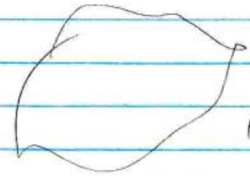
# Old time Euler-Lagrange

September-30-12
7:02 PM

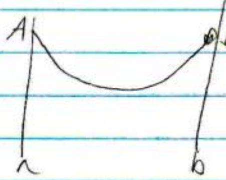
Math 115, Nov 27 1991.

I have an extra book!



minimize a functional $\to \mathbb{R}$ (Possibly subject to constraints)

Ex:




$F = \int_a^b my\sqrt{1+y'^2}\,dx$

constraint: $l = \int dx\,\sqrt{1+y'^2}$

bndry: $y(a)=A \quad y(b)=B$

derive Euler Lagrange: $F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$
(by adding $\epsilon h$, $h(a)=h(b)=0$)

1. F indep. of $y$ $\quad F_{y'} = \text{const}$
" " $y'$ $\quad F_y = 0$
F indep of $x$:

$0 = F_y - (F_{y'})' = F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0 \quad / \cdot y'$

$\Rightarrow \quad y'F_y - F_{y'y}y'^2 - F_{y'y'}y''y' = 0$

$\Rightarrow \frac{d}{dx}(F - y'F_{y'}) = 0 \Rightarrow F - y'F_{y'} = \text{Const}.$

In our case $y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$

$\Rightarrow y'^2 = \frac{y^2-C^2}{C^2} \Rightarrow y = C\cosh\frac{x-C'}{C}$

what's wrong here?

HW: read 1-4 Do $\square$ explicitly, 1.14, 15 b/d

Math 115, Dec 2 1991.

Return Exams: $80^+$ A $60^+$ B $40^+$ C

Av: 74

<u>Review:</u> $J(y) = \int_a^b F(x,y,y')\,dx \quad y(a)=A;\ y(b)=B$

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0 \qquad \text{(Euler Lagrange)}$$

HW:
$F = y'$
$F = xyy'$
$F = (y')^2/x^3$

<u>Power lines:</u> $F = y\sqrt{1+y'^2}$ (EL is too hard)

<u>If F is indep of x:</u> $0 = F_y - F_{y'y}\,y' - F_{y'y'}\,y'' \quad /\cdot y'$

$$y'F_y - F_{y'y}\,y'^2 - F_{y'y'}\,y''y' = 0$$

$\square$

$$(F - y'F_{y'})' = 0 \Rightarrow F - y'F_{y'} = C_1$$

$$\frac{dy}{dx} = g(y) \Rightarrow \frac{dy}{g(y)} = dx \quad \int\frac{dy}{g(y)} = x + C_2$$

Our case: $y\sqrt{1+y'^2} - y'\dfrac{yy'}{\sqrt{1-y'^2}} = C_1$

$$y\frac{1}{\sqrt{1-y'^2}} = C_1 \qquad \sqrt{1-y'^2} = y/C_1$$

$$y' = \sqrt{1 - y^2/C_1^2}$$

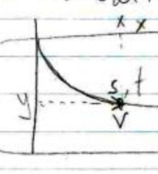
$$C_1\int\frac{d\frac{y}{C_1}}{\sqrt{1-\left(\frac{y}{C_1}\right)^2}} = x + C_2 \Rightarrow C_1\cdot\cosh^{-1}\frac{y}{C_1} = x + C_2$$

$$y = C_1\cosh\frac{x+C_2}{C_1}$$

---

If time, generalities about gradients & Free ends.

The Brachistochrone:




$\frac{1}{2}mv^2 = gy$

$ds = v\,dt$

$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2}$

$\int dt = \ldots$

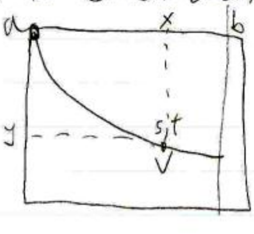
HW: redo $\square$ For 1. $F = y\sqrt{1+y'^2}$
& 2. $F = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}$

*Solve EL for 2.

do 15 a, c, e or 20 if time permitted

Math 115, Dec 4 1991

The Brachistochrone:




$\frac{1}{2}mv^2 = gy$

$ds = v\,dt$

$ds = \sqrt{dx^2+dy^2} = \sqrt{1+y'^2}\,dx$

$\int dt \ldots \qquad J(y) = \int \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}}\,dx$

Conditions: $y(0)=0$ ⎫ derive by first doing a finite dim analog.

$F_{y'}(b) = 0$

$F - y'F_{y'} = c_1^{-1/2}$

$F - y'F_{y'} = \sqrt{\frac{1+y'^2}{y}} - y'\frac{y'}{\sqrt{(1+y'^2)y}} = \frac{1}{\sqrt{y(1+y'^2)}} = c_1^{-\frac{1}{2}}$

$y(1+y'^2) = c_1$

$y' = \sqrt{\frac{c_1}{y} - 1} \qquad \frac{dy}{\sqrt{\frac{c_1}{y}-1}} = dx$

Snell's law:

$\frac{v_1}{\sin\alpha_1} = \frac{v_2}{\sin\alpha_2}$

$\frac{v}{\sin\alpha} = \text{const}$

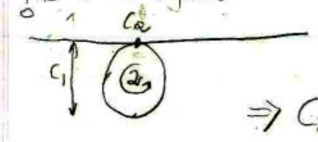
$v = \sqrt{y} \quad \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}$

$x - c_2 = \int \underbrace{\sqrt{\frac{y}{c_1 - y}}}_{tg\,t}\,dy$ ... in pricicle soluble, in practice hard

trick: $\Rightarrow y = c_1 \sin^2 t = \frac{c_1}{2}(1 - \cos 2t) \qquad dy = \ldots$

$x = c_2 + \frac{c_1}{2}(2t - \sin 2t)$

This is the cycloid




center $= \begin{pmatrix} c_2 + c_1/2 \\ c_1/2 \end{pmatrix}$

disp $= \frac{c_1}{2}\begin{pmatrix} -\sin 2t \\ -\cos 2t \end{pmatrix}$

$F_{y'} = 0 \Rightarrow y' = 0$ !

at $b$ $2t = \pi$ Problem solved !

$\Rightarrow c_2 = 0$ ; $b = \frac{c_1}{2}\pi$

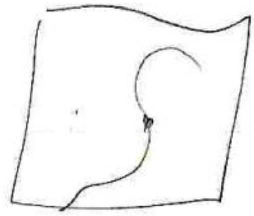
HW: 1. complete details 2. read 3. Do 18, 20

Math 115, Dec 6 1991

The isoperimetric ineaquallity:

"Among all domains with boundary length $l$ the disk has the most area."

Lagrange multipliers: maximize $f(x,y)$ under $g(x,y)=0$



stupid way;

smart way $h_\lambda(x,y) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ $\begin{cases} \nabla h_\lambda = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{cases}$

Example. Find the point nearest to the origin on the curve $x^2+xy+y^2=1$ $h_\lambda = x^2+y^2+\lambda(x^2+xy+y^2-1)$

$\partial_x h_\lambda = 2x + 2\lambda x + \lambda y = 0$

$\partial_y h_\lambda = 2y + 2\lambda y + \lambda x = 0$

$x^2+xy+y^2=1$

$y = -2(1+\lambda)x$ $y=x$ $3x^2=1$

$x = -2(1+\lambda)y$ $y=-x$ $x^2=1$

Example

$y(a)=0$

$y(b)=0$

$J = \int_a^b y\,dx$ $G = \int_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx = l$

$J+\lambda G = \int_a^b (y + \lambda\sqrt{1+y'^2})\,dx$ $F_\lambda = y + \lambda\sqrt{1+y'^2}$

Rare case of Euler-Lagrange is simpler than its simplification:

$$0 = F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 1 - \lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \Rightarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - c_1$$

solve for $y'$, get $y' = \frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}} \Rightarrow y = c_2 - \sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}$

$\Rightarrow (x-c_1)^2+(y-c_2)^2 = \lambda^2$

! ! !

HW. 2.17-19, 22

Requiring the action to be stationary leads to the generalized Euler-Lagrange equations

copied from Itzykson-Zuber

$$\frac{\delta I}{\delta\varphi_i(x)} \equiv \frac{\partial \mathscr{L}(x)}{\partial\varphi_i(x)} - \partial_\mu \frac{\partial\mathscr{L}(x)}{\partial[\partial_\mu\varphi_i(x)]} = 0 \qquad (1\text{-}44)$$

~~אשר~~ מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים 24 ~~לנובמבר~~ 1996

הערות: זכון f- ה-5 תלמידים. הסתברות לנוכחות: $1-e^{-(\ldots - 8.00)}$

"פיזיקה = תנועה < ∞ משתנים". היא עוסקת על חשבון וריאציות.

הבעיה הקלסית: מינימיזציה.

(Gelfand-Fomin חוו')  $y \mapsto J(y) = \int_a^b F(x,y,y')dx$

מצאו מינימום של $J(y)$ כאשר $y$ תחת מגבלות.

דוגמה: קוו מתח בגלגל: $F=\int_a^b my\sqrt{1+y'^2}\,dx$; $l=\int\sqrt{1+y'^2}dx$, $y(a)=A$ $y(b)=B$

ועם המגבלות הן $y(a)=A$ $y(b)=B$ לכל.

משוואת אוילר, לגרנז': (לא הוכחה: $\epsilon h$ רק אם $0=h(a)=h(b)$)

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0$$ (משוואה מסדר שני!)

דוגמה: $F(y)=\frac{1}{2}my'^2 - V(y)$ ⇐ $ma=-V'(y)$ ⇐ חוק ניוטון.

הערות: F לא תלוי ב-y: $F_{y'}$ = קבוע

F לא תלוי ב-y': $0=F_y$

F לא תלוי ב-x:

$$0 = F_y - (F_{y'})' = F_y - F_{y'y}\cdot y' - F_{y'y'}\,y'' \qquad /\cdot y'$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = y'F_y - F_{y'y}\,y'^2 - F_{y'y'}\,y''y' = 0$$

⇐ $F-y'F_{y'}=0$ משוואה מסדר ראשון.

דוגמה: קוו מתח בגלגל לעצמו: $y\sqrt{1+y'^2} - y'\frac{yy'}{\sqrt{1+y'^2}} = C$

⇐ $y' = \sqrt{\left(\frac{y}{C}\right)^2 - 1}$ (בודק: אני לא טריגונומטריה!)

⇐ $y = C\cdot\cosh\frac{x-C'}{C}$ (צריכים עוד כולם לראות!)

---

כפלי לגרנז': אנחנו מצא נקודה של $f(x,y)$ על העקום $g(x,y)=0$

הדרך הלימודית: הצבה.

הדרך החכמה: $h_\lambda = f+\lambda g$ ואז $\nabla h_\lambda = 0$, $g(x,y)=0$

דוגמה של בהוכחת הבעיה האיזופרימטרית:

$J=\int_a^b y\,dx$

$G=\int\sqrt{1+y'^2}dx = l$

⇐ $F^\lambda = y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$

מקיים צריך ה-E-L של מעגל:

$0 = F^\lambda_y - \frac{d}{dx}F^\lambda_{y'} = 1-\lambda\frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$

⇐ זה מעגל

$$0 = 1 - \lambda \frac{d}{dx}\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x - C_1$$

$$\Downarrow$$

$$y' = \frac{x-C_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}}$$

$$y = C_2 - \sqrt{\lambda^2-(x-C_1)^2}$$

$$(x-C_1)^2+(y-C_2)^2 = \lambda^2$$

!

מכניקה קלסית וקוונטית למתמטיקאים, תרגיל מס' 1. 24/10/96
וגם 28/3/99

1. מצא/י אוסף של אופרטורים $F_t: L^2(\mathbb{R}) \circlearrowleft$ המקיים
$F_{t_1+t_2}=F_{t_1}\circ F_{t_2}$ , $F_0 = I$ , וכן

$F_{\frac{\pi}{2}} =$ טרנספורם פוריה.

2. חקור/י את הפונקציונלים הבאים (ז"א, מצא/י נק' אקסטרמום)

א. $y \mapsto \int_0^1 y'dx \qquad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ב. $y \mapsto \int_0^1 yy'dx \qquad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ג. $y \mapsto \int_0^1 xyy'dx \qquad y(0)=0 \quad y(1)=1$

ד. $y \mapsto \int_a^b \frac{y'^2}{x^3}dx$

ה. $y \mapsto \int_a^b (y^2+y'^2+2ye^x)dx$

ו. $y \mapsto \int_0^1 (y'^2+x^2)dx$ תחת $\int_0^1 y^2dx=2$ $\quad y(0)=0 \quad y(1)=1$

3. פתור/י את בעיית קו המתח הגבוה, אם אורך הכבל קבוע מראש.

4. (אוילר לגרנז' כתנ' מינימום) יהי $D^2$ דיסק היחידה במישור, תהי $S^1$ שפתו, ותהי $\gamma: S^1\to\mathbb{R}$ פונקציה חלקה. מבין כל המשטחים ב-$\mathbb{R}^3$ הנתונים ע"י הגרף של פונקציה $y: D^2\to\mathbb{R}$ המקיימת $y|_{S^1}=\gamma$, איזה/ו בעל השטח הקטן ביותר? רשום/י את המשוואה ש-$y$ צריכה לקיים, אולם אל תנסה/י לפתור אותה.

זוהי בעיית בועת הסבון ?!

מכניקה קלסית הרצאות למתמטיקאים 11 אפריל 1999

<u>תזכורת:</u> $F(x+\delta x)=F(x)+\langle \nabla f,\delta x\rangle$

$\delta f=\langle \nabla f_q,\delta x\rangle$

בדומה: $\mathcal{L}(q)=\int_a^b L(t,q,\dot q)$

$\delta\mathcal{L}=\langle EL_q(L),\delta q\rangle \qquad EL_q(L)=\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)$

<u>למה</u> תנאי הגבלה: אם $q$ קיצון של $\mathcal{L}(q)$ מבין כל ה-$q$ המקיימים $0=\mathcal{C}(q)=\int_a^b C(t,x,\dot x)$

וכן $EL_q(C)\neq 0$ אזי קיים $\lambda$ כך ש

$$EL_q(L)+\lambda EL_q(C)=0$$

הוכחה בדרך ארנ' [illegible]

<u>דוגמה:</u> [illegible] להוכחת הבעיה האיזופרימטרית: $\mathcal{L}=\int_a^b y\,dx \qquad \mathcal{C}=\int\sqrt{1+y'^2}\,dx$

המשוואה: $1-\lambda\frac{d}{dx}\left(\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right)=0 \Leftarrow \frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=x-c_1$

$\Leftarrow y'=\frac{x-c_1}{\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2}} \Leftarrow y=c_2-\sqrt{\lambda^2-(x-c_1)^2} \Leftarrow$

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2$$

---

הערה: [illegible] לפי Itzykson-Zuber; [illegible] $\frac{\partial L}{\partial q_i}-\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i}=0$

---

מעודכן ערב כב׳ 31 אוקטובר 1996.