Pensieve header: Attempted unitarity for the two-variable version of the Gassner invariant.

Definitions.

```
U_i_[t_, s_] := ReplacePart[
   IdentityMatrix[n],
   {{i, i} → 1 - s, {i, i + 1} → 1,
    {i + 1, i} → t, {i + 1, i + 1} → 0}
  ];
Uinv_i_[t_, s_] := Inverse[U_i[t, s]];
Ω[τ___] := Table[
   Which[i < j, 0, i == j, -(t_{τ}[[j]] - 1)/t_{τ}[[j]], i > j, (t_{τ}[[j]] - 1) (t_{τ}[[i]] - 1)/t_{τ}[[i]]],
   {i, n}, {j, n}];
X_‾ := X /. t_i_ :→ 1 / t_i;
```

The named matrices.

```
n = 5; MatrixForm /@ Simplify /@ {U_3[t_3, t_4], Uinv_3[t_3, t_4]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&1-t_4&1&0\\0&0&t_3&0&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&\frac{1}{t_3}&0\\0&0&1&\frac{-1+t_4}{t_3}&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}\right\}$$

```
n = 3; MatrixForm /@ Simplify /@ {Ω[2, 3, 1], Inverse[Ω[2, 3, 1]]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix}-1+\frac{1}{t_2}&0&0\\\frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3}&-1+\frac{1}{t_3}&0\\\frac{(-1+t_1)(-1+t_2)}{t_1}&\frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_1}&-1+\frac{1}{t_1}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\frac{t_2}{1-t_2}&0&0\\-t_2&\frac{t_3}{1-t_3}&0\\-t_2 t_3&-t_3&-\frac{t_1}{-1+t_1}\end{pmatrix}\right\}$$

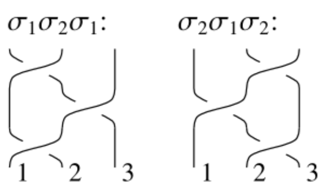
```
n = 3; Ω[1, 2, 3] // MatrixForm // TeXForm
```

```
\left(
\begin{array}{ccc}
 -\frac{t_1-1}{t_1} & 0 & 0 \\
 \frac{\left(t_1-1\right) \left(t_2-1\right)}{t_2} & -\frac{t_2-1}{t_2} & 0 \\
 \frac{\left(t_1-1\right) \left(t_3-1\right)}{t_3} & \frac{\left(t_2-1\right)
   \left(t_3-1\right)}{t_3} & -\frac{t_3-1}{t_3} \\
\end{array}
\right)
```

```
n = 5; MatrixForm /@ Simplify /@ {Ω[1, 2, 3, 4, 5], Inverse[Ω[1, 2, 3, 4, 5]]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)\,(-1+t_2)}{t_2} & -1+\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)\,(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)\,(-1+t_3)}{t_3} & -1+\frac{1}{t_3} & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)\,(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_2)\,(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_3)\,(-1+t_4)}{t_4} & -1+\frac{1}{t_4} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)\,(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_2)\,(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_3)\,(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_4)\,(-1+t_5)}{t_5} & -1+\frac{1}{t_5} \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} \frac{t_1}{1-t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -t_1 & \frac{t_2}{1-t_2} & 0 & 0 & 0 \\ -t_1\,t_2 & -t_2 & -\frac{t_3}{-1+t_3} & 0 & 0 \\ -t_1\,t_2\,t_3 & -t_2\,t_3 & -t_3 & -\frac{t_4}{-1+t_4} & 0 \\ -t_1\,t_2\,t_3\,t_4 & -t_2\,t_3\,t_4 & -t_3\,t_4 & -t_4 & -\frac{t_5}{-1+t_5} \end{pmatrix}\right\}$$

The R3 move  .


```
n = 3; MatrixForm /@
 Simplify /@ {U₁[t₁, t₂].U₂[t₁, t₃].U₁[t₂, t₃], U₂[t₂, t₃].U₁[t₁, t₃].U₂[t₁, t₂]}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1-t_3 & 1-t_2 & 1 \\ -t_1\,(-1+t_3) & t_1 & 0 \\ t_1\,t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-t_3 & 1-t_2 & 1 \\ -t_1\,(-1+t_3) & t_1 & 0 \\ t_1\,t_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$$

The unitarity property for the generators.

```
n = 5; γ = U3[t3, t4];
MatrixForm /@ FullSimplify /@
  {t1 = Ω[1, 2, 4, 3, 5].Inverse[γ], t2 = Transpose[γ̄].Ω[1, 2, 3, 4, 5], t1 == t2}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_2)}{t_2} & -1+\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_4} & 0 & \frac{1-t_4}{t_3 t_4} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -1+\frac{1}{t_3} & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_4)(-1+t_5)}{t_5} & -1+\frac{1}{t_5} \end{pmatrix},\right.$$

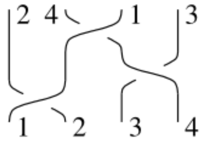
$$\left.\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_2)}{t_2} & -1+\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_4} & 0 & \frac{1-t_4}{t_3 t_4} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -1+\frac{1}{t_3} & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_4)(-1+t_5)}{t_5} & -1+\frac{1}{t_5} \end{pmatrix}, \text{True}\right\}$$

```
n = 5; γ = Uinv3[t4, t3];
MatrixForm /@ FullSimplify /@
  {t1 = Ω[1, 2, 4, 3, 5].Inverse[γ], t2 = Transpose[γ̄].Ω[1, 2, 3, 4, 5], t1 == t2}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_2)}{t_2} & -1+\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_4} & -1+\frac{1}{t_4} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -2+\frac{1}{t_3}-t_3(-1+t_4)+t_4 & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_3} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_4)(-1+t_5)}{t_5} & -1+\frac{1}{t_5} \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_2)}{t_2} & -1+\frac{1}{t_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_4} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_4} & -1+\frac{1}{t_4} & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -2+\frac{1}{t_3}-t_3(-1+t_4)+t_4 & \left(1-\frac{1}{t_3}\right)(-1+t_4) & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_5)}{t_5} & \frac{(-1+t_4)(-1+t_5)}{t_5} & -1+\frac{1}{t_5} \end{pmatrix}, \text{True}\right\}$$

The braid $b_0 = \sigma_1\sigma_3^{-1}\sigma_2$:



.

```
n = 4; MatrixForm[γ0 = U1[t1, t2].Uinv3[t4, t3].U2[t1, t4]]
```

$$\begin{pmatrix} 1-t_2 & 1-t_4 & 1 & 0 \\ t_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{t_4} \\ 0 & t_1 & 0 & -\frac{1-t_3}{t_4} \end{pmatrix}$$

The unitarity property for b_0.

```
MatrixForm /@
 Simplify /@ {t1 = Ω[2, 4, 1, 3].Inverse[γ0], t2 = Transpose[γ0̅].Ω[1, 2, 3, 4], t1 == t2}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 0 & \frac{1-t_2}{t_1 t_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_1 t_4} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_1 t_4} & \frac{1-t_4}{t_1 t_4} \\ -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -2+\frac{1}{t_3}-t_3(-1+t_4)+t_4 & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_3} \end{pmatrix},\right.$$

$$\left.\begin{pmatrix} 0 & \frac{1-t_2}{t_1 t_2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(-1+t_2)(-1+t_4)}{t_1 t_4} & \frac{(-1+t_3)(-1+t_4)}{t_1 t_4} & \frac{1-t_4}{t_1 t_4} \\ -1+\frac{1}{t_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(-1+t_1)(-1+t_3)}{t_3} & \frac{(-1+t_2)(-1+t_3)}{t_3} & -2+\frac{1}{t_3}-t_3(-1+t_4)+t_4 & \left(1-\frac{1}{t_3}\right)(-1+t_4) \end{pmatrix}, \text{True}\right\}$$