

Pensieve header: Number of inversions and quantum factorials.

**NOI**[*L\_List*] := **Count**[**Subsets**[*L*, {2}], **Except**[\_?OrderedQ]]

**NOI**[{1, 3, 2}]

1

**NOI** /@ **Permutations**[**Range**[4]]

{0, 1, 1, 2, 2, 3, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 3, 4, 4, 5, 5, 6}

**f**[*n\_*] := **Total**[**q**<sup>NOI/@Permutations[Range[n]]</sup>]

**f**[4]

$1 + 3q + 5q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 3q^5 + q^6$

**qfac**[*n\_*] := **Expand**[**Product**[**Sum**[**q**<sup>*j*</sup>, {*j*, 0, *k* - 1}], {*k*, *n*}]

**qfac**[4]

$1 + 3q + 5q^2 + 6q^3 + 5q^4 + 3q^5 + q^6$

**f**[9] // **Timing**

{5.90625, 1 + 8q + 35q<sup>2</sup> + 111q<sup>3</sup> + 285q<sup>4</sup> + 628q<sup>5</sup> + 1230q<sup>6</sup> + 2191q<sup>7</sup> + 3606q<sup>8</sup> + 5545q<sup>9</sup> + 8031q<sup>10</sup> + 11021q<sup>11</sup> + 14395q<sup>12</sup> + 17957q<sup>13</sup> + 21450q<sup>14</sup> + 24584q<sup>15</sup> + 27073q<sup>16</sup> + 28675q<sup>17</sup> + 29228q<sup>18</sup> + 28675q<sup>19</sup> + 27073q<sup>20</sup> + 24584q<sup>21</sup> + 21450q<sup>22</sup> + 17957q<sup>23</sup> + 14395q<sup>24</sup> + 11021q<sup>25</sup> + 8031q<sup>26</sup> + 5545q<sup>27</sup> + 3606q<sup>28</sup> + 2191q<sup>29</sup> + 1230q<sup>30</sup> + 628q<sup>31</sup> + 285q<sup>32</sup> + 111q<sup>33</sup> + 35q<sup>34</sup> + 8q<sup>35</sup> + q<sup>36</sup>}

**qfac**[9] // **Timing**

{0., 1 + 8q + 35q<sup>2</sup> + 111q<sup>3</sup> + 285q<sup>4</sup> + 628q<sup>5</sup> + 1230q<sup>6</sup> + 2191q<sup>7</sup> + 3606q<sup>8</sup> + 5545q<sup>9</sup> + 8031q<sup>10</sup> + 11021q<sup>11</sup> + 14395q<sup>12</sup> + 17957q<sup>13</sup> + 21450q<sup>14</sup> + 24584q<sup>15</sup> + 27073q<sup>16</sup> + 28675q<sup>17</sup> + 29228q<sup>18</sup> + 28675q<sup>19</sup> + 27073q<sup>20</sup> + 24584q<sup>21</sup> + 21450q<sup>22</sup> + 17957q<sup>23</sup> + 14395q<sup>24</sup> + 11021q<sup>25</sup> + 8031q<sup>26</sup> + 5545q<sup>27</sup> + 3606q<sup>28</sup> + 2191q<sup>29</sup> + 1230q<sup>30</sup> + 628q<sup>31</sup> + 285q<sup>32</sup> + 111q<sup>33</sup> + 35q<sup>34</sup> + 8q<sup>35</sup> + q<sup>36</sup>}

**f**[10] // **Timing**

{71.1406, 1 + 9q + 44q<sup>2</sup> + 155q<sup>3</sup> + 440q<sup>4</sup> + 1068q<sup>5</sup> + 2298q<sup>6</sup> + 4489q<sup>7</sup> + 8095q<sup>8</sup> + 13640q<sup>9</sup> + 21670q<sup>10</sup> + 32683q<sup>11</sup> + 47043q<sup>12</sup> + 64889q<sup>13</sup> + 86054q<sup>14</sup> + 110010q<sup>15</sup> + 135853q<sup>16</sup> + 162337q<sup>17</sup> + 187959q<sup>18</sup> + 211089q<sup>19</sup> + 230131q<sup>20</sup> + 243694q<sup>21</sup> + 250749q<sup>22</sup> + 250749q<sup>23</sup> + 243694q<sup>24</sup> + 230131q<sup>25</sup> + 211089q<sup>26</sup> + 187959q<sup>27</sup> + 162337q<sup>28</sup> + 135853q<sup>29</sup> + 110010q<sup>30</sup> + 86054q<sup>31</sup> + 64889q<sup>32</sup> + 47043q<sup>33</sup> + 32683q<sup>34</sup> + 21670q<sup>35</sup> + 13640q<sup>36</sup> + 8095q<sup>37</sup> + 4489q<sup>38</sup> + 2298q<sup>39</sup> + 1068q<sup>40</sup> + 440q<sup>41</sup> + 155q<sup>42</sup> + 44q<sup>43</sup> + 9q<sup>44</sup> + q<sup>45</sup>}

**qfac**[10] // **Timing**

{0., 1 + 9q + 44q<sup>2</sup> + 155q<sup>3</sup> + 440q<sup>4</sup> + 1068q<sup>5</sup> + 2298q<sup>6</sup> + 4489q<sup>7</sup> + 8095q<sup>8</sup> + 13640q<sup>9</sup> + 21670q<sup>10</sup> + 32683q<sup>11</sup> + 47043q<sup>12</sup> + 64889q<sup>13</sup> + 86054q<sup>14</sup> + 110010q<sup>15</sup> + 135853q<sup>16</sup> + 162337q<sup>17</sup> + 187959q<sup>18</sup> + 211089q<sup>19</sup> + 230131q<sup>20</sup> + 243694q<sup>21</sup> + 250749q<sup>22</sup> + 250749q<sup>23</sup> + 243694q<sup>24</sup> + 230131q<sup>25</sup> + 211089q<sup>26</sup> + 187959q<sup>27</sup> + 162337q<sup>28</sup> + 135853q<sup>29</sup> + 110010q<sup>30</sup> + 86054q<sup>31</sup> + 64889q<sup>32</sup> + 47043q<sup>33</sup> + 32683q<sup>34</sup> + 21670q<sup>35</sup> + 13640q<sup>36</sup> + 8095q<sup>37</sup> + 4489q<sup>38</sup> + 2298q<sup>39</sup> + 1068q<sup>40</sup> + 440q<sup>41</sup> + 155q<sup>42</sup> + 44q<sup>43</sup> + 9q<sup>44</sup> + q<sup>45</sup>}