Pensieve header: A trace for GDO at $k=0$.

In[•]:=
```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\2018-08"];
<< ../Projects/SL2Invariant/SL2Invariant.m
```

```
Loading KnotTheory` version of January 20, 2015, 10:42:19.1122.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.

This is Profile.m of http://www.drorbn.net/AcademicPensieve/Projects/Profile/.

This version: June 2018. Original version: July 1994.
```

In[•]:=
```
$k = 1;
```

In[•]:=
```
tr_i_ := 𝔼_{i}→{}[-α_i β_i / ħ + β_i b_i + 0 α_i a_i, (-𝒜_i (-1 + B_i 𝒜_i))/(-1 + 𝒜_i) ξ_i η_i / ħ, 1];
Together[(dm_{i,j→k} // tr_k) ≡ (dm_{j,i→k} // tr_k) /. γ → 1]
```

Out[•]=
$$\frac{1}{4\hbar\left(-1+\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\right)^2}\Big(-4\in\hbar\eta_j\xi_i+4\in\hbar\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j\xi_i+8\in\hbar B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j\xi_i-12\in\hbar B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_j\xi_i+4\in\hbar B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_j\xi_i+4\in\beta_i\eta_j\xi_i-4\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_i\eta_j\xi_i-8\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_i\eta_j\xi_i+12\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\beta_i\eta_j\xi_i-4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\beta_i\eta_j\xi_i+4\in\beta_j\eta_j\xi_i-4\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_j\eta_j\xi_i-8\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_j\eta_j\xi_i+12\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\beta_j\eta_j\xi_i-4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\beta_j\eta_j\xi_i+2\in\mathcal{A}_i\eta_i\eta_j\xi_i^2+2\in\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j\eta_i\eta_j\xi_i^2-4\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j\eta_i\eta_j\xi_i^2-8\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^2\eta_i\eta_j\xi_i^2+6\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^2\eta_i\eta_j\xi_i^2+2\in B_k^2\mathcal{A}_i^4\mathcal{A}_j^3\eta_i\eta_j\xi_i^2+\in\eta_j^2\xi_i^2+2\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i^2+\in\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_j^2\xi_i^2-8\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_j^2\xi_i^2-\in B_k^2\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_j^2\xi_i^2-4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_j^2\xi_i^2+10\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_j^2\xi_i^2-\in B_k^2\mathcal{A}_i^4\mathcal{A}_j^4\eta_j^2\xi_i^2+4\in\hbar\eta_i\xi_j-4\in\hbar\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_i\xi_j-8\in\hbar B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_i\xi_j+12\in\hbar B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_i\xi_j-4\in\hbar B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_i\xi_j-4\in\beta_i\eta_i\xi_j+4\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_i\eta_i\xi_j+8\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_i\eta_i\xi_j-12\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\beta_i\eta_i\xi_j+4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\beta_i\eta_i\xi_j-4\in\beta_j\eta_i\xi_j+4\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_j\eta_i\xi_j+8\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\beta_j\eta_i\xi_j-12\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\beta_j\eta_i\xi_j+4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\beta_j\eta_i\xi_j-2\in\mathcal{A}_i\eta_i^2\xi_i\xi_j-2\in\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j\eta_i^2\xi_i\xi_j+4\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j\eta_i^2\xi_i\xi_j+8\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^2\eta_i^2\xi_i\xi_j-6\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^2\eta_i^2\xi_i\xi_j-2\in B_k^2\mathcal{A}_i^4\mathcal{A}_j^3\eta_i^2\xi_i\xi_j+2\in\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i\xi_j+2\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j^2\eta_j^2\xi_i\xi_j-4\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j^2\eta_j^2\xi_i\xi_j-8\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^3\eta_j^2\xi_i\xi_j+6\in B_k^2\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^3\eta_j^2\xi_i\xi_j+2\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^4\eta_j^2\xi_i\xi_j-\in\eta_i^2\xi_j^2-2\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_i^2\xi_j^2-\in\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_i^2\xi_j^2+8\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_i^2\xi_j^2+\in B_k^2\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^2\eta_i^2\xi_j^2+4\in B_k\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_i^2\xi_j^2-10\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^3\eta_i^2\xi_j^2+\in B_k^2\mathcal{A}_i^4\mathcal{A}_j^4\eta_i^2\xi_j^2-2\in\mathcal{A}_j\eta_i\eta_j\xi_j^2-2\in\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j^2\eta_i\eta_j\xi_j^2+4\in B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j^2\eta_i\eta_j\xi_j^2+8\in B_k\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^3\eta_i\eta_j\xi_j^2-6\in B_k^2\mathcal{A}_i^2\mathcal{A}_j^3\eta_i\eta_j\xi_j^2-2\in B_k^2\mathcal{A}_i^3\mathcal{A}_j^4\eta_i\eta_j\xi_j^2\Big)==0$$

In[•]:=
```
dm_{i,j→k}
```

Out[•]=
$$\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{k\}}\Big[a_k\alpha_i+a_k\alpha_j+b_k\beta_i+b_k\beta_j,\ \frac{1}{\hbar\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j}\left(\hbar y_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_i+\hbar y_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j+\hbar x_k\mathcal{A}_i\xi_i+\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j\xi_i-B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j\xi_i+\hbar x_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\xi_j\right),$$
$$1+\frac{1}{4\hbar\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j}\Big(-4\hbar y_k\mathcal{A}_j\beta_i\eta_j-4\hbar x_k\mathcal{A}_i\beta_j\xi_i+4\gamma\hbar^2x_ky_k\eta_j\xi_i+4\hbar a_kB_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j\xi_i+2\gamma\hbar y_k\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i-6\gamma\hbar B_ky_k\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i+2\gamma\hbar x_k\mathcal{A}_i\eta_j\xi_i^2-6\gamma\hbar B_kx_k\mathcal{A}_i\eta_j\xi_i^2+\gamma\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i^2-4\gamma B_k\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i^2+3\gamma B_k^2\mathcal{A}_i\mathcal{A}_j\eta_j^2\xi_i^2\Big)\in+O[\in]^2\Big]$$

In[•]:= $\mathbf{dm_{i,j\to k}\ //\ tr_k}$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{\}}\Big[\frac{\hbar\, b_k\, \beta_i - \alpha_i\, \beta_i - \alpha_j\, \beta_i + \hbar\, b_k\, \beta_j - \alpha_i\, \beta_j - \alpha_j\, \beta_j}{\hbar}$,

$\frac{1}{-\hbar + \hbar\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}\big(\mathcal{A}_i\, \eta_i\, \xi_i - B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j\, \eta_i\, \xi_i + \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j\, \eta_j\, \xi_i -$
$B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_j\, \xi_i + \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j\, \eta_i\, \xi_j - B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_i\, \xi_j + \mathcal{A}_j\, \eta_j\, \xi_j - B_k\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_j\, \xi_j\big)$,

$1 + \frac{1}{4\,\hbar - 8\,\hbar\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j + 4\,\hbar\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j^2}\big(4\, \mathcal{A}_i\, \beta_j\, \eta_i\, \xi_i - 4\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j\, \beta_j\, \eta_i\, \xi_i - 4\, B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j\, \beta_j\, \eta_i\, \xi_i + 4\, B_k\, \mathcal{A}_i^3\, \mathcal{A}_j^2\, \beta_j\, \eta_i\, \xi_i -$
$4\,\gamma\,\hbar\,\eta_j\,\xi_i + 4\,\gamma\,\hbar\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\eta_j\,\xi_i + 8\,\gamma\,\hbar\,B_k\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\eta_j\,\xi_i - 12\,\gamma\,\hbar\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j\,\xi_i + 4\,\gamma\,\hbar\,B_k\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_j\,\xi_i +$
$4\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_i - 4\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_i - 8\,B_k\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_i + 12\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_i - 4\,B_k\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_i +$
$4\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i - 4\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i - 8\,B_k\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i + 12\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i - 4\,B_k\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\beta_j\,\eta_j\,\xi_i + 2\,\gamma\,\mathcal{A}_i$
$\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 + 2\,\gamma\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 - 4\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 - 8\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 + 6\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 +$
$2\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^4\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i^2 + \gamma\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + 2\,\gamma\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + \gamma\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 - 8\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 - \gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j^2\,\xi_i^2 -$
$4\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + 10\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_j^2\,\xi_i^2 - \gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^4\,\mathcal{A}_j^4\,\eta_j^2\,\xi_i^2 + 4\,\mathcal{A}_j\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_j - 4\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_j -$
$4\,B_k\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_j + 4\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^3\,\beta_i\,\eta_j\,\xi_j + 4\,\gamma\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i\,\xi_j - 12\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i\,\xi_j +$
$12\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i\,\xi_j - 4\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^4\,\mathcal{A}_j^4\,\eta_i\,\eta_j\,\xi_i\,\xi_j + 2\,\gamma\,\mathcal{A}_j\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j + 2\,\gamma\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j -$
$4\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i\,\mathcal{A}_j^2\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j - 8\,\gamma\,B_k\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j + 6\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^2\,\mathcal{A}_j^3\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j + 2\,\gamma\,B_k^2\,\mathcal{A}_i^3\,\mathcal{A}_j^4\,\eta_j^2\,\xi_i\,\xi_j\big) \in + O[\in]^2\Big]$

In[•]:= $\mathbf{dm_{j,i\to k}\ //\ tr_k}$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{i,j\}\to\{\}}\Big[\frac{1}{\hbar}\big(t\,\hbar\, a_k\, \alpha_i + t\,\hbar\, a_k\, \alpha_j + \hbar\, b_k\, \beta_i - \alpha_i\, \beta_i - \alpha_j\, \beta_i + \hbar\, b_k\, \beta_j - \alpha_i\, \beta_j - \alpha_j\, \beta_j\big)$,

$\frac{1}{-\hbar + \hbar\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j}\big(\mathcal{A}_i\, \eta_i\, \xi_i - B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j\, \eta_i\, \xi_i + \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j\, \eta_j\, \xi_i - B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_j\, \xi_i +$
$\mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j\, \eta_i\, \xi_j - B_k\, \mathcal{A}_i^2\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_i\, \xi_j + \mathcal{A}_j\, \eta_j\, \xi_j - B_k\, \mathcal{A}_i\, \mathcal{A}_j^2\, \eta_j\, \xi_j\big)$, $1 + O[\in]^1\Big]$

In[•]:= $\mathbf{tr_{k\_} := \mathbb{E}_{\{k\}\to\{\}}\Big[r\,\alpha_k\,\beta_k\,/\,\hbar + s\,\beta_k\,b_k + t\,\alpha_k\,a_k,\ \frac{\mathcal{A}_k^{1-r}\left(-B_k^s + \mathcal{A}_k^r\right)}{-1 + \mathcal{A}_k}\,\xi_k\,\eta_k\,/\,\hbar,\ 1\Big];}$

$\mathbf{Simplify\Big[\left(dm_{i,j\to k}\ //\ tr_k\right) \equiv \left(dm_{j,i\to k}\ //\ tr_k\right)\Big]}$

Out[•]= True

Hopf link

In[•]:= $\mathbf{(R_{1,2}\, R_{3,4})\ //\ dm_{1,4\to 1}\ //\ dm_{2,3\to 2}\ //\ tr_2}$

Out[•]= $\mathbb{E}_{\{\}\to\{1\}}\Big[r\,\hbar\, a_1\, b_1 + t\,\hbar\, a_2\, b_1 + s\,\hbar\, a_1\, b_2,\ \frac{-\hbar\, x_1\, y_1 + \hbar\, B_1^r\, B_2^s\, x_1\, y_1}{-1 + B_1}, 1 + O[\in]^1\Big]$