Thanks, Chao Wang & Jonathan Love

HW4 correction. in task 2, $y(1)=0$ not 1.

Riddle Along. can you find uncountably many sets of integers, the intersection of any two of which is finite?

Can you find uncountably many sets of integers, s.t. for each two A & B of them, $A\subset B$ or $B\subset A$?

Note $\frac{100^{100}}{100!}\sim 10^{42}$ = way more than the observable universe.

שיטות נומריות:

1. שימוש במשפט פיקרד: אין נומרי! (קשה)

$y'=-y$
$y(0)=1$

2. שיטת אוילר

x_0 $\quad x_{n+1}=x_n+h$

y_0 $\quad y_{n+1}=y_n+hy'_n \; (=y_n+hf(x_n,y_n))$

דוגמה - תרגיל $y(1)$ עם $h=1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}$

$y(1)=0.3679$

$h=1\to 0$
$h=\frac{1}{2}\to\frac{1}{4}=0.25$
$h=\frac{1}{3}\to 8/27\approx 0.2963$

כמה מהר מגיעים לתוצאה?

שגיאה מקומית: (מניחים y_n מדויק)

$\phi(x_n+h)=\phi(x_n)+h\phi'(x_n)+O(h^2)$

$y_{n+1}=y_n+hy'_n$

$O(h^2)$

שגיאה מצטברת:

תיאורטי מאוד: $E\sim\frac{x-x_0}{h}\cdot h^2\sim h$

שיקולי "רמת דיוק" לא משנים את התוצאה.

מסקנה - כדי להגיע לדיוק 10^{-6} צריך 10^{9} חישובים - וזה לא מאפשר.

$x\sim 1{,}000$ עד

3. שיטת אוילר משופרת: $x_{n+1}=x_n+h$,

$\phi(x_{n+1})=\phi(x_n)+\int_{x_n}^{x_{n+1}}f(x,\phi(x))\,dx$

$y_{n+1}=y_n+\frac{f(x_n,y_n)+f(x_{n+1},y_{n+1})}{2}h=y_n+\frac{y'_n+f(x_n+h,y_n+hy'_n)}{2}h$ טרפז

בגישה אחרת: נתונים (x_n,y_n)

$k_1=f(x_n,y_n)$

$k_2=f(x_n+h,y_n+k_1h)$

$y_{n+1}=y_n+\frac{k_1+k_2}{2}h$

done line

הערכת שגיאה: מקומית $\sim h^3$

מצטברת $\sim h^2$ לדיוק 10^{-6} צריך $2\cdot 10^3$,

4. שיטת (רונגה-קוטה) מצוינת שיטה:

לסדר k

$k_1=f(x_n,y_n)$

$k_2=f(x_n+\alpha_2h,y_n+\alpha_2k_1h)$

$k_3=f(x_n+\alpha_3h,y_n+\alpha_3k_2h)$

$k_7=$

$y_{n+1}=y_n+(\beta_1k_1+\dots+\beta_7k_7)h$

מסתבר ש... לכל סדר טיילור קיים k

וצריך לבחור α_i,β_i כך שהדבר [illegible]

$\begin{cases}k_1=f(x_n,y_n)\\ \dots\end{cases}$

[illegible] α_i, β_i [illegible] $k_7 = \ldots$

$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$ עם $\begin{cases} k_1 = f(x_n, y_n) \\ k_2 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1) \\ k_3 = f(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2) \\ k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3) \end{cases}$

Runge-Kutta [illegible] 5

[illegible] h^5 [illegible]

$\sim h^4$ [illegible]

Now play with LocalRungeKutta-2.nb.