Old time constant coefficients linear equations and phase profiles

October-12-12
12:25 PM

-5-

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 30 לנובמבר 1995.

תזכורת

$$y^{(n)}=F(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) \iff \begin{aligned} v_0'&=v_1\\ v_1'&=v_2\\ &\ \vdots\\ v_{n-2}'&=v_{n-1}\\ v_{n-1}'&=F(x,v_0,\dots,v_{n-1})\end{aligned} \qquad V=\begin{pmatrix}v_0\\ \vdots\\ v_{n-1}\end{pmatrix} \iff V'=F(x,V)$$

$$\begin{aligned} y(x_0)&=y_0\\ y'(x_0)&=y_1\\ &\ \vdots\\ y^{(n-1)}(x_0)&=y_{n-1}\end{aligned} \iff \begin{aligned} v_0(x_0)&=y_0\\ &\ \vdots\\ v_{n-1}(x_0)&=y_{n-1}\end{aligned} \qquad V(x_0)=\begin{pmatrix}y_0\\ \vdots\\ y_{n-1}\end{pmatrix}$$

מסקנה: מערכת משוואות ממעלה גבוהה n פונקציות.
ב. משוואה ממעלה n מצריך לפתרון כללי n קבועים.

שיטות מעריכיות בפתרון הקבוע

משוואות ליניאריות (הומוגניות) עם מקדמים קבועים. (ממעלה 2, לפי הדוגמא)

$$ay''+by'+cy=0$$

אוסף הפתרונות מהווה מרחב וקטורי, מצריכים 2 בת"ל-פתרונות כך שהאוסף כולו הוא $\{c_1y_1+c_2y_2\}$

דוגמאות

1. $y''+y'-6y=0$
2. $y''-4y'+5y=0$
3. $y''-2y'+y=0$

סקר: מטריצות, ערך, וקטור, לפלאס, צורת ז'ורדן, $e^{\text{מטריצה}}$.
0 1/2 1/2 1/2 1/4

$\begin{pmatrix}1&-1\\2&4\end{pmatrix}$ ז'ורדן

1. $\alpha^2+\alpha-6=0$ $(\alpha+3)(\alpha-2)=0$

2. $\alpha^2-4\alpha+5=0$ $\alpha_{1,2}=2\pm i$

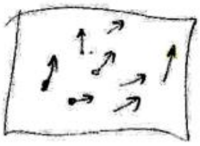
3. $\alpha^2-2\alpha+\alpha=0$ e^x, $y=xe^x$ $y'=(x+1)e^x$

$y''=(x+2)e^x$ $(x+2)-2(x+1)+x=0$ ✓

Dec 7, 1995 seems missing? – it isn't!

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים 14 לדצמבר 1995

1. כמה מילים על מערכות דינמיות



$\dot{x}=f(x,y)$
$\dot{y}=g(x,y)$

ולא משוואות ליניאריות רק מוניות . . . ---

2. אם $V'=AV,\ V(0)=V_0 \Leftarrow V(t)=e^{At}V_0$

ד. אם $A=C\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}C^{-1}$ אזי $e^{At}=C\begin{pmatrix}e^{\lambda_1 t}&0\\0&e^{\lambda_2 t}\end{pmatrix}C^{-1}$

ג. אך מוצאים את C ואת λ_1, λ_2?

תשובה 1. $\lambda_{1,2}$ הם השורשים של הפולינום האופייני $\det(A-\lambda I)=0$

2. $C=(V_1|V_2)$ ו- $(A-\lambda_i I)V_i=0$. מה קורה אם $\lambda_1=\lambda_2$?

3. דוגמא: $A=\begin{pmatrix}0&1\\-2&-2\end{pmatrix}$

$\lambda_1=-1+i \quad \lambda_2=-1-i$

$V_1=\begin{pmatrix}\frac{-1+i}{2}\\1\end{pmatrix} \quad V_2=\begin{pmatrix}\frac{-1-i}{2}\\1\end{pmatrix}$

$$e^{At}=\begin{pmatrix}\frac{-1+i}{2}&\frac{-1-i}{2}\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}e^{(-1+i)t}&0\\0&e^{(-1-i)t}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}&\\&\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1+i}{2}e^{(-1-i)t}+\frac{1-i}{2}e^{(-1+i)t}&\cdots\\ \cdots&\cdots\end{pmatrix}$$

$$=e^{-t}\begin{pmatrix}\cos t+\sin t&\sin t\\-2\sin t&\cos t-\sin t\end{pmatrix}$$

$A=C\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}C^{-1}$ | $A=\begin{pmatrix}\lambda_1&0\\0&\lambda_2\end{pmatrix}$ מלכתחילה

4. פרופיל הפאזות: $\lambda_1<0<\lambda_2$

$0<\lambda_1<\lambda_2$
$\lambda_1<\lambda_2<0$
$0=\lambda_1<\lambda_2$
$\lambda_1<0=\lambda_2$

λ_1, λ_2 שונים וממשיים

$0<\lambda$
$\lambda=0$
$\lambda<0$

$\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ ממשי ...

$Re\,\lambda=0$
$Re\,\lambda>0$
$Re\,\lambda<0$

$\lambda_1=\lambda,\ \lambda_2=\bar{\lambda}$ מרוכב

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים 24 לדצמבר 1995

1. תכונות ?ופה אותה.

2. לֶמה $\exp t\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = e^{at}\begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$

א. הוכחה מפורשת $[I,J]=0$

ב. הוכחה בעזרת גזירה

3. הוכחה בעזרת האיזומורפיזם $aI+bJ \Leftrightarrow a+bi$

3. מסקנה - פרופיל הפתרון במקרה $Re\lambda \lessgtr 0$

4. מה אם $\lambda=\lambda_1=\lambda_2$ אך אין 2 ו"ע?

א. משפט קיילי המילטון

ב. $(\underbrace{A-\lambda I}_{M})^2=0$ $M^2=0$ אבל $M\neq 0$

ג. מוצאים v_2 כך ש- $0\neq v_1=Mv_2$, במובן ש- $Mv_1=0$

ה. טענה: v_1, v_2 בת"ל.

ו. טענה $M=C\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}C^{-1}$ כאשר $C=(v_1 | v_2)$

ז. טענה $A=C\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}C^{-1}$

ח. $\exp t\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & te^{\lambda t} \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix}$

ט. פרופיל הפתרון:

$\lambda=0$ $\lambda < 0$ $\lambda > 0$

$\begin{pmatrix} ae^{\lambda t}+bte^{\lambda t} \\ be^{\lambda t} \end{pmatrix}$

י. עקוב אחרי הכל עם הדוגמא $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$

בדוק על דרך אחרת להגיע לפתרון במקרה ההומוגני:

5. משוואות לא הומוגניות: הערה: מספיק למצוא פתרון אחד $u=C^{-1}v$

א. גישה 1: $v'=Av+g(t)$: עבר ל- - - -

דוגמא:

$v'=\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}v+\begin{pmatrix} t^{-1} \\ 2t^{-1}+4 \end{pmatrix}$

$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$ $C=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

$u'=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}u+\frac{1}{5}\begin{pmatrix} 5t^{-1}+8 \\ 4 \end{pmatrix}$

ב. גישה 2: $v'=A(t)v+g(t)$

נניח מצאנו מטריצה יסודית

$\Psi'(t)=A(t)\Psi(t)$

ד. גשר ב: $V'=A(t)V+g(t)$

נניח מצאנו מטריצה יסודית

$$\Psi'(t)=A(t)\Psi(t)$$

נחפש פתרון ל- $V=\Psi\cdot u$ נקבל

$$\Psi u'=g(t)$$

$$u'=\Psi^{-1}(t)g(t)$$

$$u(t)=\int_0^t \Psi^{-1}(s)g(s)ds$$

הערה: עמודות Ψ הן פתרונות המערכת ההומוגנית

נגזרות: 1. נאש מקרה של משוואת מסדר גבוה הומוגנית אולי.
2. אופרטורים קבועים-אופי
3. אלמנטה.
4. הורונסקיאן: 1. מינוס גבוהות או למלו לא
2. נקודות משוואה ליניארית קדמו.

אף 6 שורות: 5.
9. מערכת לא הומוגנית + נגזרות ללא אלמנטה. 12. נקודות סינגולריות
10. 13. אוסילציה אינטגרלית.
11. פתרון כמערכת טורי חזקות 14.

משוואות דיפרנציאליות לפיסיקאים, 28 לדצמבר 1995

1. $V'=AV+g(t)$

א׳ ישנים בנקודת השבה ומהגבל אינו כה

ב. מספיק למצוא פתרון אחד (בכל משוואה ליניארית-אחמאים)

$C^{-1}V'=DC^{-1}V+C^{-1}g(t)$

$u=C^{-1}V$

$u'=Du'+C^{-1}g(t)$

פותרים ואז

$V=CV$

$$V'=\begin{pmatrix}-4&2\\2&-1\end{pmatrix}V+\begin{pmatrix}t^{-1}\\2t^{-1}+4\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}0&0\\0&5\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\quad C^{-1}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}1&2\\-2&1\end{pmatrix}$$

$$u'=\begin{pmatrix}0&0\\0&-5\end{pmatrix}u+\frac{1}{5}\begin{pmatrix}5/t+8\\4\end{pmatrix}$$

$$u_1'=1/t+8/5\quad u_1=\log t+\frac{8}{5}t+c_1$$

$$u_2'=-5u+\frac{4}{5}\quad u_2=+\frac{4}{25}+c_2e^{-5t}$$

$$V=Cu=\begin{pmatrix}1&-2\\2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\log t+\frac{8}{5}t+c_1\\+4/25+c_2e^{-5t}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\log t+\dots$$

2. $V'=A(t)V+g(t)$: מטריצה יסודית: מטריצה $\Psi(t)$ שעמודותיה הן פתרונות בת״ל של המשוואה ההומוגנית.

טענה: אם $\Psi'=A(t)\Psi(t)$, אזי $\Psi(t)$ רגולרית לכל t או סינגולרית לכל t.

הוכחה א׳ שיקולי קיום ויחידות
הוכחה ב׳ Wronskian

טענה: קיימת מטריצה יסודית. (במקרה האוטונומי ראינו לקחת $\Psi(t)=e^{At}$)

לפתרון $V'=A(t)V+g(t)$ – מחליפים משתנים ל- $V=\Psi\cdot U$ ומקבלים

$$U(t)=\int^t\Psi^{-1}(s)g(s)ds.$$

3. סוגי הניחוש: פתור: א. $y''+5y'+6y=0$ $\quad y=c_1e^{-2x}+c_2e^{-3x}$

ב. $y''+4y'+4y=0$ $\quad c_1e^{-2x}+c_2xe^{-2x}$

ג. $y''+y'+y=0$ $\quad r_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\Rightarrow y=e^{-x/2}(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x+c_2\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x)$

ד. $y''-3y'-4y=2\sin x$ $\quad y=\frac{1}{17}(3\cos x-5\sin x)$

ה. $y''-3y'-4y=4x^2$ $\quad y=-x^2+\frac{3}{2}x-\frac{13}{8}$

ו. $y''-4y=xe^x+xe^{2x}$ $\quad y_\#$

$$y''+4y=xe^{x}+xe^{2x}$$ .1

[illegible] $\Leftarrow$ $y''-4y=xe^{x}$

$y=(Ax^2+Bx)e^{2x}$ $\Leftarrow$ $y''-4y=xe^{2x}$

$D=\frac{d}{dx}$ [illegible] .4

$$y''-5y'+6y=0$$

$$y''-5y'+6y=1$$