שיטות נומריות:

1. שימוש במשפט טיילור: אוסף נגזרות? דוגמא $\quad y'=-y,\ y(0)=1$

2. שיטת אוילר

$x_0 \quad x_{n+1}=x_n+h$

$y_0 \quad y_{n+1}=y_n+hy_n' \ (=y_n+hf(x_n,y_n))$

דוגמא - תרגיל $y(1)$ מ $h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

$y(1)=0.3679$

$h=1\to 0$

$h=\frac{1}{2}\to\frac{1}{4}=0.25$

$h=\frac{1}{3}\to 8/27\to 0.2963$

כמה מהר מגיעים לתוצאה?

שגיאה מקומית: (מניחים y_n מדויק)

$\phi(x_n+h)=\phi(x_n)+h\phi'(x_n)+O(h^2)$

$y_{n+1}=y_n+hy_n'$

$O(h^2)$

שגיאה מצטברת:

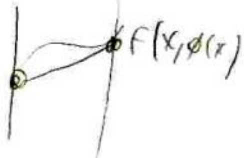
חשוב מאוד: $E\sim\frac{x-x_0}{h}\cdot h^2\sim h$

שיקולי "דרישת דיוק" למציאת התוצאה.

מסקנה - כדי להגיע לדיוק h 10^{-6} צריך 10^6 חישובים - וזה לא מספיק.

3. שיטת אוילר משופרת: $x_{n+1}=x_n+h$, $\quad \phi(x_{n+1})=\phi(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,\phi(x))dx$

$$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}h=y_n+\frac{y_n'+f(x_n+h,y_n+hy_n')}{2}h$$



בכתיבה אחרת: נתונים (x_n,y_n) $\quad K_1=f(x_n,y_n)$

$K_2=f(x_n+h,\ y_n+K_1h)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{K_1+K_2}{2}h$

הערכת שגיאה: מקומית $\sim h^3$

מצטברת $\sim h^2$ לדיוק 10^{-6} צריך $2\cdot10^3$,

4. שיטת (ראיוני) שיטות גבוהות: $\quad K_1=f(x_n,y_n)$ ובכלל

$K_2=f(x_n+\alpha_2h,\ y_n+\alpha_2K_1h)$ $\quad y_{n+1}=y_n+(\beta_1K_1+\dots+\beta_7K_7)h$

$K_3=f(x_n+\alpha_3h,\ y_n+\alpha_3K_2h)$ ואפשר לבחור שיטה עם דיוק

$K_7=\dots$ ולמצוא α_i,β_i כך שהשגיאה קטנה

5. שיטת Runge-Kutta

$$y_{n+1}=y_n+\frac{h}{6}(K_1+2K_2+2K_3+K_4) \quad \text{כאשר} \quad \begin{cases}K_1=f(x_n,y_n)\\ K_2=f(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hK_1)\\ K_3=f(x_n+\frac{1}{2}h,\ y_n+\frac{1}{2}hK_2)\\ K_4=f(x_n+h,\ y_n+hK_3)\end{cases}$$

מקומית $\sim h^5$

מצטברת $\sim h^4$

Improved Euler / RK2:

Given x_n, y_n set $x_{n+1} = x_n + h$

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$
$$K_2 = f(x_{n+1}, y_n + K_1 h)$$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{K_1 + K_2}{2} h$$

$$\phi(x_{n+1}) = \phi(x_n + h) = \phi(x_n) + \phi'(x_n) h + \tfrac{1}{2}\phi''(x_n) h^2 + O(h^3)$$

$$= y_n + f(x_n, y_n) h + \tfrac{1}{2} f(x, \phi(x))' \Big|_{x = x_n} h + \ldots$$

$$= y_n + f(x_n, y_n) h + \tfrac{1}{2}\left[f_x(x_n, y_n) + f_y \cdot f\right] h + \ldots$$

works ...

$\phi_0 \equiv y_0$ $\qquad \phi_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, \phi_{k-1}(t))\,dt$

$\phi_1 = y_0 + (x - x_0) \cdot f(x_0, y_0)$

$$\phi'(x) = f(x, \phi(x))$$

$$\phi''(x) = \frac{d}{dx} f(x, \phi(x)) = f_x(x, \phi(x)) + f_y(x, \phi(x)) f(x, \phi(x))$$

$$\phi'''(x) = \ldots$$