משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 4 לינואר 1996

1. לחקור הורונסקיין של $y''+P(x)y'+Q(x)y=0$ ולראות דוגמאות של $y''+y=0$

2. פתרון בעזרת טורי-חזקות. עקרונית, ניתן שיטה כללית ($y''=F(x,y,y')$) בפועל רק מספר סוגי מש' מסויימים נוחים לפתרון בשיטה זו.

3. המשוואה הינה:

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)y'+R(x)y$$

כאשר P,Q,R פולינומים

דוגמאות:

$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$ משוואת בסל (מופיעה בבעיות עם סימטריה גלילית)

$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ לז'נדר, סימטריה ספרית.

$y''-2xy'+\lambda y=0$ הרמיט, מצבי היסוד של מתנד הרמוני קוונטי; אטום המימן.

נקודה רגולרית x_0: נניח למשל, כי $P(x)$ בסביבת x_0 $\overset{בפרט}{\Longleftrightarrow}$ $P(x_0)\neq 0$

<u>דוגמאות</u> 1. $y''+y=0$ סביב $x_0=0$, מחפשים $y=\sum a_n x^n$

2. משוואת Airy: $y''=xy$ סביב $x=0$

$(n+2)(n+1)a_{n+2}=a_{n-1}$ וכן $a_2=0$.

$$y=a_0\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot4\cdot7\cdots x^{3n}}{(3n)!}\right)+a_1\left(x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2\cdot5\cdot8\cdot11\cdots x^{3n+1}}{(3n+1)!}\right)$$

3. משוואת הרמיט $y''-2xy'+\lambda y=0$ סביב $x=0$. אם $\lambda=2n$ אז

פתרון פולינומיאלי

<u>הגדרה</u> פונקציה $f(x)$ אנליטית בנקודה אם טור טיילור שלה מתכנס אליה בסביבת הנקודה.

<u>משפט</u> (ללא הוכחה) אם $\frac{Q}{P}$, $\frac{R}{P}$ אנליטיות ברדיוס r, אזי טור

משפט (ללא הוכחה) אם $\frac{Q}{P}$ ו-$\frac{R}{P}$ אנליטיות בעיגול ברדיוס r, אזי לפי
[illegible] המתקבל ~~הזה~~ מתכנס לפתרון באותו העיגול.

הגדרת רדיוס התכנסות - סביב נקודה x_0

משפט $\sum a_n(x-x_0)^n$ רדיוס התכנסות R כאשר $R^{-1}=\lim|a_n|^{1/n}$ (אם קיים)

דוגמה $\frac{1}{1-x^2}$ לגבי $x=0$

$\frac{1}{2-2x+x^2}$ לגבי $x=1$ או $x_0=0$

משפט לכל הפונקציות האנליטיות הרחבות לתחום המספרים המרוכבים.
רדיוס ההתכנסות סביב x_0 של פונקציה אנליטית שווה
למרחק המינימלי בין x_0 לנקודה במרוכבים שבה
f לא מוגדרת.

דוגמה פונקציות לינאר מתכנסות לפחות ברדיוס 1.

דוגמה הפוכה: משוואת קצב הגידול של מספרי פיבונצ'י.

generelized Bessel:

$$x^2y''+(1-2s)xy'+[(s^2-r^2\alpha^2)+a^2r^2x^{2r}]y=0$$

solutions: $y_1=x^sJ_\alpha(ax^r)$

$$y_2=x^sJ_{-\alpha}(ax^r)$$

$$J_\alpha(x)=\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+\alpha+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

$$Y_\alpha(x)=\frac{\cos(\alpha\pi)J_\alpha(x)-J_{-\alpha}(x)}{\sin(\alpha\pi)}$$

In our case $x^2y''+5xy'+(3-x^2)y=0$

$r=1$ $\qquad$ $r=1$

$1-2s=5$ $\qquad$ $s=-2$

$a^2=-1$ $\qquad$ $a=\pm i$

$a^2=-1$ $\qquad$ $a=\pm i$

$s^2-r^2\alpha^2=3$ $\qquad$ $\alpha=\pm 1$

$$y_1=x^{-2}J_1(ix)$$

$$y_2=x^{-2}Y_1(ix)$$

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 11 לינואר 1996

תזכורת: $\sum a_n(x-x_0)^n$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות $\frac{1}{R}=\lim \sqrt[n]{|a_n|}$

רדיוס ההתכנסות של טור טיילור של פונקציה ~~[illegible]~~ - אנליטית - המרחק עד הנקודה הסינגולרית הראשונה שלה.

דוגמא: $\sum F_n x^n=\frac{1}{1-x-x^2} \Rightarrow |F_n|\sim\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n$

<u>משפט</u> רדיוס ההתכנסות של הפתרון של $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)=0$ כטור חזקות הוא לפחות כקטן מבין הרדיוסים של $\frac{Q}{P}$ ו- $\frac{R}{P}$.

מה אם 0?

נקודה סינגולרית רגולרית: $\lim_{x\to x_0}\frac{Q(x)}{P(x)}(x-x_0)$ קיים וסופי,

$\lim_{x\to x_0}\frac{R(x)}{P(x)}(x-x_0)^2$ קיים וסופי.

<u>דוגמא</u> $x^2(\sum c_n x^n)y''+\alpha x(\sum a_n x^n)y'+\beta(\sum b_n x^n)y=0$ כאשר $a_0=b_0=c_0=1$

<u>דוגמא</u> משוואת לג'נדר $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ בנקודות $x=\pm1$

<u>משוואת אוילר</u> $x^2y''+\alpha xy'+\beta y=0$ $\overset{\text{הגדרה}}{=}Ly$ מנסים $y=x^r$ ומקבלים

$$Ly=x^rF(r) \qquad F(r)=r(r-1)+\alpha r+\beta$$

<u>דוגמא</u> $2x^2y''+3xy'-y=0 \Rightarrow r_{1,2}=\frac12,-1$

<u>דוגמא</u> במקרה המרוכב $((\alpha-1)^2-4\beta<0)$, $r_{1,2}=\lambda\pm i\mu$

$$x^\lambda\cos(\mu\ln x) \qquad x^\lambda\sin(\mu\ln x)$$

<u>דוגמא</u> $(\alpha-1)^2-4\beta=0 \Rightarrow F(r)=(r-r_1)^2 \Rightarrow F'(r_1)=0 \Rightarrow$ נגזור את $Ly=x^rF(r)$ לפי r.

<u>דוגמא</u> $y^2+5xy'+4y=0$, $x>0$

פתרון בעזרת טורי חזקות. $Ly=y''+p(x)y'+q(x)y=0$

פתרון בעזרת טורי חזקות $Ly = y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$

$x^2y'' + x(p(x))y' + q(x)y = 0$ $p(x)=\sum p_n x^n$ $q(x)=\sum q_n x^n$,

מציבים $y = x^r\sum a_n x^n$ עם $a_0 \neq 0$; משווים את המקדמים. - - - -

מקבלים

$$a_0F(r)x^r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(F(r+n)a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]\right)x^{r+n}$$

$a_0 \neq 0 \Rightarrow F(r)=0 \Rightarrow r = r_{1,2}$ ואז

$$a_n = \frac{-\sum}{F(r+n)}$$

בעיה אם $r_2 = r_1 + n$ עבור $n \geq 0$ (שורש כפול $r_1 = r_2$ או ההפרש שלם)

<u>משפט</u> אם $r_1 - r_2$ לא שלם, הטור מתכנס ורדיוס ההתכנסות לפחות כרדיוס הקטן מבין הרדיוסים של $\sum p_n x^n$ ו-$\sum q_n x^n$.

<u>דוגמה</u> $2x(1+x)y'' + (3+x)y' - xy = 0$: $x=0$: $r_{1,2} = 0, -\frac{1}{2}$, רדיוס ההתכנסות לפחות 1, אולם יתכן שהפתרונות כלל לא מוגדרים ב-0.

$x=-1$ $r_{1,2} = 0,2 \Rightarrow$ פתרון אחד ($\sum (x+1)^n \sum$ ...)

לא ... כלל

<u>טכניקה כאשר $r_1 = r_2$</u>: מתעלמים מהתנאי $F(r)=0$ ומקבלים $a_n(r)$

$$a_n(r) = -\frac{\sum a_k[(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]}{F(r+n)}$$

ואז

$$Ly_r = a_0x^rF(r)$$

$y_2 = y_1(x)\log x + x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty} a_n'(r_1)x^n$ $\frac{\partial y_r}{\partial r}$ גם פתרון!

<u>דוגמה</u> משוואת בסל $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$

$\nu = 0$ (סדר 0) $r_{1,2} = 0,0$

$a_n(r) = \frac{-a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}$ פתרון:

$J_0(x)$: $y_1(x) = a_0\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right)$

"פונקצית בסל מסוג ראשון מסדר 0"

$Y_0 = \frac{2}{\pi}(y_2 + (\gamma - \ln 2)J_0)$ $\gamma = \lim H_n - \log n = 0.5772$

~~טכניקה כאשר $r_1 - r_2 = N \geq 0$ שלם~~:

$a'_{2m} = -2\left[\frac{1}{2m} + \frac{1}{2(m-1)} + \dots + \frac{1}{2}\right]a_{2m}(0)$

set $H_m = 1 + \dots + \frac{1}{m}$ $a'_{2m}(0) = -H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}$

$$y_2 = J_0(x)\log x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

-12-

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 18 לינואר 1996

מבחן הערכה - 10 דקות.

<u>תזכורת</u> מנסים לפתור $Ly = x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ $p(x) = \sum p_n x^n$, $q(x) = \sum q_n x^n$

ע"י $y(x) = \sum a_n x^n$.

מקבלים

$$Ly = x^r\left(\underline{\quad}\,x^0 + \sum_{n=1}^{\infty}\underline{\qquad}\,x^n\right)$$

$a_0F(r)$

$0 = F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0$ $a_n = -\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k((r+k)p_{n-k} + q_{n-k})}{F(r+n)}$

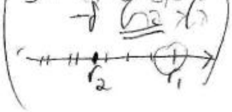
שורשים $r_{1,2}$; $r_1 > r_2$

<u>מסקנה</u> אין בעיה למצוא y_1 המתאים לשורש r_1.

שורשים $r_{1,2}$; $r_1>r_2$

מסקנה: אין בעיה למצוא y_1 המתאים לשורש r_1.
על r_2 יש בעיה אם $r_1=r_2$ (כי נקבל מוצא רק פתרון אחד)
או $r_1-r_2=N$ (כי אז יש בעיה בהגדרה)

טיפול כאשר $r_1=r_2$: מתחילים מהמשוואה $F(r)=0$ ומקבלים



$$a_n(r)=-\frac{\sum_{k=0}^{n-1}a_k(r)\left((r+k)p_{n-k}+q_{n-k}\right)}{F(r+n)}$$

גם

$$Ly_r=a_0x^rF(r)$$

$$\Leftarrow\ \frac{\partial y_r}{\partial r}\ \text{על פתרון}\quad y_2=y_1(x)\log x+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}a_n'(r_1)x^n$$

לפעמים קל יותר לחשב: $y_2=y_1(x)\log x+x^{r_1}\sum_{n=1}^{\infty}b_n x^n$

דוגמה: משוואת בסל מסדר-0 ($\nu=0$)

$$x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$$

$$r_{1,2}=0;\quad a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(n+r)^2}\ \Rightarrow\ a_{\text{odd}}=0;\quad a_{2m}(r)=\frac{(-1)^m a_0}{(2m+r)^2(2m-2+r)^2\cdots(4+r)^2(2+r)^2}$$

פתרון כללי של בסל מסדר 0

$$\Leftarrow\quad a_0J_0(x)=y_1(x)=a_0\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$$

$$a_{2m}'(0)=-2\left[\frac{1}{2m}+\frac{1}{2(m-1)}+\dots+\frac{1}{2\cdot1}\right]a_{2m}(0)=-H_m\frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}\qquad H_m=\left(1+\dots+\frac1m\right)$$

$$\Rightarrow y_2=J_0\log(x)+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}$$

$Y_0=\frac{2}{\pi}\left(y_2+(\gamma-\log 2)J_0\right)$; פונקציית בסל מהסוג השני מסדר 0

$\gamma=\lim_{m}(H_m-\log m)=0.5772$ קבוע אוילר

טיפול כאשר $r_1-r_2=N>0$:

$$y_1=|x|^{r_1}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n\right)$$

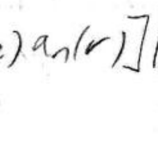
$$y_2=ay_1\log x+|x|^{r_2}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}c_nx^n\right)$$

$$c_n=\frac{d}{dr}\left[(r-r_2)a_n(r)\right]\Big|_{r=r_2}$$

ללא פתרון

שאלה: תכונות של משוואת בסל עבור: $x^2y''+xy'+(x^2-\nu^2)y=0$
מצאנו שעבור $x\to\infty$, הפתרונות יתנהגו כמו $\sin x$ ו-$\cos x$.
כמעט נכון.

דוגמה: כיצד מתנהגת $y''+\left(\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{2(1-x^2)}\right)y=0$ ליד $x=0$?



תשובה: $r_{1,2}=\frac12\pm\frac12 i$

דוגמה: כיצד מתנהגת משוואת לג'נדר $(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0$ ליד $x=\infty$?

תשובה: $t=\frac1x$

$$\frac{dy}{dx}=\dots=-t^2\frac{dy}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\dots=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$$

<u>הצבה</u> $t=\frac{1}{x}$

$\frac{dy}{dx}=\dots=-t^2\frac{dy}{dt}$

$\frac{d^2y}{dx^2}=\dots=2t^3\frac{dy}{dt}+t^4\frac{d^2y}{dt^2}$

$\Leftarrow\quad t^2(t^2-1)\frac{d^2y}{dt^2}+2t^3\frac{dy}{dt}+\alpha(\alpha+1)y=0$

$\Leftarrow\quad r(r-1)-\alpha(\alpha+1)=0\quad\Leftarrow\quad r_{1,2}=\alpha+1,-\alpha$

$\Leftarrow$ אז $-1<\alpha<0$ $\Leftarrow$ פתרונות סופיים ליד ∞.

אם $\alpha>0$ או $\alpha<-1$ $\Leftarrow$ קיים פתרון לא סופי.

אם $\alpha=0$ או $\alpha=-1$ $\Leftarrow$ צריך לבדוק זאת. למשל תקבלו את לג'נדר:

<u>מסקנה</u> $y''+ay'+by=0$ ליד $x=\infty$ $\Leftarrow$ [illegible].