=Y\cap B_X(a,\epsilon)\subset Y\cap(B_X(a,\epsilon)\cup W)\subset Y\cap W$$

ולכן $Y\cap W$ סביבה של a ב-Y

<u>טענה</u>: יהי $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$ $F\subset Y$ סגורה יחסית ל-Y אם"ם $F=Y\cap A$ כאשר A סגורה ב-X

<u>הגדרה</u>: $\overline{A_Y}$ יקרא הסגור של A יחסית ל-Y

<u>טענה</u>: יהי $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$ אז $\overline{A}_Y=\overline{A}_X\cap Y$

<u>הוכחה</u>: (1) $\overline{A_Y}\subset\overline{A_X}\cap Y$ לכיוון

~~$a\in\overline{A_X}\cap Y\Rightarrow a\in\overline{A_X},\ a\in Y\Rightarrow\forall\epsilon>0\ B(a,\epsilon)\cap A_X\neq\emptyset$~~ (ד)

~~$\Rightarrow\forall\epsilon>0\ B_Y(a,\epsilon)\cap A\neq\emptyset\Rightarrow$~~ $Y\subset\overline{A}_Y\subset\overline{A}_X\cap Y$ (ד)

(2) $\overline{A_X}\cap Y$ סגורה כי $\overline{A_X}$ סגורה

(3) $\overline{A_X}\cap Y$ המינימלית הסגורה כי $\overline{A_X}$ המינימלית הסגורה.

<u>טענה</u>: אם מרחב הוא ספרבילי אז כל תת מרחב שלו ספרבילי: <u>הוכחה בהמשך</u>

~~<u>הוכחה</u>: אם X ספרבילי אז קיימת $A\subset X$ בת-מנייה צפופה ב-X. $B=A\cap Y\subset Y$. B בת מנייה~~

~~$\overline{B}=\overline{A}\cap Y=X\cap Y=Y$ צפופה ב-Y כי~~

קבוצות חסומות

(X,ρ) מרחב מטרי, $A\subset X$. A חסומה אם קיים $A\subset B(a,R)$ ש

הגדרה קוטר של הקבוצה: $\delta(A)=\sup_{x,y\in A}\rho(x,y)$

דוגמא:

$$\delta(B(a,\epsilon))\le 2\epsilon$$

טענה: קבוצה במרחב מטרי חסומה אמ"מ קוטר הקבוצה סופי.

יהיו (X,ρ), (Y,σ), $F:X\to Y$

(א) F רציפה ב-x_0 אם

$$\forall \epsilon>0\ \exists \delta>0\ \ \rho(x,x_0)<\delta \Rightarrow \sigma(F(x),F(x_0))<\epsilon\ \ \forall$$

(ב) F רציפה ב-x_0 אם

$$\forall B(F(x_0),\epsilon)\ \exists B(x_0,\delta)\ \ F(B(x_0,\delta))\subset B(F(x_0),\epsilon)$$

(ג) F רציפה ב-x_0 אם

$$\forall D\subset Y\ \ F(x_0)\in D \Rightarrow \exists_{\text{פתוחה}} U\subset X\ \ F(U)\subset D\ \ \forall$$

(ד) F רציפה ב-x_0 אם:

$$\forall V_{F(x_0)}\ \exists V_{x_0}\ \ F(V_{x_0})\subset V_{F(x_0)}$$

(ה) **משפט**: F רציפה ב-x_0 אמ"מ לכל סביבה V של $F(x_0)$ הרי ש-$F^{-1}(V)$ סביבה של x_0 ב-X

הוכחה: (א) נניח F רציפה ב-x_0 ותהי V סביבה של $y_0=F(x_0)$ נוכיח ש-$F^{-1}(V)$ סביבה של x_0

(1) $x_0\in F^{-1}(V)$ כדור קיים $\epsilon>0$ כך ש-$B(y_0,\epsilon)\subset V$

מהרציפות נובע שקיים $\delta>0$ כך ש-$F(B(x_0,\delta))\subset V$

בפרט:

$$B(x_0,\delta)\subset F^{-1}(F(B(x_0,\delta)))\subset F^{-1}(V)$$

ולכן $F^{-1}(V)$ סביבה של x_0

(ב) נניח שלכל סביבה V של $y_0=F(x_0)$ $F^{-1}(V)$ סביבה של x_0

x_0 סביבה $F^{-1}(V)\Rightarrow \exists B(x_0,\epsilon)\subset F^{-1}(V)$

ולכן $F(B(x_0,\epsilon))\subset F(F^{-1}(V))\subset V$

ולכן F רציפה ב-x_0

טענה: תהי f רציפה ב-x_0 ו-$x_0\in\bar{A}$, $A\subset X$ אז $f(x_0)\in\overline{f(A)}$

הוכחה:

$$\forall \epsilon>0\ \exists\delta>0\ f(B(x_0,\delta))\subset B(f(x_0),\epsilon)$$

$$B(x_0,\delta)\cap A\neq\emptyset\Rightarrow f(B(x_0,\delta))\cap f(A)\neq\emptyset\Rightarrow$$

$$\Rightarrow B(f(x_0),\epsilon)\cap f(A)\neq\emptyset\Rightarrow f(x_0)\in\overline{f(A)}$$

משפט: $f:X\to Y$ מ"מ - שקולים

1. f רציפה
2. לכל $A\subset Y$ פתוחה $f^{-1}(A)$ פתוחה ב-X
3. לכל $B\subset Y$ סגורה $f^{-1}(B)$ סגורה ב-X
4. לכל $A\subset X$ $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$

הוכחה: (1) $(1)\Rightarrow(4)$ זה המשפט הקודם לכל $x\in\bar{A}$ $f(x)\in\overline{f(A)}$ ולכן $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$

(2) $(4)\Rightarrow(3)$ תהי $B\subset Y$ סגורה

~~$B\subset Y$ $B=\bar{B}\Rightarrow$~~ כלומר: $\bar{B}=B$ נסמן $A=f^{-1}(B)$

נוכיח A סגורה

לפי הנתון $f(\bar{A})\subset\overline{f(A)}$

$$\Downarrow$$

$$f^{-1}(f(\bar{A}))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})$$

כמו כן: $f(A)\subset B\Rightarrow\overline{f(A)}\subset\bar{B}$

$$\bar{A}\subset f^{-1}(f(\bar{A}))\subset f^{-1}(\overline{f(A)})\subset f^{-1}(\bar{B})=f^{-1}(B)=A$$

ולכן A סגורה

(3) $(3)\Rightarrow(2)$

A פתוחה $\Rightarrow A^c$ סגורה $\Rightarrow f^{-1}(A^c)$ סגורה $\Rightarrow$

$(f^{-1}(A^c))^c$ פתוחה $\Rightarrow f^{-1}(A)$ פתוחה

כי $(f^{-1}(A^c))^c=f^{-1}(A)$

(4) $(2)\Rightarrow(1)$ לכל X הקבוצה V_x המוכלת

~~תהי A פתוחה כלשהי המכילה את x~~
~~ולכן $f^{-1}(A)$ פתוחה $x\in f^{-1}(A)\subset f^{-1}(V_x)$~~
~~$f^{-1}(V_x)$ סביבה של~~

תהי A פתוחה כלשהי המכילה את $f(x)$
ולכן $f^{-1}(A)$ פתוחה לפי הנתון $f^{-1}(f(x))\in f^{-1}(A)\subset f^{-1}(V_x)$
$f^{-1}(V_x)$ סביבה של $f^{-1}(f(x))=x$ לפי משפט
לכן f רציפה.

<u>הגדרה</u> אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x,y\in X$
מתקיים אז $\rho(x,y)<\delta \Rightarrow \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$
f נקראת רציפה במידה שווה.

<u>הגדרה</u> העתקה f חח"ע ועל רציפה ו-f^{-1} רציפה
נקראת הומיאומורפיזם של X ו-Y

<u>הגדרה</u> שני מרחבים מטריים יקראו הומיאומורפיים
אם קיים ביניהם הומיאומורפיזם

<u>הערה</u> לגבי הומיאומורפיזם מתקיימת טרנזיטיביות

<u>הגדרה</u>: $f:X\to Y$ נקראת איזומטריה של X
על Y אם f חח"ע, על ומתקיים

$$\forall x,y\in X \quad \rho(x,y)=\sigma(f(x),f(y))$$

<u>הערה</u> איזומטריה היא תמיד חח"ע <u>הוכחה</u>:

$$f(x)=f(y)\Rightarrow 0=\sigma(f(x),f(y))=\rho(x,y)\Rightarrow x=y$$

<u>הערה</u> איזומטריה היא תמיד רציפה <u>הוכחה</u>:

~~$x\to y$ $\rho(x,y)<\delta$~~

$$\rho(x,y)<\varepsilon\Rightarrow\sigma(f(x),f(y))<\varepsilon$$

ולכן איזומטריה תמיד רציפה במ"ש.

<u>מסקנה</u> איזומטריה היא גם הומיאומורפיזם
<u>הערה</u> אם $f:X\to Y$ איזומטריה גם f^{-1} איזומטריה

הערה: f^{-1} חח"ע, על וגם:

$\forall x,y\in Y \ \exists x^{-1},y^{-1}\in X \ f(x^{-1})=x, f(y^{-1})=y \Rightarrow$

$\Rightarrow \rho(f^{-1}(x),f^{-1}(y))=\rho(x^{-1},y^{-1})=\sigma(f(x^{-1}),f(y^{-1}))=$

$=\sigma(x,y)$

ולכן f^{-1} איזומטריה

תרגול 9

① יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $\emptyset\neq A\subset X$ להוכיח:

$$|\rho(x,A)-\rho(y,A)|\leq\rho(x,y)$$

② (X,ρ) מרחב מטרי, A פתוחה להוכיח

$$A\cap\bar{B}\subset\overline{A\cap B}$$

③ תן דוגמא של $A,B\subset\mathbb{R}$ פתוחות כך ש

$$\bar{A}\cap\bar{B}=\bar{A}\cap B=A\cap\bar{B}=\overline{A\cap B}$$

④ הוכח שאם $O\subset X$ פתוחה אז $O\cup \text{ext}\,O$ צפופה בX

⑤ יהי (X,ρ) מרחב מטרי ספרבילי.
יהי $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ משפחה של קבוצות פתוחות לא ריקות כך ש $\mu\neq\alpha \Rightarrow U_\alpha\cap U_\mu=\emptyset$
הראה ש I לכל היותר בת מניה.

טענה: אם $(Y,\rho)\subset(X,\rho)$ ו-(X,ρ) ספרבילי אז גם (Y,ρ) ספרבילי.

הוכחה: אם (X,ρ) ספרבילי יש לו בסיס בן מניה לקבוצות הפתוחות. $A\subset Y$ פתוחה אמ"ם $A=O\cap Y$, $\exists O$ לכל קבוצה בבסיס O_n ניקח את $O_n\cap Y$. התוצאה היא בסיס לY, ולכן Y ספרבילי.

הגדרה: (X,ρ_2) ו-(X,ρ_1) יקראו שקולות טופולוגית אם העתקת הזהות הינה הומומורפיזם

משפט: לשני מרחבים שקולים טופולוגית הקבוצות הפתוחות הן זהות

הגדרה: (X,ρ), (Y,σ), $F: X\to Y$ אם

$$\forall (x,y)\in X \quad \sigma(F(x),F(y))=\rho(x,y)$$

F תקרא איזומטריה של X לY

הגדרה: (X,ρ), $\{x_n\}_1^\infty$ $x_n\in X$ $\{x_n\}$

אם $l=\lim\{x_n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,l)=0$$

משפט: גבול של סדרה הוא יחיד

משפט: X גבול של $\{x_n\}$ אמ"מ כמעט כל איברי הסדרה נמצאים בכל סביבה V_x של x

הגדרה: גבול חלקי של סדרה הוא כל x כך שכל סביבה של x V_x מקיימת

$$|V_x\cap\{x_n\}|=\infty$$

שקול לקיום תת-סדרה $\{x_{n_k}\}$ שגבולה הוא x

משפט: סדרה מתכנסת $\Leftarrow$ כל תת-סדרה מתכנסת לאותו הגבול

משפט: a גבול חלקי של $\{x_n\}$ אמ"מ לכל סביבה V_a קיים אחד כך ש $x_n\in V_a$

משפט: יהי (X,ρ), $A\subset X$ אז $a\in\bar{A}$ אמ"מ

$$\exists\{x_n\} \quad x_n\to a$$

איך גורר (תרגיל לבית) קצבת סגורות נקודות הגבולות של הקבוצה

טענה (X,ρ), (Y,σ) $f:X\to Y$ רציפה בנקודה a אמ"מ

$$\forall \{x_n\}\subset X\quad x_n\to a \Rightarrow f(x_n)\to f(a)$$

הוכחה נניח f רציפה תהי $V_{f(a)}\subset Y$ אז

$U=f^{-1}(V_{f(a)})$ סביבה של a ב X ולכן

ה־U מכילה במעט כל איברי $\{x_n\}$ ואז

V מכילה את כמעט כל $\{f(x_n)\}$ ולכן

$f(x_n)\to f(a)$ מש"ל.

נניח f לא רציפה אז קיימת סביבה

$V_{f(a)}\subset Y$ כך ש $U=f^{-1}(V_{f(a)})$ אינה

סביבה של a ואז קיימת $\{x_n\}$

כך ש $x_n\to a$ וגם $\{x_n\}\cap U=\phi$

ולכן $\phi=\{f(x_n)\}\cap V_{f(a)}$ ולכן $f(x_n)\not\to f(a)$

מש"ל

הגדרה (X,ρ) $\{x_n\}$ תקרא סדרת קושי אם

$$\forall \epsilon>0\ \exists n\in\mathbb{N}\quad m,k>n \Rightarrow \rho(x_m,x_k)<\epsilon$$

טענה כל סדרה מתכנסת היא סדרת קושי

דוגמא

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

היא סדרת קושי אבל אינה מתכנסת

אם $X=\mathbb{Q}$ (מטריקה הרגילה).

תרגיל לבית תהי (X,ρ) $\{x_n\}$ סדרה ב X היא

סדרת קושי, ו a גבול חלקי של

הסדרה. הוכח ש $x_n\to a$

הגדרה (X,ρ) נקרא שלם אם כל סדרת קושי
היא מתכנסת.

דוגמאות: ① $\mathbb{R}$ במטריקה הרגילה.

② כל $\in$ הפונקציות הרציפות ב $[0,1]$
במטריקת המקסימום

תרגיל: נגדיר את המטריקה

$$\rho^*(f,g)=\sup|f(x)-g(x)|e^{-q(x-x_0)}$$ כאשר $q>0$, $x_0\in[0,1]$

התרגיל: להוכיח שזו מטריקה ושזהו מרחב מטרי שלם

הגדרה אופרטור כיווץ הוא $f:X\to X$ כך ש

(X,ρ) $\rho(f(x),f(y))\le\alpha\rho(x,y)$ כאשר $\alpha\in[0,1)$

טענה: יהי (X,ρ) שלם ויהי f אופרטור כיווץ

$$\exists x\in X\quad f(x)=x$$

הוכחה: נבחר x_1 כלשהו ונגדיר

$$x_n=f(x_{n-1})$$

$$x=\lim_{n\to\infty}x_n$$

קל להראות שמתקיים $f(x)=x$

טענה הנקודה x היא יחידה. ההוכחה טריוויאלית

שימוש במשפט נקודת השבת של בנך

<u>טענה</u>: תהי $y'=f(x,y)$ מד"ר. למשוואה יש פתרון יחיד אם:

א) f רציפה ב-

$$|x-x_0|\le a$$
$$|y-y_0|\le b$$

ב) קיים $L>0$ קבוע כך שלכל x המקיים $|x-x_0|\le a$ ולכל y_1,y_2 המקיימים

$$|y_1-y_0|\le b$$
$$|y_2-y_0|\le b$$

מתקיים

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le L\cdot|y_1-y_2|$$

ואז פתרון המשוואה $y(x)$ מקיים: $y(x_0)=y_0$
ומוגדר $|x-x_0|<\delta$ כאשר $\delta=\min(a,\frac{b}{M})$
כאשר

$$M=\sup_{\substack{|x-x_0|\le a\\|y-y_0|\le b}} f(x,y)$$

<u>הוכחה</u>: המשוואה הדיפרנציאלית $y'=f(x,y)$ שקולה ל

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))dt$$

נתבונן במרחב הפונקציות הרציפות בקטע $I=[x_0-\delta,x_0+\delta]$ ונסמנו C. תהיינה $u,v\in C$ נגדיר מטריקה:

$$\rho(u,v)=\sup_{x\in I}|u(x)-v(x)|e^{-L|x-x_0|}$$

הוכחנו קודם כי המרחב (C,ρ) הוא מרחב-מטרי שלם.

נתבונן בקבוצה:

$$\Sigma=\{u\in C \mid |u(x)-y_0|\le b \ \ \forall x\in I\}$$

<u>טענה:</u> Σ סגורה ב-C. תהי $\{u_n\}\in\Sigma$ סדרת פונקציות מתכנסת במ"ש ל-u. u רציפה ולכן $u\in C$ ולכל $x\in I$ $|u_n(x)-y_0|\le b$ לכן $|u(x)-y_0|\le b$ כלומר $u\in\Sigma$. כלומר לכל סדרה מתכנסת ב-Σ הגבול הוא ב-Σ ולכן Σ סגורה.

כעת Σ סגורה ותת-מרחב של ממ"ש ולכן Σ ממ"ש

נגדיר העתקה על כל $u\in\Sigma$:

$$\bar{u}=T(u)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(t,u(t))\,dt$$

$\bar{u}$ רציפה כי u רציפה

$$|T(u)(x)-y_0|\le M|x-x_0|\le M\cdot\delta\le b$$

ולכן $T(u)\in T(\Sigma)$ וגם $T(u)$ מקיים את התנאי של Σ ולכן $T(u)\in\Sigma$.

מכאן:

$$T(\Sigma)\subset\Sigma$$

כעת:

$$T(u)-T(v)=\int_{x_0}^{x}[f(t,u(t))-f(t,v(t))]\,dt=$$

$$=\int_{x_0}^{x}e^{L|t-x_0|}[f(t,u(t))-f(t,v(t))]e^{-L|t-x_0|}\,dt$$

ולכן:

$$|T(u)-T(v)| \leq \int_{x_0}^{x} e^{L|t-x_0|} \cdot |f(t,u(t))-f(t,v(t))| e^{-L|t-x_0|} \, dt \leq$$

ת. ליפשיץ

$$\leq \int_{x_0}^{x} e^{L|t-x_0|} \cdot L |u(t)-v(t)| \cdot e^{-L|t-x_0|} \, dt \leq$$

$$\leq \sigma(u,v) \int_{x_0}^{x} L e^{-L|t-x_0|} \, dt \leq \sigma(u,v) |e^{L|x-x_0|}-1|$$

מכאן:

$$|T(u)-T(v)| \cdot e^{-L|x-x_0|} \leq (1-e^{-L|x-x_0|}) \cdot \sigma(u,v)$$

ולכן

$$\sigma(T(u),T(v)) \leq \alpha \sigma(u,v) \qquad \alpha = 1-e^{L\sigma} < 1$$

קבלנו ש T היא העתקה כווצת ולכן קיימת $\varphi \in \Sigma$ כך ש $T(\varphi)=\varphi$ כלומר:

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t,\varphi(t)) \, dt$$

פתרון אחד ויחיד למד"ר.

מ.ש.ל.

טענה: יהי (X,ρ) מרחב מטרי, $\{x_n\},\{y_n\}$ סדרות קושי אזי הסדרה $\rho(x_n,y_n)$ היא ~~מתכנסת~~ מתכנסת

הגדרה:

$$\overline{X}=\{\text{קבוצת כל הסדרות קושי ב}(X,\rho)\}$$

טענה:

$$\overline{X}\neq\emptyset$$

הגדרה: נגדיר את $\tau:\overline{X}\times\overline{X}\to R$

$$\tau(\overline{x},\overline{y})=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$$

טענה: $(\overline{X},\tau)$ היא פסאודו מטריקה

הגדרה: יחס על $\overline{X}$

$$\overline{x}\sim\overline{y}\iff\tau(\overline{x},\overline{y})=0$$

טענה: $\sim$ הוא R.S.T.

הגדרה: מחלקת השקילות של $\overline{x}$ תהיה $[\overline{x}]$
קבוצת המנה של $\overline{X}$ לפי $\sim$ היא $\hat{X}$

הגדרה: נגדיר את

$$\sigma:\hat{X}\times\hat{X}\to R$$

ע"י

$$\sigma([\overline{x}],[\overline{y}])=\tau(\overline{x},\overline{y})$$

טענה: $(\hat{X},\sigma)$ מרחב מטרי.

הגדרה: $f:X\to\hat{X}$ היא $f(x)=[(x,x,x,x,x\ldots,x)]$

טענה: $f(X)$ צפופה ב $\hat{X}$

הוכחה: יהי $y\in\hat{X}$ אזי

$$y=[\overline{x}]$$

$$\overline{x}=\{x_n\}$$

נתבונן ב $y_n=f(x_n)$ סדרה ב $\hat{X}$, $y_n\in f(X)$

נגדיר $Y_n=[(x_n,x_n,x_n\ldots x_n)]$ ולכן: כי $\bar{X}_k=(x_k,x_k,x_k\ldots)$

$$\sigma([\bar X],Y_k)=\tau(\bar X,\bar X_k)=\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x_k)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

ולכן $Y_k\to[\bar X]$ כאשר $k\to\infty$

כלומר לכל איבר ב-$\hat X$ קיימת סדרה ב-$F(X)$

המתכנסת אליו ולכן $F(X)$ צפופה ב-$\hat X$

מ.ש.ל.

~~טענה: F היא איזומטריה~~

טענה: F היא איזומטריה מ-X ל-$\hat X$

טענה: $(\hat X,\sigma)$ שלם: בגלל שכל סדרת קושי ב-$\hat X$ מתכנסת אבל מספיק להוכיח שכל סדרת קושי ב-$F(X)$ מתכנסת. הוכחה:

תהי $\{F(x_n)\}$ סדרת קושי ב-$F(X)$ ולכן $\{x_n\}$ היא סדרת קושי

נגדיר $(x_1,x_2\ldots x_n\ldots)\in\bar X$

$$[\bar X]\in\hat X$$

$$F(x_n)\to[\bar X]$$

מסקנה: $(\hat X,\sigma)$ שלם

טענה: כל מרחב מטרי הוא איזומטרי לת"מ צפוף של מרחב מטרי שלם כלשהו

הגדרה: $\hat X$ נקרא השלמה של X

טענה: אם $\hat X$ ו-$\hat X'$ השלמות של X אז $\hat X$ ו-$\hat X'$ איזומטריים.

הגדרה: יהי (X,ρ) מ"מ. $A\subset X$ נקראת דלילה אם

$$\operatorname{int}\bar A=\emptyset$$

טענה: $(\bar A^c)$ צפופה ב-X אמ"מ A דלילה ב-X.

דוגמא: ב-$\mathbb{R}$ $\mathbb{N}$ היא דלילה.

טענה: A סגורה דלילה אמ"מ $\operatorname{int} A = \emptyset$

הגדרה: קבוצה $B\subset X$ תקרא מקטגוריה ראשונה אם היא איחוד בן-מנייה של קבוצות דלילות.

הגדרה: נקודה במרחב שהיא ~~מבודדת~~ פתוחה במרחב כולו תקרא נקודה מבודדת.

טענה: במרחב שבו אין נקודות מבודדות, אז קבוצות סינגלטון הן דלילות.

טענה: במרחב כנ"ל כל קבוצה בת-מנייה היא מקטגוריה ראשונה.

הגדרה: אם קבוצה אינה מקטגוריה ראשונה אז היא מקטגוריה שנייה.

טענה (משפט בייר): כל מרחב מטרי שלם הוא מקטגוריה שנייה בתוך עצמו.

למה של קנטור: יהי (X,ρ) מ"מ שלם / $B_i=\bar{B}(a_i,r_i)$

כך ש-

$\forall i\in\mathbb{N}\ B_i\supset B_{i+1}$

וגם

$\lim_{i\to\infty} r_i=0$

אזי יש נקודה אחת בדיוק שנמצאת בכל הכדורים.

הוכחה: סדרת המרכזים הינה סדרת קושי ולכן יש לה גבול $a_n\to a$ שהוא הנקודה המבוקשת.

למה: (X,ρ) מ"מ שלם, $A\subset X$ מקטגוריה I אז

$\operatorname{int} A=\emptyset$

הוכחה: $A\subset\bigcup_{1}^{\infty}F_n$ כך ש-$F_n=\bar{F}_n$ וכן $\forall n$ $F_n^\circ=\emptyset$ אמ"מ

A מקטגוריה ראשונה.

תהי $\emptyset\neq D\subset X$ פתוחה. נתבונן ב-$D\cap F_1^c$?

זוהי קבוצה פתוחה לא ריקה כי F_1^c צפופה

ופתוחה לכן קיים $x_1\in D\cap F_1^c$ ו-$0<\epsilon_1<1$

כך ש-$B_1=\bar{B}(x_1,\epsilon_1)\subset D\cap F_1^c$

בפרט $B(x_1,\epsilon_1)\cap F_2^c$ גם כן אינו ריק

וגם כן פתוח ולכן אפשר לבחור B_2 כך ש

$\epsilon_2<\frac{\epsilon_1}{2}$ וכך עד B_n ו- $\{B_n\}$ מתקיים

התנאים של הלמה של קנטור ולכן יש לנו

נקודה משותפת יחידה x והיא והיא אינה

שייכת לאף אחד מה F_k ולכן היא

אינה שייכת לA כלומר $x\in A^c\cap$

כלומר, כל קבוצה פתוחה שנחתכת חותכת

את המשלים של A כלומר אין לA

קבוצות פתוחות כלומר אין לה נקודות

פנימיות

מ.ש.ל

הגדרת משפט בר אם X ממ"ש אז

$$\mathrm{int}\, X = X$$

ולכן הוא אינו מקטגוריה ראשונה

מ.ש.ל

טענה ② אם (X,d) ממ"ש ו $\{D_n\}$ סדרת

קבוצות פתוחות צפופות בX אז

$\bigcap_1 D_n$ צפוף בX

הוכחה נסמן $F_n=D_n^c$ D_n צפוף ולכן

F_n הוא דלילה וסגורה ולכן

$\bigcup F_n$ קבוצה מקטגוריה ראשונה שכן

$\mathrm{int}\bigcup F_n=\emptyset$ ולכן המשלים שלה צפוף כלומר

$$\left(\bigcup_1^{\infty} F_n\right)^c=\left(\bigcap_1^{\infty} F_n^c\right)=\bigcap_1^{\infty} D_n$$ צפוף

מ.ש.ל

טענה: יהי $F=\{f:X\to\mathbb{R}\}$ משפחה (X,ρ) ממ"ש פונקציות רציפות

כך ש $\forall x\in X\ \exists M_x>0\ \forall f\in F\ |f(x)|\le M_x$

אז $\exists \underset{\text{פתוחה}}{D}\subset X\ \exists M\in\mathbb{R}\ \forall x\in D\ \forall f\in F\ |f(x)|\le M$

הוכחה: נקח $m\in\mathbb{N}$ כלשהו ונגדיר

$E_{m,f}=\{x\in X \mid |f(x)|\le m\}$ זו ברור ש $E_{m,f}$ סגורה

נגדיר

$$E_m=\bigcap_{f\in F}E_{m,f}$$

$E_m=\overline{E_m}$ כי E_m חיתוך של סגורות

$X=\bigcup_1^\infty E_m$ לפי הנתון כי X [illegible]

של מה והוא איחוד בן-מנייה של קבוצות

כלומר קיים E_{m_0} כך ש $E^\circ_{m_0}\neq\emptyset$

כלומר קיימת

$D\subset E_{m_0}$ פתוחה

D מקיים את:

$$\forall x\in D\ \forall f\in F\ |f(x)|\le m_0$$

מ.ש.ל.

דוגמא: $f(x)=\sum_1^\infty\frac{1}{2^n}\cos 2^n x$ רציפה בכל הישר

ולא גזירה בכל הישר

הגדרה: $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפות וחסומות.

$$\rho(f,g)=\sup_{\mathbb{R}}|f(x)-g(x)|$$

טענה: $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ שלם

טענה: קבוצת כל הפונקציות ב $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ הגזירות לפחות בנקודה אחת היא מקטגוריה ראשונה

הוכחה: נגדיר:

$$F_n=\{f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R}) \mid \exists|\xi|\le n\ \forall|h|\le n^{-1}\ |f(\xi+h)-f(\xi)|\le |h|\cdot n\}$$

(1) תהי $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ גזירה ב ξ_0

כלומר קיים $\epsilon>0$ כך שלכל $|h|<\epsilon$

$$|f(\xi_0)-f(\xi_0+h)|\le|h|(|f'(\xi_0)|+1)$$

נבחר

$$\mathbb{N}\ni n>\max\{|\xi_0|,\epsilon^{-1},|f'(\xi_0)|+1\}\ \ n\in\mathbb{N}$$

אז $f\in F_n$

כלומר $\bigcup F_n$ מכיל את כל $C(\mathbb{R},\mathbb{R})\ni f$ שגזירות בנקודה אחת לפחות

(2) ניקח $\{f_k\}\in F_n$ כך ש $\rho(f_k,f)\xrightarrow[k\to\infty]{}0$

לפי הגדרת f_k

$$\forall k\ \exists\xi_k\in[-n,n]\ \forall|h|<n^{-1}\ |f_k(\xi_k+h)-f_k(\xi_k)|\le|h|n$$

הסדרה $\{\xi_k\}\subset[-n,n]$ ולכן קיימת לה תת-סדרה

$\{\xi_{k_m}\}$ מתכנסת ל $\{\xi\in[-n,n]\}$

$$\forall|h|\le n^{-1}\quad |f(\xi+h)-f(\xi)|\le|f(\xi+h)-f(\xi_{k_m}+h)|+|f(\xi_{k_m}+h)-f_{k_m}(\xi_{k_m}+h)|+$$
$$+|f_{k_m}(\xi_{k_m}+h)-f_{k_m}(\xi_{k_m})|+|f_{k_m}(\xi_{k_m})-f(\xi_{k_m})|+|f(\xi_{k_m})-f(\xi)|$$
$$\le|f(\xi+h)-f(\xi_{k_m}+h)|+\rho(f_{k_m},f)+n|h|+\rho(f_{k_m},f)+|f(\xi_{k_m})-f(\xi)|$$

נשאיף את $n\to\infty$ ונקבל שגם ימין

$$|\text{ימין}| \to 0+0+|h|n+0+0$$

כלומר

$$|f(\xi+h)-f(\xi)|\le|h|n \quad \forall\, |h|<\frac{1}{n}$$

כלומר $f\in F_n$ כלומר F_n סגורה

(3) ניקח $f\in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $\epsilon>0$ נבנה g פונקציה כך ש

(1) $\forall x\in[-n,n]^c \Rightarrow g(x)=f(x)$

(2)

(3) g לינארית למקוטעין על $[-n,n]$

(4) $\rho(f,g)<\frac{\epsilon}{2}$

קיימת g כזאת כי f רציפה במידה שווה.
g גזירה מימין בכל נקודה ~~...~~ והנגזרת מימין לוקחת מספר סופי של ערכים

נסמן

$$M=\sup_{\xi\in[-n,n]}|g'(\xi+0)|<\infty$$

נבנה פונקציה $k(x)$ לינארית למקוטעין על כל הישר ורציפה כך שהערך המוחלט של השיפוע שלה יהיה $M+n$ בכל הנקודות וכך ש $\max|k(x)|=\frac{\epsilon}{2}$ והן רציפות

$$\rho(f,g+k)<\epsilon$$

וגם $g+k\notin F_n$

כלומר $g+k\in F_n^c$

~~כלומר~~ כלומר F_n^c צפופה במרחב $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ כלומר $\operatorname{int} F_n=\emptyset$

מש״ל

קומפקטיות במרחבים מטריים

הגדרה כיסוי של (X,ρ) הוא $(O_\alpha)_{\alpha\in\Omega}$ כך ש

$$\forall x\in X\ \exists \alpha\in\Omega\ \ x\in O_\alpha$$

הגדרה כיסוי פתוח כיסוי שלכל $\alpha\in\Omega$ O_α פתוחה

הגדרה כיסוי סופי כיסוי כך ש Ω סופית

הגדרה (X,ρ) יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח קיים קבוצה חלקית של Ω כך ש הכיסוי המתקבל יהיה עדיין סופי

הגדרה מ"מ יקרא פרה-קומפקטי אם $\forall \epsilon>0\ \exists$ מספר סופי של כדורים ברדיוס ϵ המכסה את X

טענה מ"מ פרה קומפקטי הוא תמיד חסום בתוך עצמו

משפט יהי (X,ρ) מ"מ אזי שקול:

1. X קומפקטי
2. לכל סדרה אינסופית קיים גבול חלקי
3. X פרה קומפקטי ושלם

הוכחה $1 \Rightarrow 2$: נניח X קומפקטי. $\{x_n\}$ סדרה נתונה

$$A_n=\{x_k \mid k>n\}$$

נסמן $F_n=\overline{A_n}$

נניח $\emptyset=\bigcap_1^\infty F_n$ אז $X=\bigcup_1^\infty F_n^c$ F_n^c

פתוחה ולכן F_n^c כיסוי פתוח ולכן קיים כיסוי סופי חלקי $n_1,n_2\dots n_k$ כך ש

$$X=\bigcup_k F_{n_k}^c$$

וגם:

$$\phi=\bigcap_k F_{n_k}$$

וזה לא יתכן לפי קנטור F_n

לכן קיים x כך ש

$$x\in\bigcap_1^\infty F_n$$

קל לראות ש-x גבול חלקי של $\{x_n\}$

(2)←(3) תהי $\{x_n\}$ סדרת קושי אז יש לה גבול חלקי ולכן יש לה גבול (היא) מתכנסת.

לכן (X,g) שלם

נניח ש-(X,g) לא פרה-קומפקטי אז קיים q_0 כך שכל קבוצה סופית של כדורים ברדיוס q_0 אינה מכסה את X

יהי $x_1\in X$ נגדיר

$$X\neq B(x_1,q_0)$$

לכן $\exists x_2\in X$ נגדיר

$$B(x_2,q_0)$$

וכך נמשיך עד אינסוף. קל לראות של-$\{x_n\}$ אין גבול חלקי בסתירה לנתון ולכן המרחב פרה-קומפקטי

(3)←(1) נניח (X,g) לא קומפקטי אז קיים כיסוי פתוח $\{O_\alpha\}_{\alpha\in A}$ שאין לו תת-כיסוי סופי

המרחב פרה קומפקטי ולכן הוא חסום וקוטרו הוא קטן מ-a בפרט ולכן

$$\forall x_0\in X\quad X=B(x_0,a)$$

המרחב הוא פרה קומפקטי ולכן ניתן לכסות ע״י מספר סופי של כדורים ברדיוס $\frac{1}{4}a$ קל לראות שביניהם קיים לפחות אחד שאינו

כיסוי מבוסס ע"י תת-משפחה סופית $(D_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$

נסמן אותו כ

$$B_1\left(x_1, \frac{a}{2}\right)$$

ניתן לכסות אותו ע"י מספר סופי של כדורים

ברדיוס $\frac{a}{3}$ .....

נגדיר כך את

$$B_n\left(x_n, \frac{a}{n}\right)$$

x_n סדרת קושי, המ"מ שלם ולכן

יש לה גבול x כלומר:

$$\exists \lambda\in\Delta \quad x\in D_\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$\exists \epsilon>0 \quad B(x,\epsilon)\subset D_\lambda$$

אפשר לקחת n כך ש

$$B_n\subset D_\lambda$$

סתירה להגדרת B_n. לכן (X,g) קומפקטי.

ג **טענה**: כל מרחב קומפקטי הוא ספרבילי

~~לכל ... קב' המרחב הקומפקטי~~ לכן

הוא גם כרה קומפקטי. לכן לכל n קיים

כיסוי ע"י מספר סופי של כדורים ברדיוס

$\frac{1}{n}$ נתבונן בקבוצת כל הכדורים הנוצרים

בצורה כזו ע"י כל ה-$n\in\mathbb{N}$ ה

לראות שהיא בסיס לכל הקבוצות הפתוחות

ב-(X,g) ושהיא בת-מנייה לכן (X,g) ספרבילי.

טענה: יהי (X,ρ) קומפקטי ו-$\{x_n\}$ סדרה גבול חלקי
אזי יש לה תת מתכנסת.

טענה: יהי (X,ρ) מ"מ יהי $A\subset X$. A תיקרא
קומפקטית אם היא קומפקטית כתת-מרחב של X

טענה: יהי $A\subset X$ קומפקטית אזי $A=\bar{A}$ כי

הוכחה: A קומפקטית $\Rightarrow$ A שלמה $\Rightarrow$ A סגורה

טענה: אם X קומפקטי ו-$A\subset X$ סגורה אזי
A קומפקטית

הוכחה: X פרה-קומפקטי ולכן A פרה-קומפקטי
X שלם ו-A סגורה לכן היא שלמה

$\Downarrow$

A קומפקטית

הגדרה: יהי (X,ρ) מ"מ $A\subset X$ תיקרא יחסית
קומפקטית אם $\bar{A}$ קומפקטית

טענה: תת קבוצה של יחסית קומפקטית היא יחסית
קומפקטית

תרגיל: יהי (X,ρ) מ"מ ו-A יחסית קומפקטית
אזי A פרה קומפקטי

② אם X שלם ו-$A\subset X$ פרה קומפקטית
אזי A יחסית קומפקטית

טענה: (משפט היינה בורל) תת A של $\mathbb{R}$ במטריקה
הרגילה היא יחסית קומפקטית רק אם
אם היא חסומה

מסקנה: $A\subset\mathbb{R}$ קבוצה היא קומפקטית אמ"ם
היא סגורה וחסומה

טענה: יהי (X,ρ) מ"מ $A\subset X$ ~~קומפקטית~~ יחסית קומפקטית אמ"ם
לכל סדרה אינסופית $\{x_n\}\subset A$ יש לפחות
גבול חלקי אחד ב-X.

משפט: $X=[a,b]$ עם מטריקת הסופרימום זהו
מ"מ שלם ולכן כל קבוצה סגורה-קומפקטית
היא יחסית קומפקטית (מושג) חשוב:
תהי $F\subset C(a,b)$ המקיימת: (ארצלו)

(1) $\exists M>0\ \forall f\in F\ \forall x\in[a,b]\ |f(x)|\le M$

(2) $\forall\epsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in[a,b]\ |x-y|<\delta\Rightarrow$

$\Rightarrow \forall f\in F\ |f(x)-f(y)|<\epsilon$

אז F היא יחסית קומפקטית

הוכחה: ניקח סדרה $\{r_i\}$ של כל הרציונליים
בקטע $[a,b]$ תהי $\{f_n\}\in F$
נתבונן בסדרה

$\{f_n(r_1)\}_{n=0}^{\infty}$

זוהי סדרה חסומה ולכן יש לה תת-סדרה
מתכנסת $\{f_{1n}\}$

כנ"ל עבור $\{f_{1n}(r_2)\}$

נמצא את $\{f_{2n}\}$

נמשיך באינדוקציה ל $\{f_{kn}\}$

(*) $\{f_{kn}\}$ מתכנסת לכל r_m אם $k\ge m$
ניקח סדרה של סדרות ~~האלכסון~~

$\{f_{kn}\}_k$

המקיימות:

$k>h \Rightarrow \{f_{kn}\}_n \subset \{f_{hn}\}_n$

א

ובן
נתבונן בסדרה

$\{f_{nn}\}_n$

לכל i $\{f_{in}\}_n$ $|\{f_{nn}\}_n \setminus \{f_{in}\}_n|$ סופי

ולכן $\{f_{nn}\}_n$ מתכנסת בכל נקודה רציונלית

יהי $\epsilon>0$ קיים δ שמקיים את תכונה 2
נגדיר סופית תכונה נמצא חלוקה
$x_0, x_1 \ldots x_q$ כך ש $\delta > |x_{p+1}-x_p|$ לכל
בזכות הרציונליים ניתן להניח ש

$\forall\ 0<i<q \quad x_i \in \{r_n\}_n$

~~נתבונן~~ f_{nn} הגדרה:

$\forall x\in[a,b]\ \exists p \quad x_{p-1} \le x \le x_p$

כנ"ל

$|f_{nn}(x)-f_{mm}(x)| \le |f_{nn}(x)-f_{nn}(x_p)| + |f_{nn}(x_p)-f_{mm}(x_p)| +$

$+|f_{mm}(x_p)-f_{mm}(x)| \le 2\epsilon + |f_{nn}(x_p)-f_{mm}(x_p)| \xrightarrow[n,m\to\infty]{} 0$

$\Downarrow$

$\forall x\ \forall\epsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}\ \ n,m>k \Rightarrow |f_{nn}(x)-f_{mm}(x)|<\epsilon \ \ \forall x$

לכל x ולכן אפשר לגדור בסופר-מגוון
נקודתי ש $\{f_{nn}\}$ סדרת קושי לכל x
x שלו ולכן יש לה $\{f_{nn}\}_n$ גבול ולכן
היא תת-סדרה קומפקטית F

טענה: $f\in C[a,b]$ רגיל תכונות קומפקטיות אז מתקיימים (1) ו-(2) של הטענה הקודמת

הוכחה (1)

טענה: תהי $f:X\to Y$ רציפה ו-X קומפקטי $\Leftarrow$ f רציפה במ"ש

הוכחה: נניח f אינה רציפה במ"ש אז:

(1) $\exists\epsilon>0\ \forall n\ \exists x_n,y_n\quad \rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}\quad \sigma(f(x_n),f(y_n))>\epsilon$

X קומפקטי ולכן ל-$\{x_n\}$ יש תת"ס $\{x_{n_k}\}$

כך ש $x_{n_k}\to a$ ולכן $y_{n_k}\to a$

בפרט f רציפה ולכן לפי על (1)

$$\exists\delta>0\ \forall a\quad \rho(x,a)<\delta\Rightarrow\sigma(f(x),f(a))<\frac{\epsilon_0}{2}$$

בפרט

$$\exists k\ \forall n_k>k \left|\begin{array}{l}\rho(x_{n_k},a)<\delta\Rightarrow\sigma(f(x_{n_k}),f(a))<\frac{\epsilon}{2}\\ \rho(y_{n_k},a)<\delta\Rightarrow\sigma(f(y_{n_k}),f(a))<\frac{\epsilon}{2}\end{array}\right.$$

$\Downarrow$

אי שוויון המשולש יוביל לסתירה.

טענה: תהי $f:X\to Y$ רציפה ויהי $A\subset X$ קומפקטי (להוסיף לדף)

אז $f(A)\subset Y$ קומפקטי.

הוכחה: יהי $\{V_\lambda\}_{\lambda\in L}$ כיסוי פתוח ל-$f(A)$ אז

$\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in L}$ כיסוי **פתוח** של A לכן יש

תת-כיסוי סופי $\{f^{-1}(V_\lambda)\}_{\lambda\in P\subset L}$ ולכן $\{V_\lambda\}_{\lambda\in P}$

(ii) כיסוי פתוח סופי תלוי ב $\{U_\lambda\}_{\lambda\in L}$
של $f(A)$

<u>טענה</u> $f:X\to\mathbb{R}$ X קומפקטי ו-f רציפה אזי f חסומה וחסמיה מתקבלים

<u>טענה</u> תהי $f:X\to Y$ חח"ע ועל ורציפה, X קומפקטי אז f^{-1} היא רציפה גם כן

<u>הוכחה:</u> תהי $A\subset X$ סגורה אז A קומפקטית אזי $f(A)$ סגורה כלומר f מעבירה סגורות לסגורות ולכן f^{-1} רציפה.

<u>הגדרה</u> תהי X קבוצה, $\tau\subset P(X)$ המקיימת

① τ סגורה תחת איחודים לא סופיים

② τ סגורה תחת חיתוכים סופיים

③ $X,\emptyset\in\tau$

(X,τ) יקרא מרחב טופולוגי, $A\in\tau$ תקרא פתוחה ב-X

<u>הגדרה</u> יהיו $(X,\tau_1),(X,\tau_2)$ אם $\tau_1\subset\tau_2$ אז τ_1 תקרא יותר חלשה, יותר עדינה

<u>טענה</u>
$\forall$ קבוצה X $P(X)$ הטופולוגיה העדינה ביותר

דוגמאות

<u>הגדרה</u> $P(X)$ תקרא הטופולוגיה הדיסקרטית

<u>הגדרה</u> $\tau=\{X,\emptyset\}$ מגדיר טופולוגיה הכי הגסה

<u>הגדרה</u> $\tau=\{\emptyset,X\}$ תקרא הטופולוגיה הטריוויאלית

<u>דוגמה</u> יהי (X,d) נסמן τ_d את אוסף כל הפתוחות ב-X זוהי טופולוגיה

<u>הגדרה</u> τ_d תקרא הטופולוגיה המושרית ע"י d

<u>הגדרה</u> אם (X,τ) נאמר שהוא מטריזבילי אם קיימת d מטריקה על X כך ש $\tau_d = \tau$

<u>הגדרה</u> $(\mathbb{R},|x-y|)$ על $\mathbb{R}$ $\tau_{|x-y|}$ תקרא המטריקה הרגילה

<u>טענה</u> ~~$A \subseteq \mathbb{R}^2$~~ יהי $X=\mathbb{R}^2$ נגדיר $A\in\tau$ אמ"מ לכל $a\in A$

$\cancel{\tau = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid \forall a\in A}$

ולכל כיוון קיים קטע פתוח המכיל את a

טופולוגיה תרגיל 3

1) תהי $f: R \to R$. הגרף של f - G_f מוגדר ע"י

$$G_f = \{(x,y) \in R^2 : f(x)=y\}$$

הראה שאם f רציפה, G_f סגורה ב-R^2

2) X ו-Y מרחבים מטריים; $X_1, X_2 \subset X$ ו-$X_1 \cup X_2 = X$

יהיו נתונות $f_i: X_i \to Y$, $i=1,2$ רציפות - כך שלכל x ב-$X_1 \cap X_2$ $f_1(x)=f_2(x)$

הראה שאם X_1 ו-X_2 שניהן סגורות (או שניהן פתוחות) אזי

הפונקציה $f: X \to Y$ המוגדרת ע"י: $f(x)=f_i(x);\ x \in X_i$

הינה רציפה

3) על $X=C[0,1]$ מגדירים

$$\rho(f,g) = \int_0^1 |f(t)-g(t)|\,dt.$$

ρ מטריקה. האם (X,ρ) שלם?

4) יהיו $(\rho_i)_{i=1,2,3}$ המטריקות הבאות על R

$$\rho_1(x,y) = \left|\frac{x}{1+|x|} - \frac{y}{1+|y|}\right| ; \quad \rho_2(x,y) = \frac{|x-y|}{\sqrt{(x^2+1)(y^2+1)}} \qquad \rho_3 = |x^3-y^3|$$

האם הם שקולות טופולוגית למטריקה הרגילה?

5) הראה ש (R,ρ_3) שלם אבל (R,ρ_1) ו (R,ρ_3)

דניאל דבינין

תרגיל בטופולוגיה

① יש שתי אפשרויות סימטריות, נוכיח רק את אחת מהן: נניח ש $\rho(x,A)\geq\rho(y,A)$ וצ"ל:

$$\rho(x,A)-\rho(y,A)\leq\rho(x,y)$$

<u>הוכחה</u>: לפי אי שוויון המשולש ידוע כי

$$\rho(x,a)\leq\rho(x,y)+\rho(y,a) \quad \forall a\in A$$

ולכן

$$\rho(x,a)-\rho(y,a)\leq\rho(x,y)$$

כלומר: נניח בשלילה ש:

$$\rho(x,A)-\rho(y,A)>\rho(x,y)$$

ונקבל ש: לכל a ב A

$$\rho(x,A)-\rho(y,A)>\rho(x,a)-\rho(y,a)$$

כמו כן ידוע ש $\rho(x,a)\geq\rho(x,A)$

נניח ש $\rho(x,a)>\rho(x,A)$ לא הכרחי

אזי נקבל $\rho(y,a)<\rho(y,A)$ סתירה למה?

להגדרת $\rho(y,A)$

כלומר $\rho(x,a)=\rho(x,A)$ ואז גם $\rho(y,A)=\rho(y,a)$

ולכן

$$\rho(x,A)-\rho(y,A)=\rho(x,a)-\rho(y,a)$$

בניגוד להנחה. לכן

$$\rho(x,A)-\rho(y,A)\leq\rho(x,y)$$

② יהי $x\in A\cap\overline{B}$ מכיוון ש $x\in\overline{B}$, $x\in A$ ומכיוון ש A פתוחה

קיים $\epsilon>0$ כך ש $B(x,\epsilon)\subset A$ (מפתיחות)

ש A היא קבוצה פתוחה. לכל $\delta>0$ מתקיים

$$B(x,\min\{\delta,\epsilon\})\subset B(x,\epsilon)\subset A$$

וגם $\emptyset\neq B(x,\min\{\delta,\epsilon\})\cap B$ למה?!

נבחר נקודה כלשהי y שמקיימת

$$y\in B(x,\min\{\delta,\epsilon\})\cap B$$

ברור ש: $y\in B$

$y\in B(x,\min\{\delta,\epsilon\})$

ומכאן $y\in A$

ומכאן $y\in A\cap B$

$y\in B(x,\delta)$ כי $B(x,\delta)\subset B(x,\min\{\epsilon,\delta\})$

ולכן $x\in\overline{A\cap B}$ לא מנומק

מכאן ש $A\cap\overline{B}\subseteq\overline{A\cap B}$

מ.ש.ל

(3) נבחר $A=\emptyset, B=\mathbb{R}$ פתוחות וגם

ביקשו A ו-B כך שכל הקבוצות הנ"ל שונות זו מזו.

$$\emptyset=\overline{A}\cap\overline{B}=\overline{A}\cap B=A\cap\overline{B}=\overline{A\cap B}$$

(4) צ"ל $\overline{D\cup ext D}=X$ ומספיק להראות $\overline{D\cup ext D}=X$

ברור: $\overline{D}\cup ext D\subseteq\overline{D\cup ext D}$

כעת לכל $x\in X$ שמקיים $x\notin\overline{D}$ קיים $\epsilon>0$ כך ש

$$\emptyset=B(x,\epsilon)\cap D$$

כלומר $B(x,\epsilon)\subset D^c$

ולכן $x\in(D^c)^\circ=ext D\subset\overline{ext D}$

כלומר מתקיים לכל $x\in X$

$$x\in\overline{D}\cup ext D\subset\overline{D\cup ext D}$$

ולכן $X\subset\overline{D\cup ext D}$ מ.ש.ל.

5) אם (X,τ) ספרבילי. אנו יכולים לבחור $D\subset X$
כך ש D צפופה ב X והיא קת-מניה. (לכל היותר)
כעת לפי משפט שמצאנו לכל $\lambda\in I$

$$D\cap U_\lambda\neq\phi$$

נבחר Y_λ כלשהו השייך ל $D\cap U_\lambda$.

כעת:

$$\forall \lambda,\alpha\in I \quad \lambda\neq\alpha\Rightarrow \phi=U_\lambda\cap U_\alpha\Rightarrow\phi=[U_\lambda\cap D]\cap[U_\alpha\cap D]\Rightarrow Y_\alpha\neq Y_\lambda$$

נגדיר $F:I\to D$ כך:

$$F(\lambda)=Y_\lambda$$

קל לראות ש F חח"ע ולכן העוצמה של I קטנה או שווה לעוצמה של D שהינו לכל היותר קת-מניה. ולכן העוצמה של I היא לכל היותר קת-מניה.
מ.ש.ל.

טופולוגיה תרגיל IV

1) הראה ש-X הוא פרה-קומפקטי אם ורק אם לכל $\varepsilon>0$ יש $F\subset X$ סופית כך ש-$\rho(x,F)<\varepsilon$ לכל $x\in X$.

2) הראה: אם X שלם ! $A\subset X$ פרה-קומפקטי אזי A יחסית-קומפקטית.

3) יהי X קומפקטי (מטרי) $(U_\lambda)_{\lambda\in L}$ כיסוי פתוח של X. הראה שקיים $\alpha>0$ כך שכל כדור פתוח בעל רדיוס α מוכל לפחות באחת מה-U_λ.

4) יהי $X=\mathbb{Q}\cap[1,2]$ במטריקה המושרית מ-R

תהי $f:X\to X$ ע"י $f(x)=x-\frac{1}{4}(x^2-2)$

הראה ש-f העתקת כווץ אך אין לה נקודת שבת.

5) תהי $f:R\to R$ נתונה $f(x)=\frac{\pi}{2}+x-\arctan x$ $\left(-\frac{\pi}{2}<\arctan x<\frac{\pi}{2}\right)$

הראה שלכל $x\neq y$ $|f(x)-f(y)|<|x-y|$ אך ל-f אין נקודת שבת.

הגדרה קבוצה נקראת סגורה במ״ט אם״ם המשלים שלה פתוח

הגדרה F קבוצת כל הסגורות במ״ט (X,τ)

טענה F סגורה תחת

① איחודים סופיים

② חיתוכים אינסופיים

③ $X,\emptyset\in F$

טענה אם יש F כנ״ל אז היא מגדירה טופולוגיה

הגדרה יהי (X,τ) מ״ט, $A\subset X$ נגדיר

$$\bar{A}=\cap\{K\mid (K\in F)\wedge(K\supset A)\}$$

טענה יהי (X,τ), $A\subset X$, $\bar{A}$ סגורה ומכילה את A

טענה $\bar{A}$ הסגורה הקטנה ביותר המכילה את A

טענה $A\subset B\Rightarrow\bar{A}\subset\bar{B}$

הוכחה

$B\subset\bar{B}$

ולכן $A\subset\bar{B}$

ולכן ממינימליות A $\bar{A}\subset\bar{B}$

טענה תהי $F:P(X)\to P(X)$ המוגדרת $A\mapsto\bar{A}$

① $A\subset\bar{A}$ $\forall A$

② $\bar{\bar{A}}=\bar{A}$

③ $\overline{A\cup B}=\bar{A}\cup\bar{B}$

④ $\bar{\emptyset}=\emptyset$

⑤ A סגורה אם״ם $A=\bar{A}$

⑥ אם נתונה קבוצה X כלשהי ופונקציה המקיימת את 1-4 אז נגדיר קבוצות סגורות לפי 5 ונקבל טופולוגיה על X שבה הסגור של A הוא $\bar{A}$

הוכחה ③ $A\subset A\cup B\Rightarrow\bar{A}\subset\overline{A\cup B}$, $\bar{B}\subset\overline{A\cup B}\Rightarrow\bar{A}\cup\bar{B}\subset\overline{A\cup B}$

$\cancel{A\subset B}$ $A\cup B\subset\bar{A}\cup\bar{B}\Rightarrow\overline{A\cup B}\subset\bar{A}\cup\bar{B}$

⑥ נסמן: $F=\{A\subset X \mid A=\bar{A}\}$

אם יהי $A\subset B$

אז $B=A\cup(B-A)$

$$\Downarrow$$

$$\bar{B}=\bar{A}\cup\overline{(B-A)}$$

$$\Downarrow$$

$$\bar{A}\subset\bar{B}$$

יהי $(F_\lambda)_{\lambda\in\Delta}$ משפחה ב-F סגורות

נתונים λ

$$\bigcap_\lambda F_\lambda\subset F_\mu \quad \forall\mu\in\Delta$$

$$\Downarrow$$

$$\forall\mu\in\Delta \quad \overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}\subset\bar{F}_\mu=F_\mu$$

$$\Downarrow$$

$$\overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}\subset\bigcap_\lambda F_\lambda$$

ולכן ① $\bigcap_\lambda F_\lambda=\cancel{\bigcap_\lambda F_\lambda}\subset\overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}$

מכאן $\overline{\bigcap_\lambda F_\lambda}=\bigcap_\lambda F_\lambda$

כלומר F סגורה תחת חיתוכים כלשהם

כעת נניח $F_1,F_2\in F$ אז $\bar{F}_1=F_1,\ \bar{F}_2=F_2$

ולכן ② $\overline{F_1\cup F_2}=\bar{F}_1\cup\bar{F}_2=F_1\cup F_2\in F$

מכאן באינדוקציה F סגורה תחת איחודים סופיים

כמו כן ברור ש-$\emptyset$, $X\in F$ ולכן F מגדירה טופולוגיה

אנו רוצים להוכיח שהסגור של כל $A\subset X$ הוא $\bar{A}$

יהי $A\subset X$ $\quad \bar{\bar{A}}=\bar{A}$

מכיוון $\bar{A}\in F$ אז לכל $B\in F$

$$A\subset B \Rightarrow \bar{A}\subset B$$

יהי $B\in F$ כך ש $A\subset B$

מכיוון

$$\bar{A}\subset\bar{B}=B$$

מש"ל

<u>דוגמא</u>: יהי X א-טופולוגי נגדיר

$F:P(X)\to P(X)$ כך

$$F(A)=\begin{cases}\bar{A}=A & A \text{ סגורה} \\ \bar{A}=X & A \text{ לא סגורה}\end{cases}$$

קל לראות ש F מגדירה טופולוגיה

<u>הגדרה</u>: יהי (X,τ) מ"ט, $A\subset X$

$$\operatorname{int} A=A^\circ=\bigcup\{O \mid (O\in\tau)\wedge(O\subset A)\}$$

כלומר, הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-A

<u>טענה</u>: אם $A\subset X$ אז:

1. $X-A^\circ=\overline{(X-A)}$
2. $X-\bar{A}=(X-A)^\circ$

<u>טענה</u>: $A\subset B \Rightarrow A^\circ\subset B^\circ$

<u>טענה</u>: לפונקציה $A\to A^\circ$ התכונות:

1. $A^\circ\subset A$
2. $(A^\circ)^\circ=A^\circ$
3. $(A\cap B)^\circ=A^\circ\cap B^\circ$
4. $X^\circ=X$
5. $O\subset X$ פתוחה אמ"מ $O^\circ=O$
6. אם כל פונקציה שמקיימת את 1-5 אז מגדירה טופולוגיה אחת

לכן הפנים של $A\subset X$ הוא A°

הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט, $x\in X$, $U\subset X$ תקרא סביבה של x אם היא מכילה ק.פ $V\in\tau$ כך ש-

$$x\in V\subset U$$

הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט, $x\in X$, $\mathcal{U}_x$ מערכת הסביבות של הנקודה x היא קבוצת כל הסביבות של x.

טענה: $\forall x\ \mathcal{U}_x\neq\emptyset$

תכונות:

1. $\forall V\in\mathcal{U}_x\ x\in V$
2. $U,V\in\mathcal{U}_x \Rightarrow U\cap V\in\mathcal{U}_x$
3. $\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists V\in\mathcal{U}_x\ \forall y\in V\ U\in\mathcal{U}_y$
4. $U\in\mathcal{U}_x,\ U\subset V \Rightarrow V\in\mathcal{U}_x$
5. $D\subset X$ היא פתוחה אמ"מ

$$\forall x\in D\ \exists V\in\mathcal{U}_x\ V\subset D$$

6. אם נתונה קבוצה X ולכל $x\in X$ מוצמדת משפחה $\mathcal{U}_x$ של קבוצות חלקיות של X כך שמתקיימות 1-4 אז אם נגדיר קבוצה פתוחה בX לפי 5 אז מתקבלת טופולוגיה על X שבה לכל $x\in X$ $\mathcal{U}_x$ היא מערכת הסביבות של x.

הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט, $x\in X$, $\mathcal{B}_x\subset\mathcal{U}_x$ תקרא בסיס למערכת הסביבות של x אם

$$\forall U\in\mathcal{U}_x\ \exists V\in\mathcal{B}_x\ V\subset U$$

הגדרה: על (X,τ) נאמר שהוא מקיים את אקסיומת המניה הראשונה אם לכל $x\in X$ קיים בסיס לכל היותר בן מניה למערכת הסביבות של x.

טענה יהי (X,τ) מ"ט, לכל $x\in X$ קס"ס B_x למערכת הסביבות A', מתקיים:

1. $\forall V\in B_x \quad x\in V$
2. $\forall V_1,V_2\in B_x \quad \exists V_3\in B_x \quad V_3\subset V_1\cap V_2$
3. $\forall x\in X \ \forall V\in B_x \ \exists V_0\in B_x \ \forall y\in V_0 \ \exists W\in B_y \ W\subset V$
4. $D\subset X$ פתוחה אמ"מ

$$\forall x\in D \ \exists V\in B_x \ V\subset D$$

5. אם עבור קבוצה X לכל נקודה נתונה משפחה B_x המקיימת 1-3 ונגדיר D פתוחה אם 4 אז תיווצר טופולוגיה שבה לכל x B_x הוא מערכת סביבות קס"ס.

דוגמאות

1. $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הרגילה נגדיר

$$B_x=\{(x-r,x+r) \mid r\in\mathbb{Q}\cap(0,\infty)\}$$

זוהי משפחה בת מניה של סביבות המהווה קס"ס

2. לכל נקודה x ב-$\mathbb{R}$ נגדיר

$$B_x=\{[x,z) \mid z>x\}$$

ניתן לראות ש-B_x מגדיר טופולוגיה הנקראת Sorgenfrey Topology

טענה: יהי (X,τ) מ"ט, המערכת של B_x - קס"ס אז:

1. $D\subset X$ פתוחה אמ"מ $\forall x\in D \ \exists V\in B_x \ V\subset D$
2. $F\subset X$ סגורה אמ"מ $\forall x\notin F \ \exists V\in B_x \ V\cap F=\emptyset$
3. יהי $A\subset X$

$$\bar{A}=\{x\in X \mid \forall V\in B_x \ V\cap A\neq\emptyset\}$$

4. יהי $A\subset X$

$$A^\circ=\{x\in X \mid \exists V\in B_x \ V\subset A\}$$

$F_r(A)=\{x\in X \mid \forall V\in B_x\ (V\cap A\neq\emptyset)\wedge(V\cap A^c)\neq\emptyset)\}$ (5) 58

הערה:

הגדרה יהי $A\subset X$

$F_r(A)=\bar{A}\cap\overline{(X-A)}$

דוגמא

$X=\{(x,y)\mid y\geq 0,(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

$B_{(x,y)}=$ { הכדורים הפתוחים המוכלים (x,y) לחצי המישור העליון $y>0$; הכדורים בחצי: הכדורים המשיקים לציר x ב-x $y=0$ }

זהו המישור של Moore

הגדרה: יהי $A\subset X$ $q\in A$ תקרא נקודת סגור של A אם כל סביבה של q חותכת את A

משפט הסגור של קבוצה שווה לקבוצת כל נקודות הסגור שלה.

הגדרה $q\in A\subset X$ תקרא נקודה פנימית של A אם יש סביבה של q המוכלת ב-A

משפט הפנים של קבוצה הוא אוסף כל נקודות הפנים שלה.

הגדרה $x\in A\subset X$ אם כל סביבה של x מכילה לפחות נקודה אחת של A שאינה x אז x תקרא נקודת הצטברות של A

הגדרה $A\subset X$ A' הנגזרת של A ~~תקרא~~ היא הקבוצה של כל נקודות ההצטברות של A

משפט $\forall A\subset X\quad A'\cup A=\bar{A}$

הגדרה יהי (X,τ) מ"ט ~~...~~ $\beta\subset\tau$ משפחה תקרא בסיס לטופולוגיה אם $\tau=\{\underset{B\in C}{\bigcup}B \mid B\subset\beta\}$

טענה: β היא בסיס ל-(X,τ) אמ"מ

$$\forall D\in\tau\ \forall p\in D\ \exists B\in\beta\quad p\in B\subset D$$

טענה: β בסיס ל-X אמ"מ

① $X=\bigcup_{B\in\beta} B$

② $\forall B_1,B_2\in\beta,\ \forall p\in B_1\cap B_2\ \exists B_3\in\beta$ כך ש- $p\in B_3\subset\beta$

הוכחה: נניח X קבוצה ונתונה β שמקיימת ①, ②. אזי נתבונן בקבוצת כל האיחודים של תת' של β זוהי טופולוגיה. נקרא לה τ הוכחה:

① τ סגורה תחת איחודים כלשהם

② τ סגורה תחת חיתוכים סופיים

③ $X\in\tau$, $\phi\in\tau$ מגדרת של האיחוד הריק

הגדרה: בסיס פתוח למערכת הסביבות של נקודה הוא בסיס שכל הסביבות שלו פתוחות.

טענה: יהי (X,τ) מ"ט, $\beta\subset\tau$, β בסיס ל-τ אמ"מ

$$\forall x\in X \quad B_x=\{B\in\beta \mid x\in B\}$$ הוא בסיס פתוח למערכות הסביבות של x

הגדרה: יהי (X,τ) מ"ט, $C\subset\tau$ נקרא תת-בסיס לטופולוגיה אם אוסף כל החיתוכים הסופיים של איברי C מהווה בסיס לטופולוגיה.

תרגיל: יהי X קבוצה ויש משפחה כלשהי של תת' של X אזי קיימת τ שעבורה C היא ת"ב.

הגדרה מרחב טופולוגי המקיים את אקסיומת המניה הראשונה יקרא מרחב A_1

הגדרה: מרחב יקרא A_2 אם יש לו בסיס לכל היותר בן מניה לטופולוגיה שלו. (אקסיומת המניה השניה)

טענה אם (X,τ) הוא A_2 אז הוא A_1

הגדרה יהי מ"ט (X,τ) ~~יקרא~~ $A\subset X$ תקרא צפופה אם $\overline{A}=X$

הגדרה מ"ט (X,τ) יקרא ספרבילי אם יש בו קבוצה לכל היותר בת-מניה הצפופה בו

טענה $A_2 \Rightarrow$ ספרבילי.

תרגיל הוכח שהמישור עם מטריקת מסילה (המישור הרדיאלי) הוא ספרבילי?

ע"ב

1. תהי $\mathbb{R}$ לכל $0\neq x$ לוקחים את הסביבות הבסיסיות להיות כל הרווחים הסימטריים המכילים אותו. עבור 0 לוקחים את

$$B_0=\{(-\epsilon,\epsilon)\}\cup\{(+n,\infty)\}\cup\{(-\infty,-n)\}$$

הראה שזה מגדיר טופולוגיה ותאר את הסגור של קבוצה בטופולוגיה זו.

2. $I=[0,1]$ תהי $f\in\mathbb{R}^I$, $F\subset I$ סופית, $\delta>0$ נגדיר

$$U(f;F,\delta)=\{g\in\mathbb{R}^I \mid \forall x\in F\ |g(x)-f(x)|<\delta\}$$

הוכח ש $U(f;F,\delta)$ יכולה לשמש כבסיס למערכת הסביבות של f, ושׁ

$$\forall f\in\mathbb{R}^I \quad \overline{\{f\}}=\{f\}$$

(1)

$\forall f\in \mathbb{R}^I, \forall \epsilon>0 \quad V(f,\epsilon)=\{g\in\mathbb{R}^I \mid |g(x)-f(x)|<\epsilon \ \forall x\in I\}$

השאלה ה בפנים

(2) מצא לגבי (ד) נתבונן רק בפונקציות הרציפות
תת-קבוצה טופולוגית, מה היחס בינה לבין $C[0,1]$

(3) הראה שהישר של זורגנפריי הוא α_1 וספרבילי

<u>הגדרה</u> יהי (X,τ) מ"ט, $A\subset X$

$(A,\tau'=\{U\cap A \mid U\in\tau\})$ יקרא תת-מרחב
של (X,τ)

<u>הערה</u> תת-מרחב של X הוא מרחב טופולוגי.

<u>הערה</u> A ת"מ של B שהוא ת"מ של X אזי A ת"מ של X

<u>הערה</u> יהי (X,τ) מ"ט, $A\subset X$ אזי ת"מ של X

(1) $D\subset A$ היא פתוחה אמ"מ $D=G\cap A$ כך ש-G
פתוחה ב-X

(2) $F\subset A$ היא סגורה ב-A אמ"מ $F=W\cap A$ כך ש-W
סגורה ב-X

(3) $\overline{B}^A=\overline{B}\cap A$

(4) יהי $x\in A$, V סביבה של x ב-A אמ"מ
$V=W\cap A$ כך ש-W סביבה של x
ב-X

(5) $x\in A$, B_x בסיס ב-X אזי

$B'_x=\{B\cap A \mid B\in B_x\}$

הוא בסיס ב-A

⑥ אם β בסיס לטופולוגיה (X,τ) אז

$$\beta' = \{B\cap A \mid B\in\beta\}$$

הוא בסיס לטופולוגיה של A

הגדרה יהיו $(X,\tau),(Y,\sigma)$ מ"ט ותהי $F:X\to Y$
F נקראת רציפה אם

~~$\forall V\in\sigma\ \exists V\in\tau\ F(V)\subset U$~~

לכל סביבה U של $F(x)$ יש סביבה של X כך שהתמונה שלה מוכלת בסביבה של $F(x)$

משפט הטענות הבאות שקולות

① F רציפה ב X

② לכל $D\subset Y$ פתוחה $F^{-1}(D)$ פתוחה ב X

③ לכל $D\subset Y$ סגורה " " סגורה "

④ לכל $A\subset X$ $F(\bar{A})\subset\overline{F(A)}$

הוכחה $1\Leftarrow 2$: לפי הגדרה

$2\Leftarrow 3$: תהי $F\subset Y$ סגורה אז $Y\setminus F$ פתוחה ולפי ② $F^{-1}(Y\setminus F)$ פתוחה

וגם $F^{-1}(Y\setminus F)=F^{-1}(Y)-F^{-1}(F)=$
$=X-F^{-1}(F)$

ולכן $F^{-1}(F)$ סגורה

$3\Leftarrow 4$: תהי $K\subset Y$ סגורה כך ש $F(A)\subset K$ מכאן
$A\subset F^{-1}(F(A))\subset F^{-1}(K)$ ו $F^{-1}(K)$ סגורה

ולכן $\bar{A}\subset F^{-1}(K)$

מכאן $F(\bar{A})\subset K$

ומכאן $F(\bar{A})\subset\overline{F(A)}$

דרור דרנטן

תרגיל טופולוגיה

(1) מערכת הקבוצות הנתונה לכל $x\in\mathbb{R}$ מהווה מערכת של סביבות בסיסיות מאחר שהיא מקיימת את התנאים הבאים:

(א) קל לראות:

$$\forall x\in\mathbb{R}\ \forall V\in B_x\quad x\in V$$

(ב) החיתוך של כל שתי סביבות בסיסיות של הנקודה x מכיל סביבה בסיסית של ה

<u>הוכחה</u>

(1) אם $x\neq 0$ אז זה טריויאלי.

(2) אם $x=0$ אז ניקח שתי סביבות בסיסיות כלשהן:

$$V_1=(-\infty,-n_1)\cup(-\epsilon_1,\epsilon_1)\cup(n_1,\infty)$$

$$V_2=(-\infty,-n_2)\cup(-\epsilon_2,\epsilon_2)\cup(n_2,\infty)$$

קל לראות ש

$$V_1\cap V_2=(-\infty,-\max\{n_1,n_2\})\cup(-\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\},\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\})\cup(\max\{n_1,n_2\},\infty)$$

כלומר $V_1\cap V_2$ הוא בעצמו סביבה בסיסית.

(ג) לכל סביבה בסיסית V של הנקודה x קיימת סביבה בסיסית V_0 ~~בסיסית~~ כך שלכל נקודה y ב-V_0 קיימת סביבה בסיסית של y המוכלת ב-V <u>הוכחה</u>:

(1) אם $x\neq 0$ אז לכל $\epsilon>0$ נבחר

$$\delta<\min\{\epsilon,|x|\}$$

ואז קל לראות שלכל $y\in(x-\delta,x+\delta)$ קיימת סביבה בסיסית המוכלת ב-$(x-\epsilon,x+\epsilon)$

② אם $x=0$ אז לכל n,ϵ נבחר

$$V_0=\cancel{\{-\infty,-n-1\}\cup\{-\tfrac{\epsilon}{2},\tfrac{\epsilon}{2}\}\cup\{}$$

בשני המקרים אפשר לקחת גם $V_0=V$

$$V_0=(-\infty,-n-1)\cup(-\tfrac{\epsilon}{2},\tfrac{\epsilon}{2})\cup(n+1,\infty)$$

היא פתוחה כי לכל $0\neq y\in V_0$ V_0 מכיל

סביבה בסיסית של y

אם $y=0$ אז V_0 מכיל את הסביבה

$$(-\infty,-n-2)\cup(-\tfrac{\epsilon}{4},\tfrac{\epsilon}{4})\cup(n+2,\infty)$$

של 0.

הסגור של קבוצה A:

$\bar{A}=\{x\mid$ x שייך ל A או

x שייך לסגור של A בטופולוגיה

הרגילה או

$x=0$ כאשר A אינה חסומה $\}$

② ⑩ $\{U(f,F,\delta)\}$ יכולה לשמש כבסיס למערכת הסביבות של f כי הן מקיימות את התנאים הבאים:

① $\forall f,\ \forall F,\ \forall \delta>0 \quad f\in U(f,F,\delta)$

② החיתוך של כל שתי סביבות בסיסיות של f מכיל סביבה בסיסית כלשהיא של f

הוכחה: יהיו

$$V_1=U(f,F_1,\delta_1)$$

$$V_2=U(f,F_2,\delta_2)$$

קל לראות שהסביבה

$$V=U(f,F_1\cup F_2,\min\{\delta_1,\delta_2\})$$

היא סביבה בסיסית של f, ומוכלת ב- $V_1\cap V_2$

③ לכל סביבה בסיסית V של הנקודה f קיימת סביבה בסיסית V_0 של f כך שלכל $g\in V_0$ קיימת סביבה בסיסית של g המוכלת ב-V. <u>הוכחה:</u>

תהי f, וסביבה בסיסית שלה

$$V=U(f,F,\delta)$$

נגדיר

$$V_0=U(f,F,\delta/2)$$

לכל $g\in V_0$ נבחר את

$$U=U(g,F,\delta/2)$$

קל לראות ש-U סביבה של g ושהיא מוכלת

ד. V מש.ל.

נתבונן בנקודה g בסגור המוכלת ב $\overline{\{f\}}$

מהגדרת הסגור g היא נקודת סגור של $\{f\}$

כלומר כל סביבה בסיסית של g חותכת

את $\{f\}$, כלומר מכילה את f. נניח

כי קיים $x\in[0,1]$ שעבורו $f(x)\neq g(x)$ קל לראות ש:

$$U(g,\{x\},|f(x)-g(x)|)$$

היא סביבה בסיסית של g שאינה מכילה

את f. סתירה. לכל $x\in[0,1]$ $g(x)=f(x)$,

כלומר $g=f$, כלומר

$$\overline{\{f\}}=\{f\}$$

ה) מתקיימים 3 התנאים:

(1)

$$\forall f,\ \forall \epsilon>0\quad f\in V(f,\epsilon)$$

(2) החיתוך של כל שתי סביבות בסיסיות של הנקודה f מכיל סביבה בסיסית של f

הוכחה: נניח

$$V_1=V(f,\epsilon_1)$$

$$V_2=V(f,\epsilon_2)$$

קל לראות ש $V(f,\min\{\epsilon_1,\epsilon_2\})$ היא סביבה בסיסית של f, המוכלת ב $V_1\cap V_2$.

(3) לכל סביבה בסיסית V של הנקודה f קיימת סביבה בסיסית V_0 של f כך שלכל $g\in V_0$ קיימת סביבה בסיסית של g המוכלת ב V.

הוכחה: תהי f ותהי

$$V=V(f,\epsilon)$$

עמ' ב

$$V_0 = V(f, \epsilon/2)$$

קל לראות שלכל $g \neq f$ $V(g, \epsilon/2)$ היא סביבה בסיסית של g המוכלת ב-V.

נראה ש-g לא שייך ל $\overline{\{f\}}$ כלומר כל סביבה בסיסית של g מתכנסת את $\{f\}$ כלומר מכילה את f. כעת נניח קיים $x\in[0,1]$ כך ש $g(x)\neq f(x)$ אז $V(g,|g(x)-f(x)|)$ היא סביבה בסיסית של g שאינה מכילה את f. סתירה. לכן לכל $x\in[0,1]$ $f(x)=g(x)$ כלומר $g=f$. לכן

$$\overline{\{f\}} = \{f\}$$

(2) הטופולוגיות הן ~~צפות~~ שונות שכן כמו הקבוצות הפתוחות שלהם הן צפות הונחה.

(1) כל קבוצה פתוחה בטופולוגיה שלנו היא פתוחה גם ב $C[0,1]$. מה הקשר ל $C[0,1]$?

נניח D פתוחה בטופולוגיה שלנו כלומר לכל $f\in D$ קיימת סביבה בסיסית של f המוכלת ב-D כלומר קיים $\epsilon>0$ כך ש

לא מדובר בפונקציות רציפות.

$$V(f,\epsilon)\subset D$$

כעת אם $g\in B(f,\frac{\epsilon}{2})$ ב $C[0,1]$ אז סופרמום המרחקים בין f ל-g קטן מ-ϵ, כלומר לכל $x\in[0,1]$ $|f(x)-g(x)|<\epsilon$ כלומר

$$g\in V(f,\epsilon)$$

ולכן $B(f,\epsilon/2)\subset V(f,\epsilon)$ אבל $V(f,\epsilon)\subset D$ ולכן $B(f,\epsilon/2)\subset D$ כלומר לכל f ב-D יש פתוחה ב $C[0,1]$ המכילה את f ומוכלת ב-D כלומר D פתוחה ב $C[0,1]$

① כל קבוצה פתוחה ב $C[0,1]$ היא פתוחה בטופולוגיה שלנו: תהי D פתוחה ב $C[0,1]$ אז לכל $f\in D$ קיים $\epsilon>0$ כך ש $B(f,\epsilon)\subset D$, קל לראות ש $V(f,\epsilon)\subset B(f,\epsilon)$ ולכן לכל $f\in D$ D מכילה ~~בטופולוגיה~~ סביבה בסיסית של f, ולכן D פתוחה גם בטופולוגיה שלנו.

מש"ל

③ הישר של זורגנפריי הוא q_1:
נבחר את הסביבות הבסיסיות של x להיות:

$$B_x=\{[x,q) \mid x<q\in Q\}$$

B_x הוא אכן בסיס לסביבות של x כי כל סביבה של x מכילה סביבה מהטיפוס $[x,r)$ כאשר $x<r\in\mathbb{R}$, ואז נבחר $q\in Q\cap[x,r]$ עבור אותו q $[x,q)\subset[x,r)$ ולכן $[x,q)$ מוכל בסביבה הנתונה של x.

(ב) הישר של זורגנפריי הוא ספרבילי:
כל סביבה בסיסית של כל $x\in\mathbb{R}$ חותכת את Q ולכן $\overline{Q}=\mathbb{R}$ וQ בת-מנייה ולכן הישר ספרבילי.

(ג) הישר של זורגנפריי אינו q_2:
טענה: יהי $x\in[0,1]$, אז $[x,2)$ פתוחה על הישר של זורגנפריי.
הוכחה: לכל $y\in[x,2)$ יש סביבה בסיסית של y המקיימת $[y,2)\subset[x,2)$ ולכן $[x,2)$ פתוחה
טענה: לכל קבוצה בת-מנייה של פתוחות על הישר קיימת נקודה $x\in[0,1]$ כך ש הפתוחה $[x,2)$ אינה ניתנת להכתב כאיחוד של איברים בקבוצה.

הוכחה: תהי משפחה $\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ של פתוחים. ונניח
שלכל $x\in[0,1]$ ניתנת $[x,2)$ להיכתב
כאיחוד של איברים ב-$\{D_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ אז נוציא:
מ-$\{D_n\}_N$ את כל הקבוצות שאין להן אינפימום?
ועדיין נוכל לכתוב את $[x,2)$ מכיוון
לא השתמשנו בהן כדי לכתוב את $[x,2)$
מלכתחילה.
לכן בה"כ נוכל להניח של כל הקבוצות ב-$\{D_n\}$
יש אינפימום. קבוצת כל האינפימומים של
קבוצות ב-$\{D_n\}$ היא בת-מניה ו-$[0,1]$
היא לא בת-מניה ולכן קיים $x\in[0,1]$
שאינו אינפימום של אף קבוצה ב-$\{D_n\}$
לפי ההנחה

$$\exists F\subseteq\mathbb{N}\quad \bigcup_{n\in F} D_n=[x,2)$$

מכאן

$$\exists n\in F\quad x\in D_n$$

אבל x אינו האינפימום של D_n ולכן
האינפימום של D_n קטן מ-x כלומר

$$\exists y\in D_n\quad \inf(D_n)\le y<x$$

אבל

$$y\notin[x,2)$$

$$y\in\bigcup_{n\in F}D_n$$

כלומר $\bigcup_{n\in F}D_n\neq[x,2)$ סתירה. לכן לכל
משפחה בת-מניה של פתוחים קיימת
פתוחה שאינה ניתנת להיכתב כאיחוד של
קבוצות במשפחה. לכן הישר אינו C_2
מ.ש.ל.

אולי יש: ויהיה $-\infty$?

4 ⇐ 1 תהי $x\in X$ ו V סביבה פתוחה של $f(x)$
נתבונן ב

$$E = X - f^{-1}(V)$$
$$U = X - \overline{E}$$

U פתוחה, $f(\overline{E})\subset\overline{f(E)}$ ומכאן $x\notin\overline{E}$ מכך
ולכן $x\in U$ אבל $f(U)\subset V$ ולכן f רציפה

<u>טענה</u> תהי $f:X\to Y$ רציפה ו $g:Y\to Z$ רציפה אז
$g\circ f$ רציפה

<u>טענה</u> תהי $f:X\to Y$ רציפה, $A\subset X$ אז הצמצום של f
לתוך A (f_A) הוא רציפה

<u>הגדרה</u> יהיו X,Y מ"ט, $f:X\xrightarrow[\text{על}]{1-1}Y$ כך ש f ו f^{-1} רציפות
אז f הוא הומיאומורפיזם של X על Y

<u>הגדרה</u> X,Y מ"ט יקראו הומיאומורפיים אם קיים
ביניהם הומיאומורפיזם כלשהו

<u>הגדרה</u> X,Y מ"ט, $f:X\to Y$ חח"ע אז $f:X\to f(X)$ הוא על
אם f^{-1} רציפה אז f יקרא שיכון של
X לתוך Y כי X הומיאומורפי לתת של
Y

<u>טענה</u> יהיו X,Y מ"ט, $f:X\xrightarrow[\text{על}]{\text{חח"ע}}Y$ אזי שקולים:

1. f הומיאומורפיזם
2. $\forall D\subset X$ $D\in\tau\Leftrightarrow f(D)\in\tau$
3. כנ"ל לגבי סגורות
4. $\forall A\subset X$ $f(\overline{A})=\overline{f(A)}$

<u>הגדרה</u> תהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה לא ריקה של לא ריקות

$$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha=\{x:A\to\bigcup_{\alpha\in A}X_\alpha \mid \forall\alpha\in A\ x(\alpha)\in X_\alpha\}$$

הגדרה נסמן את x בנקודה בהגדרה הקודמת

$x_\alpha = x(\alpha)$ תקרא הקואורדינטה ה-α של x

הגדרה יהי $\beta \in A$

$$\pi_\beta : \prod_{\alpha \in A} X_\alpha \to X_\beta$$

המוגדרת כך:

$$\pi_\beta(x) = x_\beta$$

תקרא פרויקציה (הטלה) של המכפלה הקרטזית על X_β

טענה $\forall_\beta$ הפרויקציה היא על.

* מעתה נעסוק רק ב A סופית

$$A = \{1, 2 \dots n\}$$

הגדרה $\prod_{k=1}^{n} X_k = \{(x_1, x_2 \dots x_n) \mid x_k \in X_k \ \forall 1 \le k \le n\}$

הגדרה תהי $\{(X_\alpha, \tau_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מ"ט.

נגדיר $X = \prod_{\alpha \in A} X_\alpha$

$$C = \prod_{\alpha \in A} U_\alpha$$

① לכל α $U_\alpha \in \tau_\alpha$

② פרט למספר סופי של אינדקסים $U_\alpha = X_\alpha$

טענה C היא בסיס לטופולוגיה כלשהי

הגדרה לטופולוגיה המתקבלת - נקרא טופולוגית המכפלה

אז הטופולוגיה של טיכונוף למרחב המתקבל נקרא מרחב המכפלה של המרחבים X_α

משפט: תת-בסיס לטופולוגיה של טיכונוף המשפחה

$$\{\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A,\, U_\alpha\in\tau_\alpha}$$

היא תת-בסיס

הגדרה: $f:X\to Y$ כש-X,Y מ"ט f תקרא העתקה פתוחה אם היא מעבירה פתוחות לפתוחות

הגדרה: $f:X\to Y$ כש-X,Y מ"ט f תקרא סגורה כנ"ל.

טענה: יהי $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ הטופולוגיה של טיכונוף וההעתקה π_α הן רציפה ופתוחה

טענה: הטופולוגיה של טיכונוף על המכפלה היא החלשה ביותר שבה ההטלות הן רציפות

טענה: יהי X מ"ט, $f:X\to\prod_\alpha X_\alpha$ אז f רציפה אמ"מ

$$\forall\alpha\ (\pi_\alpha\circ f \text{ רציפה})$$

הוכחה: (ב) טריוויאלי

(ד) נניח $\pi_\alpha\circ f$ רציפה אז

$\forall U_\alpha\in\tau_\alpha$ $(\pi_\alpha\circ f)^{-1}(U_\alpha)$ פתוחה ב-X

אבל

$$(\pi_\alpha\circ f)^{-1}(U_\alpha)=f^{-1}(\pi_\alpha^{-1}(U_\alpha))$$

כלומר f^{-1} מעבירה פתוחות לפתוחות ולכן היא רציפה. מש"ל

הגדרה תהי X קבוצה, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה

של מ"ט, $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של העתקות

$f_\alpha: X\to X_\alpha$ הטופולוגיה המצומצמת ביותר

על X שבה f_α רציפה $\forall\alpha$ תקרא הטופולוגיה

החלשה המושרית ע"י $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$

טענה אחד אותה טופולוגיה

$$\{f_\alpha^{-1}(V_\alpha) \mid \alpha\in A,\ V_\alpha\in\tau_\alpha\}$$

מהווה תת-בסיס

משפט תהי Y מ"ט, $f:Y\to X$ כאשר X מ"ט עם

הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$

אזי f רציפה אמ"מ $f_\alpha\circ f$ רציפה

לכל α

הגדרה תהי X קבוצה, $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של קבוצות

$\{f_\alpha: X\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ נגדיר

$$\varphi: X\to\prod_{\alpha\in A}X_\alpha \quad \text{כך:}$$

$$(\varphi(x))_\alpha = f_\alpha(x)$$

$\varphi(x)$ תקרא העתקת ההערכה של X בתוך $\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$

הגדרה תהי נה $f_\alpha: X\to X_\alpha$ המשפחה $\{f_\alpha\}$ תקרא

מפרידה בין נקודות של X אם

$$\forall x\neq y\in X\ \exists\alpha\ f_\alpha(x)\neq f_\alpha(y)$$

11 **טענה** תהי $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של מ"ט, $\{f_\alpha: X\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה

של העתקות אזי העתקת ההערכה מ-X ל-$\prod_{\alpha\in A}X_\alpha$

היא שכן אומר לא הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י $\{f_\alpha\}$ והמשפחה $\{f_\alpha\}$ מפרידה בין נקודות של X.

<u>הוכחה:</u> (ב) נשים מהגדרת ההערכה היא שיכון אז

$$\forall x\in X \quad (e(x))_\alpha = f_\alpha(x)$$

$$\Downarrow$$

$$\forall \alpha\in A \quad \pi_\alpha\circ e = f_\alpha$$

נזכיר ש

$$e: X \xrightarrow{\text{על}} e(X)$$

(א) מהאמור ב׳ 25:

$$e(X)\subset \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$$

למרחב ההטלה הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י ההטלה ואז על $e(X)$ הטופולוגיה המושרית ע"י צמצום ההטלה:

$$\pi_\alpha/_{e(X)}$$

X הומאומורפי ל-$e(X)$ ולכן הטופולוגיה שלהם

$$\pi_\alpha/_{e(X)}\circ e = f_\alpha$$

(תרגיל יהי $Y\subset X$ אם הטופולוגיה על X היא המושרית ע"י $f_\alpha: X\to X_\alpha$ מה הטופולוגיה של Y)

$\{f_\alpha\}$ מפרידה כי:

$e: X\to e(X)$ חח"ע $\Rightarrow x\neq y \Rightarrow e(x)\neq e(y) \Rightarrow \exists\; e(x)_\alpha \neq e(y)_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x)\neq f_\alpha(y)$

(ג) אם X הטופולוגיה המושרית ע"י f_α ו-$\{f_\alpha\}$ מפרידה נקודות של X אז $e: X\to e(X)$ הומאומורפיזם:

① e חח"ע רציפה

② e פתוחה קד·רור

③

$\forall \alpha$ $\pi_\alpha \circ e = f_\alpha$

$\forall \alpha$ f_α פונ' רציפה מ-X ל-X_α, π_α

רציפות ולכן e רציפה.

④ e פתוחה. תהי U

~~פתוחה~~ בתחום :?

$V=f_\alpha^{-1}(V)$ כך ש-V פתוחה ב-X

~~פתוחה~~ $\exists \alpha$

$$V=(\pi_\alpha\circ e)^{-1}(V)=e^{-1}(\pi_\alpha|_{e(X)}^{-1}(V))$$

מכאן $e(V)=$

$$=e(e^{-1}(\pi_\alpha|_{e(X)}^{-1}(V)))=\pi_\alpha|_{e(X)}^{-1}(V)=\pi_\alpha^{-1}\cap e(X)$$

ולכן $e(V)$ פתוחה ב-$e(X)$

תרגיל: מצאו תכונה קריטריון מתאים למצוא

~~של~~ מרחב X הוא מושרה ע"י $\{f_\alpha\}$ כלומר,

הגדרה: יהי X מ"ט, $\{x_n\}$ סדרה ב-X ו-$x\in X$

נאמר ש-$x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x$ אם

$$\forall V_x \; \exists N\in\mathbb{N} \; \forall n>N \quad x_n\in V_x$$

דוגמה: נתבונן ב-$\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ עם עקביות לסדרות של

מוגדר:

$$U(f,F,\epsilon)=\{g\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}} \mid |g(x)-f(x)|<\epsilon \;\; \forall x\in F\}$$

קל לראות שהמונוטוניות של f ... $f_n \to f$

מתכנסת $\{f_n\}$ כלומר $\forall x\ f_n(x) \to f(x)$

נקודתית ל $f(x)$

כעת נתבונן בקבוצה

$$K=\{f\in R^R \mid (|\{x \mid f(x)=0\}|\in N) \wedge (\forall x\ f(x)\in\{0,1\})\}$$

הפונקציה $g\equiv 0$ אינה שייכת לא אך

קל לראות ש $g\in \bar{K}$

טענה: לא קיימת סדרה $f_n \to g$ בטופולוגיה הנ"ל

כי אז

$$\forall x\ f_n(x)\to 0$$

אבל f_n ... יכול להתאפס רק בקבוצה

סופית - מניה של קבוצות

<u>מסקנה</u> סדרות אינן מספיקות לתאור טופולוגיה

<u>טענה</u> במרחב q_1 ניתן לתאר ע"י סדרות:

<u>הוכחה:</u> יהי (X,τ) q_1, $A\subset X$ אז x נקודת סגור

של A אמ"מ קיימת סדרה $\{x_n\}\subset A$ כך ש $x_n\to x$. הוכחה:

(א) אם $x_n \to x$ אז $x\in\bar{A}$ ברור.

(ב) X הוא q_1 לכן קיימת $\{V_n\}_{n\in N}$ בסיס

למערכת הסביבות של נקודה x וממוספר

(קיבלנו $\forall n>1$ $V_n\subset V_{n-1}$ אחרת נשפר ע"י חיתוכים)

כעת נבחר $\{x_n\}$ כך ש

$$x_n\in V_k\cap A\neq\emptyset$$

קל לראות ש $\{x_n\}$ שואפת ל x

טענה יהי X (מ"ט) q_1 מתקיים:

(1) $O\subset X$ פתוחה אמ"מ $\forall \{x_n\}\to x\in O$ כמעט כל x_n ב O

(2) $F\subset X$ סגורה אמ"מ $\forall \{x_n\}\in F\ \lim x_n\in F$

③ $f:X\to Y$ רציפה אמ"מ

$$\lim f(x_n)=f(\lim(x_n))$$

טענה המרחב $\mathbb{R}^k$ הטופולוגי של מניה א-1 α_1

הגדרה תהי Λ קבוצה ויחס $\leq$ על Λ שמקיים

① $\forall\lambda\in\Lambda\quad \lambda\leq\lambda$

② $(\lambda_1\leq\lambda_2)\wedge(\lambda_2\leq\lambda_3)\Rightarrow\lambda_1\leq\lambda_3$

③ $\forall\lambda_1,\lambda_2\in\Lambda\ \exists\lambda_3\in\Lambda\quad \lambda_1\leq\lambda_3,\ \lambda_2\leq\lambda_3$

אז זה נקרא כיוון על Λ

הגדרה קבוצה Λ שעליה מוגדר יחס כיוון נקראת מכוונת ומסמנים $(\Lambda,\leq)$

הגדרה יהי X מ"ט, $x\in X$, U_x מערכת הסביבות של x נגדיר סדר $V_1,V_2\in U_x$ כך:

$$V_1\leq V_2 \overset{def}{\iff} V_2\subset V_1$$

טענה ההגדרה הנ"ל $\leq$ הוא יחס כיוון

הגדרה תהי X קבוצה, Λ קבוצה מכוונת פונקציה $p:\Lambda\to X$ נקראת רשת

$$\lambda\longmapsto p(\lambda)=x_\lambda$$

$$(x_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$$

הגדרה תהי $x:\Lambda\to p$ רשת, ותהי M קבוצה מכוונת $\varphi:M\to\Lambda$ שמקיימת

① $\mu_1\leq\mu_2\Rightarrow\varphi(\mu_1)\leq\varphi(\mu_2)$

② $\forall\lambda\in\Lambda\ \exists\mu\in M\quad \varphi(\mu)\geq\lambda$

ההרכבה $p\circ\varphi$ נקראת תת-רשת של p

הגדרה יהי X מ"ט, $\{x_\lambda\}$ רשת במרחב. נאמר ש$\{x_\lambda\}$ מתכנסת ל-x אם לכל סביבה U של x יש $\lambda_0 \in \Lambda$ כך שלכל $\lambda \geq \lambda_0$ $x_\lambda \in U$

דוגמא יהי X מ"ט x נקודה ותהי Λ בסיס למערכת הסביבות של x לפי הכיוון שהוגדר לעיל. מכל $V \in \Lambda$ נבחר נקודה x_V. קל לראות ש

$$\{x_V\}_{V\in\Lambda}$$

מתכנסת ל x

הערה רשת קבועה מתכנסת לקבוע

הערה כל תת-רשת של רשת מתכנסת מתכנסת לאותו גבול.

הגדרה תהי x_λ רשת x יקרא גבול חלקי אם

$$\forall V \in U_x \ \forall \lambda_0 \ \exists \lambda \geq \lambda_0 \ x_\lambda \in V$$

טענה יהי $Y = \prod_{\alpha\in\Delta} X_\alpha$ מרחב מכפלה ותהי $\{x_\lambda\} \subset Y$ רשת ב Y אזי

$$x_\lambda \to x \text{ אמ"מ } \forall \alpha \ \pi_\alpha(x_\lambda) \to \pi_\alpha(x)$$

טענה יהי X מ"ט, $A \subset X$ אזי $x \in \bar{A}$ אמ"מ קיימת רשת $\{x_\lambda\} \subset A$ כך ש

$$x_\lambda \to x$$

טענה נניח ש X,Y הם מ"טים, $f: X \to Y$ אזי f רציפה ב x_0 אמ"מ לכל רשת $\{x_\lambda\}$ כך ש $x_\lambda \to x_0$

$$f(x_\lambda) \to x_0$$

הגדרה יהי (X,τ) מ"ט הוא יקרא T_0 אם

$$\forall x \neq y \in X \ \exists q \in \tau \ ((x \in q) \wedge (y \in q^c)) \vee [(x \in q^c) \wedge (y \in q)]$$

הגדרה יהי (X,τ) מ"ט הוא יקרא T_1 אם

$$\forall x \neq y \in X \ \exists q_x, q_y \in \tau \ (x \in q_x) \wedge (y \in q_y) \wedge (x \in q_y^c) \wedge (y \in q_x^c)$$

טענה $T_1 \Rightarrow T_0$

דוגמה טופולוגית המשלים הסופי היא T_1 אך כל שתי פתוחות נחתכות אחת את השניה.

טענה שקולים הדברים:

① X הוא T_1

② קבוצות חד-נקודתיות הן סגורות

③ לכל $A\subset X$ הוא חיתוך של הפתוחות המכילות אותו

הוכחה $1 \Leftarrow 2$ טריוויאלי

$2 \Rightarrow 3$ תהי $A\subset X$ ויהי $x\notin A$ אז $X-\{x\}$ הוא פתוחה כי $\{x\}$ סגורה. $X-\{x\}$ גם מכילה את A, ולכן הוא בחיתוך. מכאן x אינו בחיתוך.

$3 \Rightarrow 1$ יהי $x\in X$ x הוא חיתוך של כל הפתוחות המכילות אותו. כלומר קיימת פתוחה שאינה מכילה את y $\forall y\neq x$ אך מכילה את x.

מש"ל.

טענה ת"מ של T_1 הוא T_1

מכפלה של T_1 היא גם T_1

הגדרה יהי X מ"ט, נאמר על $\{f_\alpha: X\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ שהיא מפרידה נקודות מסגורות ב-X אם

$$\forall B\subset X \quad B=\overline{B} \Rightarrow \forall x\in X \quad x\notin B \Rightarrow \exists \alpha\in A \quad f_\alpha(x)\notin \overline{f_\alpha(B)}$$

טענה יהי (X,τ) מ"ט T_1, $\{f_\alpha: X\to X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של רציפות וכן $\{f_\alpha\}$ מפרידה נקודות מסגורות ב-X אז: העתקת ההצבה $e: X\to \prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ היא שיכון.

הוכחה כל נקודה ב-X היא קבוצה סגורה. ולכן $\{f_\alpha\}$ מפרידה בין נקודות

נותר להוכיח ש-X הוא הומיאומורפי לתמונה המושרית ע"י $\{f_\alpha\}$, כלומר

צ"ל $\{F_\alpha^{-1}(V) \mid \alpha\in A, V\in\tau_\alpha\}=K$ מהווה תת-בסיס

כיוון ש V פתוחה, F רציפה ולכן

$$F_\alpha^{-1}(V)\in\tau$$

~~נניח $D\in$~~

יהי $D\in\tau$, $x\in D$ נתבונן ב $B=X-D$ ⟸ B סגורה

ו $x\notin B$ ו $\{F_\alpha\}$ מפרידה נקודות מסגורות ולכן

קיים α כך ש

$$F_\alpha(x)\notin\overline{F_\alpha(B)}$$

ולכן $V=X_\alpha-\overline{F_\alpha(B)}\ni F_\alpha(x)$

כיוון ש V היא המשלים של סגורה כלומר היא פתוחה. ברור ש

$$x\in F_\alpha^{-1}(V)$$

$$\Leftarrow V=X_\alpha-\overline{F_\alpha(B)}$$

$$F_\alpha^{-1}(V)=F_\alpha^{-1}\left(X_\alpha-\overline{F_\alpha(B)}\right)=$$

$$=X-F_\alpha^{-1}\left(\overline{F_\alpha(B)}\right)\subset$$

כיוון ש B סגורה, F רציפה ולכן $F_\alpha(B)=F_\alpha(\overline{B})\subset\overline{F_\alpha(B)}$

מכאן $B\subset F_\alpha^{-1}(F_\alpha(B))\subset F_\alpha^{-1}\left(\overline{F_\alpha(B)}\right)$

$$\subset X-B=D$$

כלומר לכל D פתוחה ב x מצאנו $q\in K$ פתוחה.

כך ש $x\in q\subset D$ ולכן K בסיס לפתוחות

ולכן K תת-בסיס.

מ.ש.ל.

<u>הגדרה</u>: המרחב (X,τ) יקרא T_2 או מרחב האוסדורף אם

$$\forall x\neq y\in X\ \exists U,V\in\tau\quad (x\in U)\wedge(y\in V)\wedge(U\cap V=\emptyset)$$

<u>טענה</u> $T_1\Leftarrow T_2$

<u>טענה</u> (X,τ) מ"ט אז שקול:

① X הוא T_2

② ~~גבולות~~ של רשת מתכנסת
יש הגבול שלה הוא יחיד

③ $\Delta=\{(x,x)\mid x\in X\}$ סגורה ב מ"ט $X\times X$

①⇒② תרגיל

<u>הוכחה</u> ②⇒③ נניח Δ אינה סגורה אז
יש לה נקודת סגור שאינה שייכת ל Δ
(x,y) אז $x\neq y$ ויש רשת מתכנסת
ל (x,y) מהצורה $\{(x_\lambda,x_\lambda)\}_\lambda$ ולכן אז

$x_\lambda \to x$

$x_\lambda \to y$

סתירה.

③⇒① יהיו $x,y\in X$, $x\neq y$ אז
$(x,y)\notin\Delta$ סגורה לכן קיימת סביבה
בסיסית של (x,y) $U\times V$ כך ש $\Delta\cap U\times V=\phi$
כלומר $U\cap V=\phi$

מש"ל.

<u>טענה</u> ① כל תת"מ של מרחב T_2 הוא T_2

② $\prod_\alpha X_\alpha\neq\phi$ הוא T_2 אמ"מ לכל α

X_α הוא T_2

<u>טענה</u> נתונה $f,g:X\to Y$ רציפות, Y הוא T_2
אז
$A=\{x\in X\mid f(x)=g(x)\}$ אז A סגורה

<u>מסקנה</u> אם $f,g:X\to Y$ רציפות, Y הוא T_2,
$f=g$ בנקודות בקבוצה $A\subset X$ צפופה אז $f=g$
בכל X

טופולוגיה תרגיל VI

1) הראה שהמישור $\mathbb{R}$ Moore ספרבילי.

2) הראה שאם $D \subset X$ הפתוחה ; X ספרבילי אזי D ספרבילי.

3) X מרחב טופולוגי, $f,g: X \to \mathbb{R}$ רציפות, ונניח $f(x)=g(x)$ לכל $x \in D$ כאשר D צפופה ב-X. הראה ש $f=g$ על X.

4) X ; Y מרחבים טופולוגיים. הראה שבמרחב המכפלה $X \times Y$ קיים שלכל $A \subset X$; $B \subset Y$

$$(A\times B)^\circ = A^\circ \times B^\circ$$

$$\overline{A\times B} = \bar{A} \times \bar{B}$$

5) אם $\alpha \in A$, X_α מרחבים טופולוגיים ולכל α $A_\alpha \subset X_\alpha$ אזי $\prod_\alpha A_\alpha$ צפוף ב $\prod_\alpha X_\alpha$ אם ורק אם A_α צפוף ב X_α לכל α

$\mathbb{R}$ ללא Y

דרור רבינוביץ

תרגיל טופולוגיה

(1) המישור של Moore הוא ספרבילי:
נבחר

$$D=\{(x,y)\mid (y>0)\wedge(x,y\in\mathbb{Q})\}$$

קל לראות שכל סביבה של כל נקודה חותכת את D, ולכן $\bar{D}$ הוא המישור כולו. D היא בת-מנייה ולכן המישור ספרבילי.

(2) אם X ספרבילי אז יש בו קבוצה Y בת-מנייה כך ש $\bar{Y}=X$.
כעת יהי $x\in D$ ותהי B פתוחה ב-D כך ש $x\in B$ מהגדרת B כך ש $B=D\cap C$ ש C פתוחה ב-X, ואם גם D פתוחה ב-X (מהנתון) ולכן B פתוחה ב-X ולכן היא חותכת את Y. $B\subset D$ ולכן B חותכת את $Y\cap D$. כלומר $\overline{Y\cap D}=D$. Y בת-מנייה, $Y\cap D\subset Y$, ולכן $Y\cap D$ היא בת-מנייה. לכן D ספרבילי.

(3) נניח בשלילה שקיים $x\in X$ כך ש

$$f(x)\neq g(x)$$

נבחר $A,B\subset\mathbb{R}$ פתוחות כך ש $f(x)\in A$, $g(x)\in B$ וכן $A\cap B=\emptyset$. f,g רציפות, ולכן $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(B)$ הן פתוחות ומכילות את x, כלומר $g^{-1}(B)\cap f^{-1}(A)\neq\emptyset$. $g^{-1}(B)$ פתוחה, $f^{-1}(A)$ פתוחה ולכן החיתוך שלהם הוא קבוצה פתוחה ~~לא ריקה~~ ולכן הוא חותך את D. נקח $y\in D\cap g^{-1}(B)\cap f^{-1}(A)$. קל לראות ש $f(y)=g(y)$, $f(y)\in A$, $g(y)\in B$ אבל $A\cap B=\emptyset$

סתירה. לכן לכל $x\in X$ $f(x)=g(x)$.

(4) (א) יהי $x\in(A\times B)^\circ$ הן π_x, π_y העתקות פתוחות ולכן $\pi_x((A\times B)^\circ)$, $\pi_y((A\times B)^\circ)$ הן הקבוצות פתוחות המקיימות

$$\pi_x(x)\in\pi_x((A\times B)^\circ)\subset A$$

$$\pi_y(x)\in\pi_y((A\times B)^\circ)\subset B$$

A°, B° הן הפתוחות הגדולות ביותר המוכלות ב-A, B בהתאמה, ולכן

$$\pi_x(x)\in\pi_x((A\times B)^\circ)\subset A^\circ$$

$$\pi_y(x)\in\pi_x((A\times B)^\circ)\subset B^\circ$$

ולכן $x\in A^\circ\times B^\circ$, כלומר $(A\times B)^\circ\subset A^\circ\times B^\circ$

כמו כן A°, B° פתוחות, ולכן $A^\circ\times B^\circ$ פתוחה ומוכלת ב-$A\times B$. אולם $(A\times B)^\circ$ היא הפתוחה הגדולה ביותר המוכלת ב-$A\times B$, ולכן $A^\circ\times B^\circ\subset(A\times B)^\circ$

כלומר: $A^\circ\times B^\circ=(A\times B)^\circ$

(ד) יהי $x\in\overline{(A\times B)}$ ותהיינה D ו-E פתוחות ב-x ו-y בהתאמה, כך ש

$$\pi_x(x)\in D$$

$$\pi_y(x)\in E$$

כלומר $x\in D\times E$. D, E פתוחות, ולכן $D\times E$ היא פתוחה, ומכילה את x, ולכן היא חותכת את ~~כלומר D חותך את $A\times B$~~

~~$\pi_x(\overline{A\times B})$ ו E את $\pi_y(\overline{A\times B})$ חותכת את~~

$A\times B$ כלומר D חותך את A ו-E חותך את B ולכן $\pi_x(x)\in\overline{A}$ וכן $\pi_y(x)\in\overline{B}$ ולכן

$x\in\bar A\times\bar B$ ולכן $\overline{A\times B}\subset\bar A\times\bar B$

כעת ~~יהי~~ יהי $x\in\bar A\times\bar B$ ותהי V פתוחה כלשהיא
ל $X\times Y$ המכילה את x. V מכילה קבוצה
פתוחה אלמנטרית כלשהיא ~~$V_x\times V_y$~~ שהיא
מכפלה קרטזית של שתי פתוחות V_x, V_y ל X, Y
~~בהתאמה~~ ~~$\pi_X(A)$~~ והמקיימות

$$\pi_X(x)\in V_X$$

$$\pi_Y(x)\in V_Y$$

אבל $\pi_X(x)\in\bar A$ וכן $\pi_Y(x)\in\bar B$ ולכן קיימות
נקודות x_A, x_B המקיימות

$$x_A\in V_X\cap A$$

$$x_B\in V_Y\cap B$$

ואז $(x_A,x_B)\in V$ וכן $(x_A,x_B)\in A\times B$ ולכן

$$x\in\overline{A\times B}$$

מכאן $\overline{A\times B}\subset\bar A\times\bar B$ ולכן $\overline{A\times B}=\bar A\times\bar B$

משל

(5) נניח ש $\prod_\alpha A_\alpha$ צפופה ב $\prod_\alpha X_\alpha$ נקבע זוית
α_0 ותהי $D\subset A_{\alpha_0}$ פתוחה. $\pi_{\alpha_0}^{-1}(D)$ היא פתוחה
ב $\prod_\alpha X_\alpha$ ולכן $\prod_\alpha A_\alpha$ חותכת אותה. כלומר
קיימת נקודה $x\in\pi_{\alpha_0}^{-1}(D)$ כך ש

$$\forall\alpha\quad \pi_\alpha(x)\in A_\alpha\cap\pi_\alpha\left(\pi_{\alpha_0}^{-1}(D)\right)$$

ובפרט עבור ה α_0 שלנו

$$\pi_{\alpha_0}(x)\in A_{\alpha_0}\cap\pi_{\alpha_0}\left(\pi_{\alpha_0}^{-1}(D)\right)=A_{\alpha_0}\cap D$$

ולכן A_{α_0} חותכת את D לכל D פתוחה
ולכל α_0 ולכן לכל α A_α צפופה ב X_α.
נניח שלכל α A_α צפופה ב X_α ותהי $D\subset\prod_\alpha X_\alpha$

קבוצה פתוחה. אז קיימת לה קבוצה חלקית B
שהיא בסיסית כלומר

$$B=\prod_\alpha B_\alpha$$

כש-B_α פתוחות ב-X_α לכל α ולכן לכל α
$B_\alpha\cap A_\alpha$ אינו ריק כלומר מכל נקודה כלשהיא x_α
אז הנקודה x המוגדרת $x=(x_\alpha)_{\alpha\in A}$ שייכת
ל-$\prod_\alpha B_\alpha$ כלומר ל-B כלומר לכן, וגם ל-$\prod_\alpha A_\alpha$.
כלומר, $\prod_\alpha A_\alpha$ צפופה ב-$\prod_\alpha X_\alpha$

מרחבים רגולריים

הגדרה מ"ט X יקרא רגולרי אם לכל סגורה $A\subset X$ ולכל $x\in X$ המקיים $x\in A^c$ יש פתוחות U ו V כך ש

$$U\cap V=\emptyset$$
$$A\subset U$$
$$x\in V$$

טענה אם מרחב הוא גם רגולרי וגם T_1 אז הוא T_2

הגדרה מרחב שהוא T_1 וגם רגולרי הוא T_3

מסקנה $T_3 \Rightarrow T_2$

דוגמה יהי $X=\mathbb{R}$ לכל $0\neq x\in\mathbb{R}$ נקח לתור מערכת סביבות את $(x-\epsilon,x+\epsilon)$ ועבור $x=0$ נקח את $U-A$ כאשר U סביבה רגילה של 0

$$A=\{1,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{3},\ldots\}$$

המרחב הוא T_2 כי הוא יותר עדין מהטופולוגיה הרגילה.
הוא אינו רגולרי כי הקבוצה A היא סגורה אך אין פתוחה המכילה אותה ושאינה ~~חותכת~~ חותכת פתוחה המכילה את 0

טענה כל מרחב מטרי הוא רגולרי.

טענה הטענות הבאות שקולות:

1. X הוא רגולרי
2. לכל U פתוחה ו $x\in U$ יש V פתוחה כך ש $x\in V\subset\bar{V}\subset U$
3. לכל נקודה x ב X קיים בסיס לסביבות המורכב מסביבות סגורות.

טענה יהי X מ"ט ו $Y\subset X$ אז

① X רגולרי ← Y רגולרי או T_3

② $\prod X_\alpha$ הוא רגולרי (T_3) אמ"מ לכל α X_α הוא רגולרי (T_3)

<u>הגדרה</u> יהי X מ"ט

$$C(X)=\{f:X\to\mathbb{R} \mid f \text{ רציפה}\}$$

$$C^*(X)=\{f\in C(X) \mid f \text{ חסומה}\}$$

<u>הגדרה</u> מ"ט X יקרא רגולרי לגמרי אם לכל קבוצה $A\subset X$ סגורה ולכל נקודה $p\notin A$ קיימת פונקציה רציפה f $f:X\to I=[0,1]$ כך ש

$$f(A)=\{1\}$$
$$f(p)=0$$

<u>טענה</u> יהי X מ"ט אם רגולרי לגמרי $\Rightarrow$ רגולרי

<u>הגדרה</u> מרחב T_1 שהוא רגולרי לגמרי יקרא $T_{3½}$ או טיכונוף

<u>טענה</u> $T_{3½}\to T_3$

<u>טענה</u> ~~העובדות הקודמות מתקיימות~~

① אם X הוא רגולרי לגמרי ($T_{3.5}$) אז כל תת מ"ט הוא רגולרי לגמרי ($T_{3.5}$)

② $\prod X_\alpha$ הוא רגולרי לגמרי ($T_{3.5}$) אמ"מ לכל α X_α הוא רגולרי לגמרי ($T_{3.5}$)

<u>טענה</u> כל מרחב מטרי (X,ρ) הוא טיכונוף

<u>הוכחה</u> תהי $A\subset X$ סגורה והי' ρ חסום נגדיר $f(x)=\rho(x,A)$ $f(x)$ חסומה

הפונקציה $\in$ היא 0 אמ"מ $x\in A$ ולכן $\in$
רציפה לכן X רגולרי (הוא גם T_1)
ולכן הוא טיכונוף

דוגמה: המישור של Moore הוא טיכונוף T_2

ע"ל

① הראנו שאם y הוא גבול חלקי של רשת $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$
אז יש תת-רשת של x_λ השואפת ל-y.

רמז:

$$M=\{(\lambda,V)\mid \lambda\in\Lambda,\ V \text{ סביבה של } y \text{ המכילה את } x_\lambda\}$$

נגדיר על M מעל סדר:

$$(\lambda_1,V_1)\le(\lambda_2,V_2)\iff(\lambda_1\le\lambda_2)\wedge(V_2\subset V_1)$$

ונגדיר

$$f: M\to\Lambda$$

$$(\lambda,V)\mapsto\lambda$$

② אם x_λ היא רשת ב-$\prod_\alpha x_\alpha$ אזי
$x_\lambda\to x$ אמ"מ

$$\forall\alpha\quad \pi_\alpha(x_\lambda)\to\pi_\alpha(x)$$

③ יהי:

$$A=\{f\in\mathbb{R}^{\mathbb{R}}\mid \forall x\ f(x)\in\{0,1\},\ |\{x\mid f(x)=0\}|\in\mathbb{N}\}$$

בטופולוגיה טיכונוף

יראו ש-$0\in\bar{A}$ מצאו רשת ב-A המתכנסת ל-0.

(4) תהי $f: X\to Y$ רציפה, Y הוא T_2 אזי הקבוצה
$A=\{(x_1,x_2) \mid f(x_1)=f(x_2)\}$ היא סגורה ב $X\times X$.

(5) אם $f: X\to Y$ היא על ופתוחה והקבוצה A מתרגיל 4 היא סגורה ב $X\times X$ אזי Y הוא T_2.

(6) מצא המשפט שתקבל את תפרד את 4 ו-5 (הוכח אותו)

טענה (1) X הוא רגולרי לגמרי אם"ם ל-X הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י המשפחה $C^*(X)$

הגדרה (א) קוביה היא המכפלה של קבוצה כלשהי של קטעים סגורים וחסומים.

המשך טענה (2) מרחב הוא טיכונוף אם"ם הוא הומיאומורפי לתת של קוביה.

הוכחה (1): X רגולרי לגמרי אז $C^*(X)$ מפרידה נקודות מסגורות. לכן X המשך לפי ההוכחה של הטענה הקודמת לגבי הפרדת נקודות מסגורות.

(7) נבנה לX טופולוגיה החלשה המושרית ע"י $C^*(X)$. כלומר

$\{f^{-1}(V) \mid f\in C^*(X), V\in T_R\}$ מהווה תת-בסיס של X
כי בכלל ש $f^{-1}(V\cap W)=f^{-1}(V)\cap f^{-1}(W)$
$f^{-1}(V\cup W)=f^{-1}(V)\cup f^{-1}(W)$

אפשר לקחת במקום T_R תת-בסיס של R
לדוגמא כל הקבוצות מהצורה
$(-\infty,a)$ ו (a,∞)

דרור קרונמן

תרגיל טופולוגיה

(1) יהי y גבול חלקי של $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ נגדיר

$\mathcal{U}_y$ - קבוצת כל הסביבות של y

$$M=\{(\lambda,U)\mid \lambda\in\Delta,\ U\in\mathcal{U}_y,\ x_\lambda\in U\}$$

על M נגדיר $\leq$ כך:

$(\lambda_1,U_1)\leq(\lambda_2,U_2)$ אמ"מ $\lambda_1\leq\lambda_2$ וגם $U_2\subset U_1$

וכן נגדיר

$$F: M\to \Delta$$

כך:

$$(\lambda,U)\longmapsto\lambda$$

ויהי

$$\varphi:\Delta\to X$$

המוגדרת

$$\lambda\longmapsto x_\lambda$$

טענה: ההעתקה $\varphi\circ F$ היא תת-רשת של φ

הוכחה (1) יהי $x,y\in M$ אזי

$$x\leq y\Rightarrow(\lambda_x,U_x)\leq(\lambda_y,U_y)\Rightarrow\lambda_x\leq\lambda_y\Rightarrow F(x)\leq F(y)$$

(2) יהי $\lambda\in\Delta$. ניקח סביבה כלשהי $V\in\mathcal{U}_y$

ונגדיר $U=V\cup\{x_\lambda\}$ אזי

$$(\lambda,U)\in M$$

וכן

$$F[(\lambda,U)]\geq\lambda$$

טענה: הרשת $\varphi\circ F$ מתכנסת ל y

הוכחה: תהי $U_0\in\mathcal{U}_y$. לרשת $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ y הוא גבול-חלקי. ולכן קיים $\lambda_0\in\Delta$ כך ש $x_{\lambda_0}\in U_0$ ולכן $(\lambda_0,U_0)\in M$ וכן $\varphi\circ F((\lambda_0,U_0))\in U_0$

כעת ניקח $(\lambda_0,U_0)\leq(\lambda,U)$ אזי

$$(\lambda_0,U_0)\leq(\lambda,U)\Rightarrow U\subset U_0\Rightarrow \lambda\in U_0\Rightarrow\varphi\circ F((\lambda,U))\in U_0$$

ולכן הרשת אינה מתכנסת ל-y.

מ.ש.ל.

(2) יהיו $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ קבוצה של מרחבים ותהי $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Delta}$ רשת ב-$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$

(א) נניח $x_\lambda \to x$. נקבע $\alpha\in A$ ותהי U סביבה של $\pi_\alpha(x)$ ב-X_α. אז $\pi_\alpha^{-1}(U)$ היא סביבה של x ב-$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ ולכן קיים $\lambda_0\in\Delta$ כך שלכל $\lambda_0\le\lambda$ x_λ שייך ל-$\cancel{\pi_\alpha(x)}$ $\pi_\alpha^{-1}(U)$ ולכן לכל $\lambda_0\le\lambda$ $\pi_\alpha(x_\lambda)\in U$. לכן $\pi_\alpha(x_\lambda)\to\pi_\alpha(x)$.

מ.ש.ל.

(ב) נניח לכל α $\pi_\alpha(x_\lambda)\to\pi_\alpha(x)$. תהי U סביבה של x אז היא מכילה פתוחה בסיסית ב-$\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ המכילה את x, נקרא לה B.

מלבד מספר סופי של מקרים $X_\alpha=\pi_\alpha(B)$ ולכל $\lambda\in\Delta$ $\pi_\alpha(x_\lambda)\in\pi_\alpha(B)$.

עבור המקרים שנותרו: נסמן $\alpha_1 \dots \alpha_n$ את המקרים שבהם $X_{\alpha_i}\neq\pi_{\alpha_i}(B)$. עבור כל i קיים λ_i כך שלכל $\lambda\ge\lambda_i$ $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda)\in\pi_{\alpha_i}(B)$ כי לכל α $\pi_\alpha(x_\lambda)\to\pi_\alpha(x)$ ולכל α $\pi_\alpha(B)$ סביבה של $\pi_\alpha(x)$. מהגדרת Δ קיים $\lambda_0\in\Delta$ כך שלכל $1\le i\le n$ $\lambda_0\ge\lambda_i$ ואז לכל $\lambda\ge\lambda_0$ מהגדרת Δ לכל i $\lambda\ge\lambda_0\ge\lambda_i$ גורר $\lambda\ge\lambda_i$ ולכן לכל i $\pi_{\alpha_i}(x_\lambda)\in\pi_{\alpha_i}(B)$ ולכן משני המקרים עבור כל המקרים שבהם $X_\alpha \cancel{\pi_\alpha(x)} \neq\pi_\alpha(B)$ ולכל α $\pi_\alpha(x_\lambda)\in\pi_\alpha(B)$ כלומר $x_\lambda\in B$. כלומר מצאנו λ_0 כך שלכל $\lambda\ge\lambda_0$ $x_\lambda\in B\subset U$.

לכן $\{x_\lambda\}\to x$

מ.ש.ל.

כעת תהי U פתוחה ב X, $x\in U$ אז קיימות $f_1 \dots f_n \in C^*(X)$, $V_1 \dots V_n \in T$ כך ש

$$x\in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}(V_i)\subset U$$

כי $\{f^{-1}(V) \mid V\in T, f\in C^*(X)\}$ תת-בסיס.

כעת $f_i^{-1}((-\infty,a_i)) = (-f_i)^{-1}((-a_i,\infty))$

ולכן אפשר להניח ש

$$\forall i,\quad V_i \in \{(x,\infty) \mid x\in \mathbb{R}\}$$

כלומר

$$x\in \bigcap_{i=1}^{n} f_i^{-1}((a_i,\infty))\subset U$$

כעת נגדיר

$$g_i(x)=\max(f_i(x)-a_i,0)$$

אז כעת לכל i g_i רציפה ומקיימת g_i

ש מתקיים

$$f_i^{-1}((a_i,\infty)) = g_i^{-1}((0,\infty))$$

כלומר:

$$x\in \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}((0,\infty))\subset U$$

תהי: $g(x)=\prod_{i=1}^{n} g_i(x)$ אזי g רציפה, חסומה

כלומר $g(x)>0$. נניח $g(y)>0$ אז לכל i $g_i(y)>0$ כלומר y נמצא ב

$$y\in \bigcap_{i=1}^{n} g_i^{-1}((0,\infty))\subset U$$

ולכן $x\in g^{-1}((0,\infty))\subset U$ כלומר $g(X-U)=\{0\}$

כלומר אם A ~~ק~~ קבוצה סגורה אז קיימת
פתוחה U המכילה את x ואינה
חותכת את A ועבור אותה U מתקיים
הפירוק למעלה, כלומר

$$f(A)=\{0\}$$

$$f(x)\neq 0$$

ולכן X רגולרי לגמרי.

מש"ל

(ד) מרחק הוא טיכונוף אמ"מ הוא הומאומורפי
לת"מ של קוביה כאשר קוביה היא
~~אינס~~ $\prod_{f\in F} I_f$ כש I_f הן משפחה
של ~~קטעים~~ סגורות ב $\mathbb{R}$ בטופולוגיה
המושרית מהמכפלה

~~הוכחה~~ (⇐) I_f הוא טיכונוף לכל $f\in F$ ולכן
$\prod_{f\in F} I_f$ הוא טיכונוף X הומאומורפי
לת"מ של $\prod I_f$ ולכן גם הוא טיכונוף
(⇒) כעת ש X הוא טיכונוף. אז הוא T_1
ורגולרי לגמרי, כלומר הוא T_1 ויש לו
הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י $C^*(X)$
~~תהי~~ לכל $f\in C^*(X)$ נתאים I_f חסום וסגור
שהוא ~~ט~~ תמונות של f. נגדיר

$$e: X\longrightarrow \prod_{f\in C^*(X)} I_f$$

כך

$$[e(x)]_f = f(x)$$

המשך ההוכחה בעמ'

מרחבים נורמליים

הגדרה יהי X מ"ט יקרא נורמלי אם הוא מפריד בין סגורות ע"י פתוחות המכילות אותן וזרות זו לזו

הערה נורמלי $\not\Leftarrow T_1, T_2, T_3, T_{3\frac{1}{2}}$

הגדרה $T_4 =$ נורמלי $+ T_1$

~~טענה~~ $\cancel{T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}}$

דוגמה יהי $\mathbb{R}$ עם טופולוגיה שבה הפתוחים הם (a,∞) הוא נורמלי כי אין מה להפריד (הוא אינו רגולרי כי אי אפשר להפריד בין $(-\infty,0]$ ל-1.

דוגמה המישור של [illegible] הוא טיכונוף אבל לא נורמלי

טענה אם X מ"ט המכיל צפופה D, וגם סגורה S יחסית תת-דיסקרטית כך שהעוצמה של S גדולה שווה העוצמה של $P(D)$ אז X אינו נורמלי (משפט [illegible])

הוכחה תהי $T\subset S$ אז היא סגורה ב-S ולכן גם ב-X וגם $S-T$ סגורה ב-X. נניח X נורמלי אז קיימת $V(T)\supset T$, $V'(T)\supset S-T$ כך ש $V(T)\cap V'(T)=\phi$ נתבונן ב- $T_{1,2}\subset S$ כך ש $T_1-T_2\neq\phi$ אז $V(T_1)\cap V'(T_2)\neq\phi$ פתוחה ולכן $\varphi = V(T_1)\cap V'(T_2)\cap D\neq\phi$

מה ש $\varphi\subset V(T_1)$ ו- $\varphi\not\subset V(T_2)$

[illegible]

כלומר $D\cap V(T_1)$ ו-$D\cap V(T_2)$ הן שתי
קבוצות חלקיות שונות של D
כלומר

$$\overline{\overline{S}} < \overline{\overline{P(S)}} \le \overline{\overline{P(D)}} = \overline{\overline{2^D}}$$

סתירה. ולכן X אינו נורמלי

<u>טענה</u> כל מרחב מטריצבילי הוא נורמלי ו-T_4

<u>טענה</u> ① תת סגור של מרחב נורמלי או T_4 (הוא) נורמלי או T_4 בהתאמה.
② מכפלה של שני נורמליים (T_4) לא חייב להיות נורמלי

<u>הוכחה</u> ① כרגיל.
② יהי $X_{1,2}$ הישר של זורגנפריי
אזי $X_1\times X_2$ אינו נורמלי
כי $\mathbb{Q}$ קבוצת הנקודות הרציונליות הלא $\aleph_0$ צפופה ולכן כל קו ישר אלכסוני
ורק הוא דיסקרטי ו-א

<u>טענה</u> (הלמה של אוריסון) X הוא נורמלי
אמ"מ לכל A,B סגורות וזרות
יש $f:X\to[0,1]$ רציפה כך ש
$f(A)=\{1\}$
$f(B)=\{0\}$

<u>הוכחה</u> יהי X נורמלי, A,B סגורות וזרות קיימת
$A\subset U$, $B\subset V$ U,V פתוחות, $U\cap V=\emptyset$
אז

$$U\subset V^c \Rightarrow \bar{U}\subset V^c \Rightarrow \bar{U}=B.$$

כעת נניח A,B סגורות זרות אז
קיימת $A\subset V_{1/2}$ פתוחה כך ש $\phi=\bar{V}_{1/2}\cap B$

טענה: תהי $\{X_\alpha\}$ משפחה של מ"ט, $\{f_\alpha : X \to X_\alpha\}$ אז
העתקת ההערכה של X לתוך $\prod X_\alpha$
היא שיכון אמ"מ $\{f_\alpha\}$ מפרידה בין נקודות
ב-X ול-X הטופולוגיה החלשה המושרית ע"י
$\{f_\alpha\}$

הוכחה: (א) נניח שהעתקת ההערכה היא שיכון (1) אז

$$e : X \to e(X)$$

הוא הומיאומורפיזם

$$e(X) \subset \prod X_\alpha$$

ל-$e(X)$ יש הטופולוגיה ~~המושרית~~ החלשה ע"י צמצום ההטלות $\{\pi_\alpha\}$ אל

$$\{\pi_{\alpha}|_{e(X)}\}$$

כי ל-$\prod X_\alpha$ יש הטופולוגיה המושרית ע"י
$\{\pi_\alpha\}$. כעת

$$\pi_\alpha|_{e(X)} \circ e = f_\alpha$$

ולכן ל-X הטופולוגיה המושרית ע"י

$$\{\pi_\alpha|_{e(X)} \circ e\} = \{f_\alpha\}$$

(ב) כיוון

$$e : X \xrightarrow{1-1} e(X) \Rightarrow (x \neq y \to e(x) \neq e(y)) \Rightarrow (x \neq y \to \exists_\alpha\ e(x)_\alpha \neq e(y)_\alpha \Rightarrow f_\alpha(x) \neq f_\alpha(y))$$

ולכן $\{f_\alpha\}$ מפרידה בין נקודות X.

(ב) נניח של-X הטופולוגיה החלשה המושרית
ע"י $\{f_\alpha\}$, ו-$\{f_\alpha\}$ מפרידה בין נקודות X
צ"ל: $e : X \to e(X)$ הומיאומורפיזם!

(1) e בבירור על

(2) e בבירור חח"ע

③ לכל q $\pi_q \circ \varphi = F_q$, לכל q F_q ו-π_q רציפות
ולכן φ רציפה.

④ תהי $D \subset X$ פתוחה אזי בה״כ D פתוחה בסיסית, כלומר, נשתמש ב-X הטופולוגיה החלשה המושרית ע״י F_q:

$$D = F_{q_1}^{-1}(V_1) \cap F_{q_2}^{-1}(V_2) \cap \dots \cap F_{q_n}^{-1}(V_n)$$

כך ש-V_i פתוחה ב-X_{q_i}
נקבל:

$$\varphi(D) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} F_{q_i}^{-1}(V_i)\right) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\pi_{q_i} \circ \varphi)^{-1}(V_i)\right) =$$

$$= \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{n} \varphi^{-1}(\pi_{q_i}^{-1}(V_i))\right) = \varphi\left(\varphi^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{n} (\pi_{q_i}^{-1}(V_i))\right)\right) = \bigcap_{i=1}^{n} \pi_{q_i}^{-1}(V_i)$$

פתוחה V_i, פתוחה $\pi_{q_i}^{-1}$ ולכן, רציפה π_{q_i} כעת
נקבל כאן חיתוך סופי של פתוחות - כלומר קבוצה פתוחה. לכן φ פתוחה ולכן φ הומיאומורפיזם!

<u>טענה</u>: אם X עם המוכל צפופה D, ו-S סגורה יחסית דיסקרטית כך שהעוצמה של S גדולה שווה 2^D אזי X אינו נורמלי.

<u>הוכחה</u>: תהי $T \subset S$ אז היא סגורה ב-S ולכן גם ב-X. מאותו שיקול גם $S-T$ סגורה ב-X. כיוון ש-X נורמלי אזי קיימות

$$T \subset A(T) \qquad S-T \subset B(T)$$

כך ש

$$A(T) \cap B(T) = \emptyset$$

תהיינה $T_{1,2} \subset S$ שונות כך ש

$$T_1 - T_2 \neq \emptyset$$

אזי

$$T_1 \cap T_2^c \neq \emptyset$$

לכן $A(T_1) \cap B(T_2) \neq \emptyset$

אבל $A(T_1) \cap B(T_2)$ היא קבוצה פתוחה ולכן

$$\alpha = A(T_1) \cap B(T_2) \cap D \neq \emptyset$$

ואז:

$$\alpha \subset A(T_1) \cap D$$

$$\alpha \not\subset A(T_2) \cap D$$

כלומר $A(T_1), A(T_2)$ הן שתי קבוצות חלקיות שונות של D, כלומר:

$$\overline{\overline{\xi}} < \overline{\overline{P(\xi)}} \leq \overline{\overline{P(D)}} = 2^{\overline{\overline{D}}}$$

סתירה. לכן X לא נורמלי

נתקדם: קצת הכוונה—

$B,\ \overline{U_{0}}$ ... $A,\ X-U_{1/2}$

שיהן זרות סגורות ולכן יש $U_{1/4}$ ו-$U_{3/4}$ וכו'...
עד אינסוף.
נגדיר את הפונקציה

$$f:X\to[0,1]$$

כך:

$$f:x\longmapsto \inf\{q \mid x\in U_q\}$$

קל לראות ש $f(A)=0$ $f(B)=1$ ושהפונקציה רציפה!!

$T_4 \leftarrow T_{3\frac{1}{2}}$ ~~עבודה~~ ~~עבודה~~

מרחב X הוא נורמלי אמ"ם עבור כל סגורה $A\subseteq X$ ו $f:A\to\mathbb{R}$ רציפה קיימת $F:X\to\mathbb{R}$ כך ש $f=F|_A$ (משפט טיצה)

הוכחה: x נניח קודם עבור $f:A\to[-1,1]$
X נורמלי ולכן אפשר:

$$A_1=\{x\in A \mid f(x)\geq 1/3\}$$

$$B_1=\{x\in A \mid f(x)\leq -1/3\}$$

קל לראות ש A_1, B_1 סגורות ב-X.
ולכן קיימת

$$f_1:X\to[-1/3,1/3]$$

רציפה כך ש $f_1(A_1)=1/3$ ו $f_1(B_1)=-1/3$
תהי $g_1=f-f_1$ זוהי פונקציה רציפה

$$g_1:A\to[-2/3,2/3] \quad (!!!)$$

נתבונן על הפעולה שעשינו ל f על הפונקציה g_1:

$$A_2=\{x\in A \mid g_1(x)\geq 2/9\} \qquad B_2=\{x\in A \mid g_1(a)\leq -2/9\}$$

הגדר $f_2:X\to[-2/9,2/9]$ רציפה כך ש $f_2(A_2)=2/9$

$f_2(B_2)=-2/9$

נגדיר $g_2=g_1-f_2=f-f_1-f_2$ וזו רציפה

$$g_2:A\to[-4/9,\ 4/9]$$

נמשיך כך באינדוקציה ונקבל סדרה רציפות:

$$\left\{f_n:X\to\left[-\tfrac13\left(\tfrac23\right)^{n-1},\ \tfrac13\left(\tfrac23\right)^{n-1}\right]\right\}$$

ועל A

$$\left|f-\sum_{1}^{n}f_k\right|\leq\left(\frac23\right)^n$$

לכל $x\in X$ $\sum_{1}^{\infty}f_n(x)$ מתכנס בהחלט

נגדיר

$$\forall x\in X \qquad F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$$

זה רציף וגם

$$F:X\to[-1,1]$$

על

$$\forall x\in A \qquad f(x)=F(x)$$

הערה: ~~[illegible]~~ נובע ש $F(x)$ רציפה

כעת נניח עבור $f:A\to\mathbb{R}$

הקטע $(-1,1)$ הומאומורפי ל $\mathbb{R}$

לכן נניח עבור $f:A\to(-1,1)$ רציף

אם $f:A\to(-1,1)$ אז $f:A\to[-1,1]$

נמצא לה המשכה F^* על

$$A_0=\{x\in X \mid F^*(x)=1\}$$

זוהי קבוצה סגורה בX הזרה ל A

נבנה g רציפה שעל A_0 תהיה 0

ועל A תהיה 1 ואז נגדיר

$$F=g\cdot F^*$$

גמרנו.

~~[illegible]~~

(1) יהיו A,B סגורות זרות ב X

נגדיר

$$f:A\cup B\to[0,1]$$

כך ש $f(A)=0$ $f(B)=1$ לה המשכה

ל-X. ואז לפי הלמה של אוריסון

X הוא נורמלי

<u>הגדרה</u> מ"ט X יקרא לינדלוף אם מכל כיסוי

פתוח של X אפשר להוציא כיסוי לכל-היותר

בן-מניה. (Lindelof)

<u>טענה</u> מנ' $_2$ ⇐ לינדלוף

<u>הוכחה</u>

<u>טענה:</u> R הוא לינדלוף

<u>תרגיל:</u> הוכח שהישר של זורגנפריי הוא לינדלוף.

<u>טענה</u> יהי X מ"ט, $Y\subset X$ סגורה אז Y הוא

גם לינדלוף

טענה נניח ש $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כיסוי פתוח של Y אזי

$$\forall\alpha \quad V_\alpha = Y\cap V_\alpha$$

V_α פתוחה ב-X Y סגורה ולכן $X-Y$

פתוחה ולכן

$$\{X-Y,\ V_\alpha \mid \alpha\in A\}$$

הוא כיסוי של X ואפשר להוציא ממנו

תת-כיסוי בן-מניה $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ואז

$$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

יהיה כיסוי בן מניה של Y.

טענה רגולרי + לינדלוף $\Leftarrow$ נורמלי

הוכחה יהי X מ"ט רגולרי + לינדלוף יהיו A,B סגורות

זרות ב-X X רגולרי ולכן

$$\forall a\in A \quad \exists V_a \quad \overline{V_a}\cap B=\emptyset \quad \text{(תרגיל)}$$

$$\forall b\in B \quad \exists V_b \quad \overline{V_b}\cap A=\emptyset$$

A הוא לינדלוף כי הוא סגור, לכן

$\{V_a\}_{a\in A}$ כיסוי של A ולכן קיים

$V_1 \dots V_n \dots$

המכסות את A, וכן קיים

$$\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$$

כיסוי בן-מניה של B.

נגדיר $S_1=V_1 \quad T_1=V_1-\overline{S_1}$

$S_2=V_2-\overline{T_1} \quad T_2=V_2-\overline{S_1\cup S_2}$

$S_3=V_3-\overline{(T_1\cup T_2)} \quad T_3=V_3-\overline{(S_1\cup S_2\cup S_3)}$

קל לראות ש

S_i, T_i פתוחות $\forall i$

נכון נגדיר $S=\bigcup S_i$ $T=\bigcup T_i$

מתקיים ש $S\cap T=\emptyset$ וגם $A\subseteq S$ ו $B\subseteq T$

כך ש S,T פתוחות. לכן X נורמלי.

מש"ל.

<u>טענה</u>: הישר של זורגנפרי הוא נורמלי.

<u>משפט</u> תהי $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ משפחה בת מנייה של מ"מ מטריזביליים כך של X_i המטריקה ρ_i נניח ש ρ_i חסומות ע"י 1 נגדיר

$$X=\prod_{i=1}^{\infty} X_i$$

הטופולוגיה של טיכונוף. אז X מטריזבילי.

<u>הוכחה</u> נגדיר

$$\rho: X\times X\to\mathbb{R}$$

כך

$$(x,y)\mapsto\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\rho_i(\pi_i(x),\pi_i(y))}{2^i}$$

קל לראות ש ρ מטריקה על X תהי τ_ρ הטופולוגיה המוגדרת ע"י המטריקה. יהי $x\in X$ אז סביבה בסיסית בטופולוגיה של טיכונוף היא

$$V=\prod_{i=1}^{n}V_{\rho_i}(x_i,\epsilon_i)\times\prod_{n+1}^{\infty}X_i$$

כאשר V_{ρ_i} הם כדורים ב X_i

ניקח

$$\epsilon=\min\left\{\frac{\epsilon_i}{2^i}\,\middle|\,1\le i\le n\right\}$$

ונגדיר

$$V_{\rho}(x,\epsilon)=\{y\in X \mid \rho(x,y)<\epsilon\}$$

נקח $y\in V_\rho(x,\epsilon)$ אז

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{2^i}<\epsilon$$

ולכן

$$\frac{\rho_i(x_i,y_i)}{2^i}<\epsilon\le\frac{\epsilon_i}{2^i}$$

לכל i ולכן

$$V_\rho\subset V$$

ולכן הטופולוגיה T_ρ יותר עדינה מהטופולוגיה של המכפלה.

כעת יהי $x\in X$, $\epsilon>0$ נבחר N גדול כך ש

$$\sum_{N+1}^{\infty}\frac{1}{2^i}<\frac{\epsilon}{2}$$

$$U^*=\prod_{i=1}^{N}V_{\rho_i}\left(x_i,\frac{\epsilon}{2N}\right)\times\prod_{i=n+1}^{\infty}X_i$$

U^* היא סביבה של x בטופולוגיה של המכפלה
והיא כלולה ב $V_\rho(x,\epsilon)$ ולכן
הטופולוגיה של המכפלה יותר עדינה מ T_ρ.
לכן שתיהן שוות. ולכן $\prod X_i$ מטריזבילי.

דוגמה: $\mathbb{R}^{\aleph_0}$ המרחב של סדרות (ממשיות) עם מ.ת.
$[0,1]^{\aleph_0}$ הקוביה של הילברט

שאלה: הקוביה של הילברט מטריזבילית.

טענה: מכפלה של מרחבי האוסדורף שכל אחד
מהם מכיל לפחות 2 נקודות היא ספרבילית
אמ"ם כל אחד מהגורמים הינו ספרבילי
ומספר הגורמים למכפלה קטן שווה $\aleph$

טענה: ~~מרחב T~~ עבור מרחב T_1 שקולות:

1. X הינו ספ$_2$ ורגולרי
2. X הינו ספרבילי ומטריזבילי
3. X ניתן לשיכון ב $I^{\aleph}$

(משפט המטריזציה של אוריסון)

הוכחה: $(1)\Rightarrow(3)$ X הינו ספ$_2$ ולכן הינו לינדלוף
הוא גם רגולרי, ולכן הוא נורמלי
הוא ספ$_2$ ולכן יש לו בסיס B בן-מנייה
לקבוצות הפתוחות. נגדיר

$$A=\{(U,V)\mid(U,V\in B)\wedge(\overline{U}\subset V)\}$$

A אינה ריקה כי X נורמלי ולכן
לכל $(U,V)\in A$ $\overline{U}$ סגורה, $X-V$ סגורה,
ולכן לפי הלמה של אוריסון קיימת
$F_{(U,V)}:X\to[0,1]$ כך ש $F_{(U,V)}(\overline{U})=\{0\}$, $F_{(U,V)}(X-V)=\{1\}$, ו-F רציפה
נגדיר

$$F=\{F_{(U,V)}\mid(U,V)\in A\}$$

F הינו לכל היותר בת-מנייה, וכן הוא
מפריד נקודות מסגורות (תרגיל)
X הוא מרחב T_1 (מהנתון). נתבונן ב

$$\prod_{F\in F} I_F$$

כאשר $I_F=[0,1]$ נגדיר $e:X\to\prod I_F$ ש המוגדרת

$$(e_x)_f = f(x)$$

והעתקה היא שיכון של X לתוך $\prod I_f$ כאשר

$$\prod_{f\in F} I_f = I^{\aleph_0}$$

וקיבלנו משפט.

③ $\Leftarrow$ ② $I^{\aleph_0}$ הוא ספרבילי ומטריזבילי ולכן כל ת"מ שלו הוא כנ"ל לכן X ספרבילי ומטריזבילי.

② = ① טריויאלי.

הגדרה: מ"ט X יקרא קומפקטי אם לכל כיסוי פתוח שלו יש תת-כיסוי סופי.

הגדרה: מ"ט X יקרא קומפקטי בן מניה אם מכל כיסוי בן מניה שלו יש תת-כיסוי סופי.

טענה: מ"ט הוא קומפקטי אמ"מ הוא קומפקטי בן מניה ולינדלוף.

הגדרה: מ"ט X יקרא קומפקטי סדרתי אם מכל סדרה במרחב ניתן לחלץ תת-סדרה מתכנסת.

דוגמא: $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הרגילה אינו קומפקטי.

דוגמא: $[0,1]$ בטופולוגיה הרגילה הוא קומפקטי.

הגדרה: יהי X מ"ט, $\mathcal{A} \subset P(X)$ ל-$\mathcal{A}$ יש תכונת החיתוך הסופי אם כל חיתוך של מספר סופי של איברים ב-$\mathcal{A}$ אינו ריק.

טענה: מ"ט X קומפקטי אמ"מ לכל משפחה של סגורות בעלת תכונת החיתוך הסופי, החיתוך של המשפחה אינו ריק.

הוכחה: $\Leftarrow$ יהי X מ"ט קומפקטי ויהי $\{F_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של סגורות בעלת תכונת החיתוך הסופי

כך ש $\bigcap_{q\in A} F_q = \phi$ (בשלילה). תכונה $D_q = F_q^c$ פתוחות

המכסות את X ולכן יש $\{D_q\}$ תת כיסוי סופי,

ולכן המשלימים של תת-הכיסוי הסופי היא

קבוצה סופית של סגורות $\{F_q\}$ שהחיתוך

שלהם ריק.

(ב) יהי X מ"ט שבו לכל משפחה של סגורות

בעלת תכונת החיתוך הסופי חיתוך המשפחה

אינו ריק. נניח X לא קומפקטי אז

קיים כיסוי $\{D_q\}$ שאין לו תת-כיסוי סופי.

תהי $\{F_q\}$ משפחת המשלימים של D_q.

ל-D_q יש את תכונת החיתוך הסופי

ולכן $\bigcap_{q\in A} F_q \neq \phi$ ולכן $\bigcup_{q\in A} D_q \neq X$ סתירה.

לכן X קומפקטי.

מ.ש.ל.

טענה: אם X קומפקטי אזי לכל רשת יש

נקודת גבול חלקית.

הוכחה: (א) נניח ש X קומפקטי ו $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ רשת

ב-X נגדיר

$$S_\lambda = \{x_\mu \mid \mu \geq \lambda\}$$

נתבונן ב- $\{\overline{S_\lambda}\}_{\lambda\in\Lambda}$ זוהי משפחה של סגורות

בעלת תכונת החיתוך הסופי X

קומפקטי ולכן $\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{S_\lambda}\neq\phi$ כלומר קיים

$x\in\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{S_\lambda}$ תהי U_x סביבה של x אז:

$U_x\cap \overline{S_\lambda}\neq\phi$ $\forall\lambda$ ולכן $\{\forall U_x\ U_x\cap S_\lambda\neq\phi\}$ לכן

לכל λ קיים λ_0 כך ש $\lambda_0\geq\lambda$ כך ש $x_{\lambda_0}\in U_x$

ולכן x נקודת גבול חלקית של הרשת.

(ב) נניח כי ל-X לכל רשת יש גבול חלקי.

תהי F משפחה של סגורות ב-X עם תכונת החיתוך הסופי. תהי B משפחת כל החיתוכים הסופיים של איברי F. קל לראות שגם ל-B תכונת החיתוך הסופי, וגם $F\subset B$ וגם אם $b,c\in B$ אז $b\cap c\in B$. נכוון את B לפי יחס ההכלה:

$$(b\leq c)\Longleftrightarrow(c\subset b)$$

לכל $b\in B$ נבחר $x_b\in b$. זוהי רשת $\{x_b\}_{b\in B}$

לרשת כזו יש גבול חלקי x ~~מהרשת~~ מההגדרה. נניח $x_b\in b$ לכל b ונניח $c\geq b$ אז $x_c\in b$ כלומר לכל $c\geq b$ גם $x_c\in b$.

תהי U_x סביבה כל שהיא של x. ~~תהי~~

~~לכל $c\in B$ יש $b\geq c$ כך ש $x_b\in U_x$ אבל $x_b\in b$~~

~~לכן לכל b כלשהו אבל לכן~~

יהי $d\geq b$ כך ש $x_d\in U_x$ ואז גם $x_d\in b$

ולכן $U_x\cap b\neq\emptyset$. לכן x שייך לסגור של b

אבל $b=\bar{b}$ ולכן $x\in b$. לכן

$$x\in\bigcap_{b\in B} b$$

ולכן X קומפקטי.

<u>הגדרה</u>: $A\subset X$ תיקרא קומפקטית אם היא קומפקטית כתת מרחב של X

<u>משפט</u>: קבוצה $A\subset X$ היא קומפקטית אם"ם מכל כיסוי שלה ב-X אפשר להוציא תת כיסוי סופי.

טענה $A\subset X$ סגורה, X קומפקטי אז A קומפקטית.

הוכחה

טענה יהי X מ"ט האוסדורף, $A\subset X$ קומפקטית אזי A סגורה

הוכחה תהי $a\in\bar{A}$ אזי יש רשת $\{x_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}\subset A$ כך ש $x_\lambda\xrightarrow{X} a$ היות ש-A קומפקטית יש לה גבול חלקי ב-A, b. במרחב האוסדורף יש לרשת רק גבול אחד ולכן $a=b$ ולכן $a\in A$. לכן A סגורה.

טענה תמונה של מרחב קומפקטי ע"י f רציפה היא קומפקטית.

הוכחה יהי X קומפקטי, $f:X\xrightarrow{על}Y$ רציפה. יהי $\{V_\alpha\}_{\alpha\in A}$ כיסוי פתוח של Y אזי $\{f^{-1}(V_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ היא משפחה של פתוחות ב-X המהווה כיסוי של X, X קומפקטי ולכן יש לכיסוי תת-כיסוי סופי. נתבונן את התת-כיסוי סופי של Y, ונקבל תת-כיסוי סופי של מ.ש.ל.

טענה אם $f:X\to Y$ רציפה, Y האוסדורף, X קומפקטי, אזי f היא העתקה סגורה

הוכחה תהי $F\subset X$ סגורה אזי היא קומפקטית אזי $f(F)$ היא קומפקטית ב-Y, ולפי טענה קודמת היא סגורה

טענה יהי X קומפקטי, Y האוסדורף, $f:X\xrightarrow[על]{1-1}Y$ רציפה אזי f הומיאומורפיזם

הגדרה תהי X קבוצה, $\leq$ יחס על X. היחס יקרא יחס סדר חלקי אם הוא רפלקסיבי, טרנזיטיבי, ואנטי סימטרי

הגדרה יחס סדר מלא או ליניארי הוא יחס סדר חלקי שבו

$$\forall a,b\in X\ (a\le b)\vee(b\le a)$$

טענה יהי X קבוצה סדורה חלקית. אזי קיימת $S\subset X$ סדורה ליניארית לסדר המושרה כך שלכל T סדורה ליניארית לסדר המושרה

(עקרון האוסדורף) $S\subset T\subset X \Longrightarrow S=T$

הוכחה זה נובעת מאקסיומת הבחירה

טענה (1) תהי X קבוצה, $A\subset P(X)$ שיש לה תכונת החיתוך הסופי אזי קיימת משפחה B בעלת תכונת החיתוך הסופי כך ש $A\subset B$ והיא מקסימלית ביחס לתכונת החיתוך הסופי

(2) ל B הנ"ל יש התכונות: (1) חיתוך סופי של איברים מ B הוא ב-B. (2) אם קבוצה C חותכת כל איבר מ B אזי $C\in B$

הגדרה לספרות

טענה (משפט טיכונוף) מכפלה לא ריקה של מ"ט (לא) קומפקטיים אמ"מ כל גורם הוא קומפקטי.

הוכחה (⇐) תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ מ"ט, $\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$ קומפקטי נתבונן ב

$$\pi_\alpha : X\to X_\alpha$$

π_α היא רציפה ועל, לכן X_α קומפקטי

(⇒) תהיינה $\{X_\alpha\}_{\alpha\in A}$ משפחה של מ"ט קומפקטיים

נסמן $X=\prod_{\alpha\in A} X_\alpha$. תהי A קבוצה של קבוצות ב X שיש לה תכונת החיתוך הסופי. לפי הטענה הראשונה קיימת B

כך יש $\mathcal{B}$ מקסימלית המכילה את $\mathcal{A}$.
תהי $\alpha\in\Delta$ נתבונן ב

$$\mathcal{B}_\alpha=\{\pi_\alpha(B)\mid B\in\mathcal{B}\}$$

זוהי משפחה של קבוצות חלקיות ל X_α
קל לראות של $\mathcal{B}_\alpha$ תכונת החיתוך הסופי
~~קומפקטי לכן X_α~~ נסמן

$$\mathcal{B}^*_\alpha=\{\overline{\pi_\alpha(B)}\mid B\in\mathcal{B}\}$$

שגם את תכונת החיתוך הסופי, היא משפחה של סגורות ב X_α קומפקטי ולכן החיתוך שלה אינו ריק

$$\emptyset\neq\bigcap\mathcal{B}^*_\alpha$$

אז נבחר $x_\alpha\in\bigcap_{B\in\mathcal{B}}\overline{\pi_\alpha(B)}$ מכאן אם $x_\alpha\in U\subset X_\alpha$
פתוחה אז $\forall B\in\mathcal{B}\quad \emptyset\neq U\cap\pi_\alpha(B)$
בחירה זאת ניתנת לעשות לכל α. נתבונן בנקודה $x\in X$ שהקואורדינטות שלה הן x_α.
תהי $x_\alpha\in U\subset X_\alpha$ פתוחה אז היא חותכת כל אחד מ $\pi_\alpha(B)$ כלומר $\forall B\in\mathcal{B}\quad \pi_\alpha^{-1}(U)\cap B\neq\emptyset$ לפי התכונה השניה בטענה הקודמת נקבל ש $\pi_\alpha^{-1}(U)\in\mathcal{B}$ מכאן לפי הטענה שוב נקבל שחיתוך סופי של קבוצות מהצורה $\pi_{\alpha_i}^{-1}(V_i)$ שייך ל $\mathcal{B}$. מכאן, ל $\mathcal{B}$ יש בסיס מסביבות הסביבות של x כלומר, כל סביבה בסיסית של x חותכת כל איבר של $\mathcal{B}$ בפרט כל איבר של $\mathcal{A}$ לכן x היא נקודת סגור של איבר של כל איבר ל $\mathcal{A}$ ~~מש~~ אלא $\mathcal{A}$ מכל

רק סגורים לכן $x \in A$ לכן $\forall A \in \mathcal{A}$ התיתוך $\bigcap_{A\in\mathcal{A}} A$
אינו ריק, לכן X קומפקטי.

מש.ל

<u>טענה</u> כל קבוצה היא קומפקטית.

<u>טענה</u> ~~[illegible]~~ קומפקטי + T_2 ⇐ T_4

~~הערה~~ ~~[illegible]~~ צריך להוכיח ש X
רגולרי, קומפקטי ⇐ לינדלוף + רגולרי ⇐ נורמלי

T_4 ⇐ נורמלי + T_1 ⇐ T_2

<u>טענה</u> עבור מ"ט X שקולים:

(1) X הוא טיכונוף ($T_{3\frac{1}{2}}$)

(2) X הומאומורפי לתת מ"ט של קוביה

(3) X הומאומורפי לתת מ"ט של מ"ט קומפקטי וT_2

(4) X הומאומורפי לתת מ"ט של מ"ט T_4

<u>הגדרה</u> מ"ט X יקרא לוקלי קומפקטי או קומפקטי מקומי, אם לכל $x \in X$ קיים בסיס למערכת הסביבות של x שכל סביבה היא קומפקטית.

<u>טענה</u> לוקלי קומפקטי + T_2 ⇐ רגולרי

~~[illegible]~~

<u>תכונות</u> (1) (תרגיל) האוסדורף הוא קומפקטי מקומי אם"ם לכל נקודה קיימת סביבה קומפקטית.

(2) כמו רחב מעלי קומפקטי ⟺ קומפקטי קו-מנייה

(3) יהי X מ"ט קומפקטי קו-מנייה, $f: X \to \mathbb{R}$ רציפה ~~אזי~~ אזי f חסומה

(4) תן דוגמאות של תת"ק קומפקטיות

של הישר של צורנכרי.

<u>טענה</u> קומפקטי + T_2 $\Leftarrow$ קומפקטי מקומי

<u>טענה</u> $\mathbb{R}$ בטופולוגיה הרגילה הוא קומפקטי מקומי

<u>טענה</u> $\mathbb{Q}$ בטופולוגיה הרגילה אינו קומפקטי מקומי

<u>טענה</u> יהי X מ"ט קומפקטי מקומי, $f: X \to Y$ רציפה ופתוחה

אז: Y הוא גם קומפקטי מקומי

<u>הוכחה</u> יהי $y \in Y$, V סביבה של y יהי $x \in X$

כך ש $f(x)=y$ f רציפה ולכן קיימת U פתוחה

המכילה את x כך ש $f(U) \subset V$ X לוקל'

קומפקטי ולכן קיימת K קומפקטית $x \in K \subset U$

לכן $f(K) \subset V$ f רציפה ולכן

$f(K)$ קומפקטית וגם $f(K)$ היא גם סביבה

של Y כי f פתוחה.

<u>טענה</u> תהי $\{X_\alpha\}_{\alpha \in A}$ משפחה של מ"ט לא ריקים אז:

$X=\prod_{\alpha \in A} X_\alpha$ אמ"מ כל אחד מה X_α הוא קומפקטי

מקומי ופרט למספר סופי של אינדקסים

X_α הם קומפקטיים.

<u>הוכחה</u> $(\Leftarrow)$ נניח X קומפקטי מקומי. π_α

רציפה ופתוחה ולכן X_α קומפקטי מקומי.

מנגד יהי $x \in X$, $W \subset X$ סביבה קומפקטית

של x W סביבה ולכן היא מכילה

סביבה בסיסית:

$$\pi_{\alpha_1}^{-1}(U_{\alpha_1}) \cap \pi_{\alpha_2}^{-1}(U_{\alpha_2}) \cap \dots \cap \pi_{\alpha_n}^{-1}(U_{\alpha_n})$$

כאשר U_{α_i} פתוחה וסביבה של X_{α_i}

עבור $\alpha \notin \{\alpha_i\}_{i=1}^{n}$ מתקיים כי $\pi_\alpha(W)=X_\alpha$ ולכן

X_α קומפקטי (כי π_α רציפה)

$(\Rightarrow)$ צ"ל:

__הגדרה__ יהי מ"ט X קומפקטי מקומי $+T_2$ נגדיר לו נקודה נוספת ∞. נקבל X^* לכל $x\in X$ ניקח בסיס לסביבות את הסביבות שהיו קודם. ל-∞ ניקח בסיס לסביבות את

$$\{(X-K)\cup\{\infty\} \mid K \text{ קומפקטי ב-} X\}$$

__טענה__ X^* הוא ~~מטרי~~ מ"ט.

__טענה__ X^* הוא קומפקטי

__הוכחה__ כל כיסוי פתוח ל-X^* מכסה את ∞ ולכן מכיל קבוצה פתוחה המכילה סביבה של ∞.

__טענה__ X פתוח בתוך X^*

__טענה__ X ~~קומפקטי~~ צפוף ב-X^*

__הגדרה__ X^* הקומפקטיפיקציה של אלכסנדרוב

__טענה__ X^* הוא T_2

__מסקנה__ קומפקטי מקומי + האוסדורף $\Leftarrow$ טיכונוף

__הוכחה__ X^* קומפקטי $+T_2 \Rightarrow T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}}$ תורש $X\subset X^*$ הוא $T_{3\frac{1}{2}}$ גם כן.

__דוגמה:__ נתבונן ב-X שווה ל-ℓ_2

$$X=\left\{(x_k)_{k=1}^{\infty} \;\middle|\; \sum_1^{\infty} x_k^2<\infty\right\}$$

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_1^{\infty}(x_k-y_k)^2}$$

מ"ט זה אינו קומפקטי מקומי

__דוגמה__ המישור של מור אינו קומפקטי מקומי

__תרגיל__ הישר של זורגנפריי אינו קומפקטי מקומי

טופולוגיה תרגיל 8

1. הראה שהישר של Sorgenfrey הוא רגולרי

2. הוכח שהמישור הרציונלי לא נורמלי

3. תת-מרחב כלשהוא של מרחב T_4 אינו חייב להיות T_4 (נמק).

4. הוכח: יהא מרחב מטרי X שקולים:

א) X הוא α_2

ב) X הוא Lindelöf

ג) X הוא ספרבילי

דינה קרבמן

תרגיל טופולוגיה

1) תהי x נקודה ~~[illegible]~~ על הישר ו-F סגורה שאינה מכילה את x אז קיים $\epsilon>0$ כך ש ~~$x\in\epsilon$~~

$$(x-\epsilon, x+\epsilon)\cap F=\emptyset$$

אם אין קט"ע. נניח לא קיים ϵ כזה. נניח קיימת סדרה של נקודות ב-F השואפת ל-x מימין. אז כל סביבה קטנה של x חותכת את F ולכן $x\in\bar F$ אבל $\bar F=F$ ולכן $x\in F$ סתירה. לכן לא קיימת סדרה כזאת. לכן קיים $\epsilon>0$ כך ש $\emptyset=[x,x+\epsilon)\cap F$ אז

$$(-\infty, x)\cup[x+\epsilon,\infty)$$

היא פתוחה המכסה את F ואינה חותכת את $[x,x+\epsilon)$ שאינו מכוסה המכסה זה x.

2) א) ק

דביר קהמן   תרגיל טופולוגיה

1 (ב) אם X הוא קומפקטי מקומי אז בדיוק שלכל נקודה בו יש סביבה קומפקטית.

(ב) יהי X מרחב T_2 כך שלכל נקודה יש סביבה קומפקטית.

תהי $x \in X$ ותהי $x \in A \subset X$ סביבה קומפקטית של x. A קומפקטית ו-X הוא T_2 ולכן A סגורה. תהי V סביבה כלשהי של x אז היא מכילה פתוחה D המכילה את x.

A סגורה ו-D פתוחה ולכן $A-D$ סגורה ב-X. אם $A-D=\phi$ אז $A \subseteq D$ וסיימנו. אחרת לכל נקודה ב-$A-D$ נתאים קבוצה פתוחה ב-A המכילה אותה ושאינה חותכת קבוצה פתוחה אחרת כלשהי המכילה את x. (דבר אפשרי כי X הוא T_2). משפחת הפתוחות שהגדרנו מהווה כיסוי פתוח של $A-D$, $A-D$ הוא סגורה ב-A שהינו קומפקטי ולכן קומפקטית בעצמה ולכן יש ל-$A-D$ תת-כיסוי סופי: $\{W_i\}_{i=1}^{n}$. נגדיר:

$$B=A-\bigcup_{i=1}^{n} W_i$$

B היא קבוצה סגורה חלקית ל-D וחלקית ל-A ולכן היא קומפקטית. מהגדרת W_i ברור ש-B היא סביבה של x, ולכן לכל סביבה של x יש סביבה קומפקטית המוכלת בה. לכן X קומפקטי מקומי.

מ.ש.ל.

(ג) אם מרחק מטרי הוא קומפקטי אז הוא ברור קומפקטי בן-מנייה.

(2) נניח כי X אינו קומפקטי. אז קיימת לו סדרה $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ שאין לה גבול חלקי. נגדיר

$$F_n=\{x_k \mid k>n\}$$

$\rho(x_1,F_1)>0$ כי אחרת x_1 היה גבול חלקי של (x_n). לכן אפשר להגדיר:

$$\epsilon_1=\rho(x_1,F_1)/2$$

$$B_1=B(x_1,\epsilon_1)$$

כעת נניח הגדרנו את $B_1..B_n$ כך שלכל $i\neq j$, $B_i\cap B_j=\emptyset$, ולכל $i\le n$ $0<\rho(B_i,F_i)$

נגדיר כעת

$$\epsilon'_{n+1}=\min\{\rho(x_{n+1},B_i) \mid 1\le i\le n\}\cup\{\rho(x_{n+1},F_{n+1})\}$$

$\epsilon'_{n+1}>0$ כי אחרת x_{n+1} הוא גבול חלקי של (x_n). נגדיר $\epsilon_{n+1}=\epsilon'_{n+1}/2$, $B_{n+1}=B(x_{n+1},\epsilon_{n+1})$ כעת קל לראות שלכל $i\neq j$ בין 1 ל $n+1$ $B_i\cap B_j=\emptyset$, ולכל $i\le n+1$ $0<(\rho(B_i,F_i))$.

נגדיר גם:

$$B_0=X-\bigcup_{i=1}^{\infty}\overline{B(x_i,\frac{\epsilon_i}{2})}$$

קל לראות ש $\{B_i\}_{i=0}^{\infty}$ מהווה כיסוי בן מניה של X, ושאין לו תת-כיסוי סופי. לכן X אינו קומפקטי בן-מניה.

מ.ש.ל.

(3) נניח ש f אינה חסומה. בה"כ היא אינה חסומה מלעיל. נבחר $x_1\in X$ כלשהו. כעת נניח לקחנו

$x_1 \dots x_n$ כך שלכל $i<n$ $F(x_i)+1<F(x_{i+1})$

F אינה חסומה ולכן אפשר לבחור $x_{n+1}\in X$

כך ש $F(x_n)+1<F(x_{n+1})$ נגדיר כעת

$$R_i=\begin{cases}(-\infty,F(x_2)) & i=1\\ (F(x_{i-1}),F(x_{i+1})) & i>1\end{cases}$$

קל לראות ש R_i הוא כיסוי של $\mathbb{R}$

ולכן $D_i=F^{-1}(R_i)$ הוא כיסוי של X.

נניח של $\{D_i\}$ יש תת-כיסוי סופי של X,

$\{D_{i_k}\}_{k=1}^{n}$ נסמן $r=\max\{i_k\}_{k=1}^{n}$ ואז קל לראות:

$$x_{r+1}\notin \bigcup_{k=1}^{n} D_{i_k}=X$$

סתירה לכן ל $\{D_i\}$ אין תת-כיסוי סופי, לכן X אינו קומפקטי קו-מניה. לכן אם X קומפקטי קו-מניה אז F חסומה.

מ.ש.ל.

(4) נרצה למצוא את הקבוצה

$$A=\overline{\left\{\frac{1}{n}\,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}}$$

כל כיסוי של A מכיל קבוצה המכילה את 0, ולכן גם את הקטע $(0,\epsilon)$ כש $\epsilon>0$ (מהגדרת סביבה של הישר של זורגנפריי) ולכן את כל איברי A פרט למספר סופי. לכן לA יש תת-כיסוי סופי, לכן A קומפקטית בישר.

טענה: מ"ט הוא קומפקטי אמ"מ לכל משפחה של תתי-קבוצות סגורות שיש לה את תכונת החיתוך הסופי אז

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=1}^{\infty} F_i$$

הגדרה: יהי X מ"ט קומפקטיפיקציה של X הוא זוג (K,φ) כאשר K מ"ט קומפקטי, φ שיכון של X ל-K כך ש-$\varphi(X)$ צפוף ב-K.

טענה: הקומפקטיפיקציה של אלכסנדרוב היא קומפקטיפיקציה.

הגדרה: קומפקטיפיקציית האוסדורף היא קומפקטיפיקציה שבה K הוא האוסדורף.

טענה: אם ל-X קומפקטיפיקציית האוסדורף אז X הוא טיכונוף.

תזכורת: יהי X מ"ט טיכונוף. לכל $f\in C^*(X)$ נגדיר I_f הטווח של f וע'

$$\varphi: X \longrightarrow \prod_{f\in C^*(X)} I_f$$

המוגדרת

$$\left[\varphi(x)\right]_f = f(x)$$

היא שיכון של X לתוך $\prod_{f\in C^*(X)} I_f$

יהיה

$$\varphi(X) \subset \prod_{f\in C^*(X)} I_f$$

נסמן

$$\overline{\varphi(X)} = \beta X$$

βX הוא תת-קבוצה סגורה ולכן קומפקטית של $\prod I_f$ (כי $\prod I_f$ קומפקטי), X צפוף ב-βX. אז:

βX היא קומפקטיפיקציה של X [illegible]

הקומפ' של stone-čech

טענה: יהי X מ"ט טיכונוף ו- $p:X\to K$ רציפה כאשר K קומפקטי האוסדורף. אזי קיימת

$$F:\beta X\to K$$

רציפה כך ש $F\circ e=p$

הוכחה: רעיון ה (לא נדרש)

$$\varphi:K\to\prod_{g\in C^*(K)} I_g$$

נגדיר $H:\prod_{f\in C^*(X)} I_f\to\prod_{g\in C^*(K)} I_g$ (ע"י ההרכבה). מוגדרת. לכל $t\in\prod I_f$

$$t\mapsto$$

$$[H(t)]_g=t_{g\circ p}$$

כלומר

$$(\pi_g\circ H)(t)=\pi_{g\circ p}(t)$$

$\pi_{g\circ p}$ רציפה ולכן $\pi_g\circ H$ רציפה

ולכן H רציפה.

יהי $x\in X$ אזי

$$[H(e(x))]_g=[e(x)]_{g\circ p}=(g\circ p)(x)=[\varphi(p(x))]_g$$

מכאן

$$H(e(x))=\varphi(p(x))$$

ומכאן

$$H(e(X))\subset\varphi(K)$$

$e(X)$ צפופה ב βX לכן $H(e(X))$ צפופה
ב $H(\beta X)$ (רציפות H) $e(K)$ סגורה
ומכילה את $H(e(X))$ ולכן גם

$$H(\beta(X)) \subset e(K)$$

נגדיר העתקה $F:\beta X \to X$

$$F = e^{-1} \circ H|_{\beta X}$$

F רציפה העתקה

$$\forall x\in X \quad (F\circ e)(x) = e^{-1}(H(e(x))) = e^{-1}(e(f(x))) = f(x)$$

הערה (משפט הפרדוקס מצביע ש סטון ויירשטרס):

הגדרה $C_{\mathbb{R}}(X)$ משפחת כל הפונקציות הרציפות $f:X\to\mathbb{R}$ כאשר X קומפקטי ו-T_2

הגדרה

$$\|f\| = \sup_{x\in X} |f(x)|$$

הגדרה

$$\rho(f,g) = \|f-g\|$$

טענה $C_{\mathbb{R}}(X)$ עם ρ, $f_n \to f$ זו התכנסות במ"ש.

טענה $C_{\mathbb{R}}(X)$ מרחב לינארי

טענה $f,g \in C_{\mathbb{R}}(X) \Rightarrow fg \in C_{\mathbb{R}}(X)$

טענה $C(X)$ מכיל את כל הפולינומים

$$f\in C_{\mathbb{R}}(X) \Rightarrow a_0 f^n + a_1 f^{n-1} + \dots + a_n \in C_{\mathbb{R}}(X)$$

טענה

$$f,g\in C_{\mathbb{R}}(X) \Rightarrow \min(f,g)\in C_{\mathbb{R}}(X), \max(f,g)\in C_{\mathbb{R}}(X)$$

טענה (המשפט עצמו): יהי X מ"ט T_2 קומפקטי
ונניח כי A היא תת-אלגברה של $C_{\mathbb{R}}(X)$
המכילה את הקבועים ומפרידה בין נקודות
של X, אזי:

$$\bar{A} = C_{\mathbb{R}}(X)$$

טענה קיימת סדרה של פולינומים $\{u_n\}$ כך ש

$$u_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} \sqrt{t}$$

הוכחה: נגדיר $u_0=0$

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{2}(t-u_n^2(t))$$

נראה באינדוקציה כי $u_n(t)<\sqrt{t}$ אזי

$$\sqrt{t}-u_{n+1}(t) = \sqrt{t}-u_n(t)-\frac{1}{2}(t-u_n^2(t)) =$$

$$=[\sqrt{t}-u_n(t)][1-\frac{1}{2}(\sqrt{t}+u_n(t))]>$$

לכן $u_{n+1}(t)\geq u_n(t)$ u_n עולה וחסומה
ולכן $u_n\to v$ אזי

$$v(t)=v(t)+\frac{1}{2}[t-v^2(t)]$$

$$\Downarrow$$

$$v(t)=\sqrt{t}$$

כעת לפי משפט דיני $u_n \xrightarrow[{[0,1]}]{u} \sqrt{t}$

טענה יהי $f\in A$ אזי

$$|f|\in \bar{A}$$

הוכחה יהי $0\neq f\in A$ אזי $a=\|f\|>0$

ברור כי $\frac{f^2}{a^2}\leq 1$ ולכן $A\ni u_n\left(\frac{f^2}{a^2}\right)\to\frac{|f|}{a}$

טענת עזר: $f,g\in\bar{A} \Rightarrow \sup(f,g),\ \inf(f,g)\in\bar{A}$ לכן $|f|\in A$

כי $\inf$ ו$\sup$ ניתנו להגדרה בעזרת $\boxed{|f|}$

טענה יב: $x\neq y\in X$, $\alpha\neq\beta\in\mathbb{R}$ אז קיימת $f\in A$ כך ש

$$f(x)=\alpha,\ f(y)=\beta$$

הוכחה: קיימת g שמפרידה בין x לבין y:

$$f(t)=\alpha+\frac{\beta-\alpha}{g(y)-g(x)}\left(g(t)-g(x)\right)$$

עושה את העבודה.

טענה יג: $f\in C_{\mathbb{R}}(X)$ ו $x\in X$ ו $\epsilon>0$ אז קיימת $g\in\bar{A}$ כך ש $g(x)=f(x)$ לכל x, וגם

$$\forall y\in X\quad g(y)\leq f(y)+\epsilon$$

הוכחה: תהי $z\in X$ אז קיימת $g_z\in\bar{A}$ כך ש

$$g_z(x)=f(x)$$

$$g_z(z)\leq f(z)+\frac{\epsilon}{2}$$

X קומפקטי ולכן קיים כיסוי סופי מהכיסוי שנוצר ע"י

$$g_z^{-1}\left(\left(f(z),f(z)+\epsilon\right)\right)$$

עם $g_{z_1}\dots g_{z_n}$ נגדיר

$g(x)=\inf(g_1\dots g_n)$ וסיימנו.

הוכחת המשפט: תהי $f \in C_{\mathbb{R}}(X)$

אזי לכל $x \in X$ ולכל $\epsilon > 0$ קיימת

$g_x \in \bar{A}$ כך ש $g_x(x) = f(x)$, $g_x(y) \leq f(y) + \frac{\epsilon}{2}$ $\forall y \in X$

f, g_x רציפות ← לכל $x \in X$ קיימת U_x

סביבה של x כך ש

$$|g_x(y) - g_x(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

$$\forall y \in U_x$$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{\epsilon}{2}$$

מכאן

$$\forall y \in U_x \quad g_x(y) \geq g_x(x) - \frac{\epsilon}{2} \geq f(x) - \frac{\epsilon}{2} \geq f(y) - \epsilon$$

ולכן

$$f(y) - \epsilon \leq g_x(y) \leq f(y) + \frac{\epsilon}{2} \leq f(y) + \epsilon$$

כיון ש X קומפקטי ולכן יש לו תת כיסוי סופי

$$U_{x_1} \dots U_{x_n}$$

לכל i קיימת g_{x_i} כך ש

$$y \in U_{x_i} \Rightarrow g_{x_i} \in [f(y) - \epsilon, f(y) + \epsilon]$$

נסמן $\varphi = \sup(g_{x_1} \dots g_{x_n})$ כיון $\varphi \in A$

מכאן לכל $y \in X$

$$f(y) - \epsilon \leq \varphi(y) \leq f(y) + \epsilon$$

מכאן $\|f - \varphi\| < \epsilon$ ולכן $\varphi \in \bar{A}_0 = \bar{A}$

לכן

$$\bar{A} = C_{\mathbb{R}}(X)$$

דוגמא: תהי $E\subset\mathbb{R}^n$ קומפקטית ונ'
קבוצת הפולינומים זו היא תת־אלגברה
המפרידה בין נקודות של E, ולכן לפי
המשפט כל פונקציה רציפה מ־E ל־$\mathbb{R}$
ניתנת לקירוב במ"ש ע"י פולינומים.

דוגמא: ~~[illegible]~~ כית תהי $E=\{(x,y)|x^2+y^2=1\}$ נגדיר
A על E את האלגברה המושרית מ־$\mathbb{R}^2$
ו־A תהיה זה קבוצת כל הפונקציות
מהצורה

$$\sum_{-N}^{N} a_n e^{in\theta}$$

זו תת־אלגברה ויורשנו את הקירוב ע"י
פונקציות טריגונומטריה

חומר לקריאה:

הגדרה מרחב X יקרא לא קשיר אם קיימות קבוצות H,K פתוחות זרות לא ריקות כך ש

$$H\cup K=X$$

דוגמא הממשי קשיר (טופולוגיה הרגילה)

משפט תהי $f:X\to Y$ רציפה ועל כך ש X קשיר אזי Y קשיר.

הגדרה יהי X מרחב $H,K\subset X$ יקראו מופרדות אם

$$\bar{H}\cap K=\bar{K}\cap H=\emptyset$$

משפט X מרחב, $Y\subset X$, Y קשיר אמ"מ לא קיימות $\emptyset\neq H,K\subset Y$ מופרדות כך ש

$$Y=H\cup K$$

משפט אם $H,K\subset X$ מופרדות ו $Y\subset X$ קשירה ו $Y\subset H\cup K$ אזי $Y\subset H$ או $Y\subset K$.

משפט יהי X מרחב כך ש $X=\bigcup X_\alpha$ ו X_α קשירים ו $\bigcap X_\alpha\neq\emptyset$ אזי X קשיר.

משפט יהי X מרחב כך שלכל $x,y\in X$ קיימת $E_{xy}\subset X$ קשירה המכילה x ו y אזי X קשיר.

הוכחה נקבע a אז $X=\bigcup_{x\in X}E_{ax}$ ו $a\in\bigcap E_{ax}$ ולכן לפי המשפט הקודם X קשיר.

משפט יהי $X=\bigcup X_n$ כך ש $X_{n-1}\cap X_n\neq\emptyset$ וכך ש X_i קשיר אזי X קשיר.

הוכחה נגדיר

$$A_n=\bigcup_{i=1}^{n} X_i$$

קל לראות ש A_n קשירה וש $\bigcap A_n\neq\emptyset$ ולכן $X=\bigcup A_n$ קשיר.

טענה B קשיר.

טענה יהי X מ"ט, $E\subset X$ קשירה, $E\subset A\subset \bar{E}$

אזי A קשירה

טענה $\prod X_\alpha$ קשירה אמ"מ לכל α X_α קשיר

הגדרה יהי X מ"ט, $x,y\in X$ $f:[0,1]\to X$ רציפה

כך ש $f(x)=0$, $f(y)=1$ אזי f תקרא

מסילה בין x ל y

הערה אם f מסילה בין x,y ואם f^{-1}

רציפה אזי f תקרא קשת.

הגדרה מ"ט X יקרא קשיר מסילתי אם לכל $x,y\in X$

קיימת מסילה ביניהם

הגדרה מ"ט X יקרא קשיר קשתית אם לכל $x,y\in X$

קיימת קשת ביניהם

טענה קשיר מסילתית $\Leftarrow$ קשיר.

הוכחה נניח ~~X~~ לא קשיר אזי קיימות

~~$X=H\cup K$~~ H,K הפרדה נקח $x\in \cancel{A}$, $y\in K$

אזי קיימת $f:[0,1]\to X$ כך ש $f(x)=0$ ו

$f(y)=1$ נתבונן ב $f^{-1}(H)$, $f^{-1}(K)$

אזי $[0,1]$ אינו קשיר. סתירה. לכן X

קשיר

דוגמא: תהי

$$X=\{(x,0)\mid x\le 0\}\cup\{(x,\sin(1/x))\mid x>0\}$$

טופולוגיה המושרית מ $\mathbb{R}^2$

תהי $U=\{(x,\sin(1/x))\mid x>0\}$ U קשירה כי היא

תמונה רציפה f $(0,\infty)$

בנוסף

$$U\subset U\cup\{(0,0)\}\subset \bar{U}$$

ולכן $U\cup\{(0,0)\}$ קשירה ומכאן נקבל X

קשיר. אבל תהי $x=(-1,0)$, $y=(1,\sin 1)$ אז

קיים ~ מסילה קשירה לכן x לא קשיר מסילתית

1/11/94 טופולוגיה תרגיל 1

1) יהיה (X,d) מרחב מטרי ו- $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ פונקציה המקיימת: $f(t)=0 \iff t=0$, $f(s+t)\le f(s)+f(t)$.

(i) הוכח כי $(X,f(d))$ גם מרחב מטרי.

(ii) מצא מטריקה $d_1:X\times X\to[0,1)$ כך ש- $d(x_n,x)\to 0 \iff d_1(x_n,x)\to 0$. (רמז: אפשר לבחור f מתאים)

2) יהיו (X_k,d_k) מרחבים מטריים ו- $X=\prod_{k=1}^{n}X_k=\{x=(x_1,\dots,x_n): x_k\in X_k\}$.

הוכח כי הפונקציות הבאות הינן מטריקות על X:

$d_1(x,y)=\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)$, $d_2(x,y)=\max_{1\le i\le n}d_i(x_i,y_i)$, $d_3(x,y)=\left(\sum_{i=1}^{n}d_i(x_i,y_i)^2\right)^{\frac12}$

$$d_4(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2^i}\frac{d_i(x_i,y_i)}{1+d_i(x_i,y_i)}$$

3) יהיה $L(\mathbb{R})=\{f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}: \exists K \ni |f(x)-f(y)|\le K|x-y| \ \forall x,y\in\mathbb{R}\}$

(פונקציות המקיימות תנאי ליפשיץ' Lipschitz). עבור $f\in L$ יהיה

$K(f)=\inf\{K: |f(x)-f(y)|\le K|x-y| \ \forall x,y\}$. הוכח כי $d_0(f,g)=K(f-g)$ מהווה סמי-מטריקה

על L וכי $d_0(f,g)=0 \iff f-g$ קבוע. הוכח $d(f,g)=K(f,g)+|f(0)-g(0)|$

מהווה מטריקה על L

4) יהיה $1<p\in\mathbb{N}$ מספר ראשוני. עבור $0\ne k\in\mathbb{Z}$ יהיה $t(k)$

המספר הטבעי היחיד כך ש $p^t|k$ ו- $p^{t+1}\nmid k$.

נגדיר, עבור $m,n\in\mathbb{Z}$: $d_p(m,n)=\begin{cases}0 & m=n\\ 1/p^{t(m-n)} & m\ne n\end{cases}$

א) הוכח כי d_p מטריקה על $\mathbb{Z}$. (רמז: $t(m-n)\ge\min\{t(m-k),t(k-n)\}$ לכל m,n,k)

ב) מצא $B(0,1)$, $B(0,\frac{1}{p})$, $B(0,\frac{1}{p^\nu})$.

5) נגדיר $d_0,d_1:[0,1]^2\to[0,\infty)$ ע"י $d_0(s,t)=|\sin\pi(s-t)|$, $d_1(s,t)=\min\{|s-t|,1-|s-t|\}$.

א) הוכח כי d_0,d_1 מטריקות על $[0,1)$. ב) מצא $\pi:[0,1)\to\mathbb{R}^2$

כך ש $d_0(s,t)=\|\pi(s)-\pi(t)\|_2$. ג)* האם יש איזומטריה של $([0,1),d_1)$

לתוך $\mathbb{R}^k$?

6*) הוכח כי אם $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ איזומטריה אזי קיימת $\beta\in\mathbb{R}^2$, A מטריצה $AA^t=I$

כך ש $f(x)=Ax+\beta$.

6**) $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ 1-1 $f(\text{line})=\text{line} \Rightarrow f$ ~~לינארי~~ אפיני.