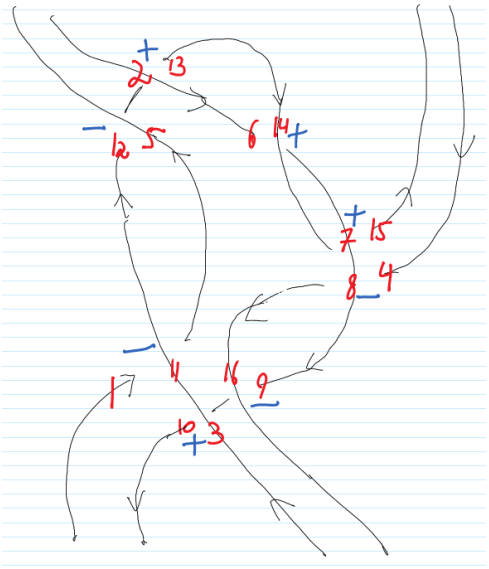
Pensieve Header: Guessing around a unitarity property for Gassner calculus.

```
dir = SetDirectory["C:/drorbn/AcademicPensieve/2014-05/"];
<< KnotTheory`
<< MetaCalculi/MetaCalculi-Program.m
ΓSimp = Factor;
```

```
Loading KnotTheory` version of April 3, 2014, 16:23:56.0784.
Read more at http://katlas.org/wiki/KnotTheory.
```




```
γ1 = Xm[11, 1] Xm[5, 12] Xp[2, 13] Xp[14, 6] Xp[7, 15] Xm[8, 4] Xm[16, 9] Xp[3, 10] // Γ //
       dm[1, 5, 1] // dm[2, 6, 2] // dm[2, 7, 2] // dm[2, 8, 2] // dm[2, 9, 2] //
     dm[2, 10, 2] // dm[3, 11, 3] // dm[3, 12, 3] // dm[3, 13, 3] //
   dm[3, 14, 3] // dm[3, 15, 3] // dm[4, 16, 4] // dS[2] // dS[4]
```

$\frac{-1+T_2+T_3}{T_2\,T_3}$	S_1	S_2	S_3
S_1	$\frac{1-T_3+T_1\,T_3}{T_1\,T_3}$	$\frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3}$	$\frac{-1+T_1}{T_1}$
S_2	$\frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)\,(T_2+T_3)}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)}$	$\frac{T_1\,T_2+T_2\,T_4-T_1\,T_2\,T_4-T_2^2\,T_4+T_1\,T_2^2\,T_4+T_3\,T_4-2\,T_2\,T_3\,T_4+T_2^2\,T_3\,T_4-T_3^2\,T_4+T_2\,T_3^2\,T_4}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)\,T_4}$	$\frac{(-1+T_2)\,(T_2+T_3)}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)}$
S_3	$\frac{-1+T_3}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)}$	$\frac{(-1+T_3)\,(T_1-T_1\,T_4+T_1\,T_2\,T_4+T_3\,T_4)}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)\,T_4}$	$\frac{T_3}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)}$
S_4	0	$\frac{-1+T_4}{T_2\,T_3\,T_4}$	0
Σ	$\frac{1}{T_3}$	$\frac{1}{T_3^2\,T_4}$	$\frac{1}{T_1\,T_2^2}$

```
(A1 = γ1[A]) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{1-T_3+T_1\,T_3}{T_1\,T_3} & \frac{(-1+T_1)\,(-1+T_3)}{T_1\,T_3} & \frac{-1+T_1}{T_1} & 0 \\ \frac{(-1+T_2)\,(-1+T_3)\,(T_2+T_3)}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)} & \frac{T_1\,T_2+T_2\,T_4-T_1\,T_2\,T_4-T_2^2\,T_4+T_1\,T_2^2\,T_4+T_3\,T_4-2\,T_2\,T_3\,T_4+T_2^2\,T_3\,T_4-T_3^2\,T_4+T_2\,T_3^2\,T_4}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)\,T_4} & \frac{(-1+T_2)\,(T_2+T_3)}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)} & \frac{-1+T_2}{-1+T_2+T_3} \\ \frac{-1+T_3}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)\,(T_1-T_1\,T_4+T_1\,T_2\,T_4+T_3\,T_4)}{T_1\,T_2\,T_3\,(-1+T_2+T_3)\,T_4} & \frac{T_3}{T_1\,T_2\,(-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_2)\,(-1+} \\ 0 & \frac{-1+T_4}{T_2\,T_3\,T_4} & 0 & \frac{1}{T_2} \end{pmatrix}$$

```
(A1s = Transpose[A1 /. T_a_ :> 1 / T_a] // rSimp) // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1-T_1+T_1T_3 & -\frac{T_1(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3)}{-T_2-T_3+T_2T_3} & \frac{T_1T_2^2(-1+T_3)}{-T_2-T_3+T_2T_3} \\ (-1+T_1)(-1+T_3) & -\frac{T_1T_2-T_1T_2^2+T_1T_3-2T_1T_2T_3+T_1T_2^2T_3+T_1T_3^2-T_1T_2^2T_3^2-T_1T_2T_3^2+T_1T_2^2T_3^2+T_2T_3^2T_4}{-T_2-T_3+T_2T_3} & \frac{T_2(-1+T_3)(T_1T_2+T_3-T_2T_3+T_2T_3T_4)}{-T_2-T_3+T_2T_3} \\ 1-T_1 & \frac{T_1(-1+T_2)(T_2+T_3)}{-T_2-T_3+T_2T_3} & -\frac{T_1T_2^2}{-T_2-T_3+T_2T_3} \\ 0 & \frac{(-1+T_2)T_3}{-T_2-T_3+T_2T_3} & -\frac{(-1+T_2)T_2(-1+T_3)}{-T_2-T_3+T_2T_3} \end{pmatrix}$$

```
A1.A1s // FullSimplify // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2+(-4+T_3)T_3-3T_1(1+(-3+T_3)T_3)+T_1^2(1+2(-2+T_3)T_3)}{T_1T_3} \\ \frac{(-1+T_1)T_1T_2(-1+T_3)+(-1+T_2)\left(T_3(-2-(-4+T_3)T_3+T_1(-2+T_3)(-1+2T_3))+T_2\left(-2+T_1^2(-1+T_3)-(-4+T_3)T_3+T_1(3+2(-3+T_3)T_3)\right)\right)T_4}{T_1T_2T_3(-1+T_2+T_3)T_4} \\ \frac{-T_3(2+(-4+T_3)T_3)T_4+T_1^2(-1+T_3)^2(1+(-1+T_2)T_4)+T_1(-1-(-1+T_2)T_4+(-2+T_3)T_3(-1-(T_2-2T_3)T_4))}{T_1T_2T_3(-1+T_2+T_3)T_4} \\ \frac{(-1+T_1)(-1+T_3)(-1+T_4)}{T_2T_3T_4} \end{pmatrix} \quad -($$

```
{γ1, γ1 // dS[1] // dS[2] // dS[3] // dS[4], A1s // MatrixForm}
```

$$\begin{Bmatrix} \frac{-1+T_2+T_3}{T_2T_3} & S_1 & S_2 & S_3 \\ S_1 & \frac{1-T_3+T_1T_3}{T_1T_3} & \frac{(-1+T_1)(-1+T_3)}{T_1T_3} & \frac{-1+T_1}{T_1} \\ S_2 & \frac{(-1+T_2)(-1+T_3)(T_2+T_3)}{T_1T_2T_3(-1+T_2+T_3)} & \frac{T_1T_2+T_2T_4-T_1T_2T_4-T_2^2T_4+T_1T_2^2T_4+T_3T_4-2T_2T_3T_4+T_2^2T_3T_4-T_3^2T_4+T_2T_3^2T_4}{T_1T_2T_3(-1+T_2+T_3)T_4} & \frac{(-1+T_2)(T_2+T_3)}{T_1T_2(-1+T_2+T_3)} \\ S_3 & \frac{-1+T_3}{T_1T_2(-1+T_2+T_3)} & \frac{(-1+T_3)(T_1-T_1T_4+T_1T_2T_4+T_3T_4)}{T_1T_2T_3(-1+T_2+T_3)T_4} & \frac{T_3}{T_1T_2(-1+T_2+T_3)} \\ S_4 & 0 & \frac{-1+T_4}{T_2T_3T_4} & 0 \\ \Sigma & \frac{1}{T_3} & \frac{1}{T_3^2T_4} & \frac{1}{T_1T_2^2} \end{Bmatrix}$$

```
γ1[A].((γ1 // dS[1] // dS[2] // dS[3] // dS[4] ))[A] // Expand // Simplify
```

$$\left\{\left\{1+\frac{-1+\frac{1}{T_3^2}}{T_1},\ \frac{(-1+T_1)\ (-1+T_3)\ \left(T_4+T_1\ \left(T_2\ (1+T_3)+T_3^2\ T_4\right)\right)}{T_1^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4}\right.,\right.$$
$$\left((-1+T_1)\ \left(T_1\ \left(T_3+T_2\ (-1+T_3)^2\ (1+T_3)+T_2^2\ \left(-1+T_3^2\right)+T_3^3\ (-1+T_4)\right)+T_3\ T_4\right)\right)\Big/$$
$$\left.\left(T_1^2\ T_2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4\right),\ \frac{(-1+T_1)\ (-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)}{T_1\ T_2\ T_3^2\ T_4}\right\},\ \left\{\frac{(-1+T_2)\ (T_2+T_3)\ \left(-1+T_3^2\right)}{T_1\ T_2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)},\right.$$
$$\left((-1+T_2)\ (-1+T_3)\ (T_2+T_3)\ T_4^2+T_1\ (-1+T_2)\ (T_2+T_3)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4\ (T_2+(-1+T_3)\ T_4)+\right.$$
$$\left.T_1^2\ T_2^2\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+(-1+T_2)\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\Big/\left(T_1^2\ T_2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)^2\ T_4^2\right),$$
$$\left((-1+T_2)\ (T_2+T_3)\ \left(T_1\ \left(-1+T_3^2\right)\ \left(T_2^2+T_2\ (-1+T_3)+T_3\ (-1+T_4)\right)\ T_4+T_3\ T_4^2+\right.\right.$$
$$\left.\left.T_1^2\ T_2\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+(-1+T_2)\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\right)\Big/\left(T_1^2\ T_2^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)^2\ T_4^2\right),$$
$$\left((-1+T_2)\ \left((-1+T_2)\ (T_2+T_3)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+T_1\ T_2\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+T_2\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\right)\Big/$$
$$\left.\left.\left(T_1\ T_2^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4^2\right)\right\},\right.$$
$$\left\{\frac{-1+T_3^2}{T_1\ T_2\ T_3\ (-1+T_2+T_3)},\ \left((-1+T_3)\ \left(T_3\ T_4^2+T_1\ T_3\ (1+T_3)\ T_4\ (T_2+(-1+T_3)\ T_4)+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.T_1^2\ T_2\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+(-1+T_2)\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\right)\Big/\left(T_1^2\ T_2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)^2\ T_4^2\right),$$
$$\left(T_1\ T_3\ \left(-1+T_3^2\right)\ \left(T_2^2+T_2\ (-1+T_3)+T_3\ (-1+T_4)\right)\ T_4+T_3^2\ T_4^2+T_1^2\ (-1+T_2)\ (-1+T_3)\right.$$
$$\left.(T_2+T_3)\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+(-1+T_2)\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\Big/\left(T_1^2\ T_2^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)^2\ T_4^2\right),$$
$$\left((-1+T_2)\ (-1+T_3)\ \left(T_3\ (1+T_3)\ T_4+T_1\ \left(1-(-1+T_2)\ \left(-1+T_3^2\right)\ T_4+T_2\ T_3^2\ T_4^2\right)\right)\right)\Big/$$
$$\left.\left(T_1\ T_2^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4^2\right)\right\},$$
$$\left\{0,\ \frac{(-1+T_4)\ \left(1+T_3^2\ T_4\right)}{T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4^2},\ \frac{(-1+T_2)\ (T_2+T_3)\ (-1+T_4)\ \left(1+T_3^2\ T_4\right)}{T_2^2\ T_3^2\ (-1+T_2+T_3)\ T_4^2},\right.$$
$$\left.\left.\frac{1+\left(-1+T_3^2\right)\ T_4+T_2\ (-1+T_4)\ \left(1+T_3^2\ T_4\right)}{T_2^2\ T_3^2\ T_4^2}\right\}\right\}$$

```
Xp[1, 2] ** Xp[1, 3] ** Xp[3, 1] // Γ // dS[1] // dS[2] // dS[3]
```

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & 1-T_1+T_1\ T_3 & 1-T_1 & 1-T_1 \\ s_2 & 0 & T_1 & 0 \\ s_3 & -T_1\ (-1+T_3) & 0 & T_1 \\ \Sigma & T_3 & T_1 & T_1 \end{pmatrix}$$

```
Xp[1, 2] ** Xp[1, 3] ** Xp[3, 1] // Γ
```

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & T_3 & -(-1+T_1)\ T_3 & -(-1+T_1)\ T_3 \\ s_2 & 0 & T_1 & 0 \\ s_3 & 1-T_3 & (-1+T_1)\ (-1+T_3) & 1-T_3+T_1\ T_3 \\ \Sigma & T_3 & T_1 & T_1 \end{pmatrix}$$

```
(Xp[1, 2] ** Xp[1, 3] ** Xp[3, 1] // Γ // dS[1] // dS[2] // dS[3]) **
 (Xp[1, 2] ** Xp[1, 3] ** Xp[3, 1] // Γ /. T_a_ :> 1 / T_a)
```

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 & s_3 \\ s_1 & T_3\left(1-T_1^2+T_1^2\,T_3\right) & -(-1+T_1)(1+T_1)\,T_3 & -(-1+T_1)(1+T_1)\,T_3 \\ s_2 & 0 & T_1^2 & 0 \\ s_3 & -(-1+T_3)\left(1+T_1^2\,T_3\right) & (-1+T_1)(1+T_1)(-1+T_3) & 1-T_3+T_1^2\,T_3 \\ \Sigma & T_3^2 & T_1^2 & T_1^2 \end{pmatrix}$$

```
V // A // Γ
```

$$\begin{pmatrix} \frac{2^{1/4}\left(\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_1]}{2}\right]}{\text{Log}[T_1]}\right)^{1/4}\left(\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_2]}{2}\right]}{\text{Log}[T_2]}\right)^{1/4}}{\left(\frac{\text{Sinh}\left[\frac{1}{2}(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\right]}{\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2]}\right)^{1/4}} & s_1 & \\ s_1 & \frac{\sqrt{2}\,\text{Log}[T_2]\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_2]}{2}\right]}{\text{Log}[T_2]}}+2\,\text{Log}[T_1]\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_1]}{2}\right]}{\text{Log}[T_1]}}\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{1}{2}(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\right]}{\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2]}}}{2(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_1]}{2}\right]}{\text{Log}[T_1]}}\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{1}{2}(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\right]}{\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2]}}} & \frac{\text{Log}[T_1]}{} \\ s_2 & \frac{\text{Log}[T_2]\left(-\sqrt{2}\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_2]}{2}\right]}{\text{Log}[T_2]}}+2\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_1]}{2}\right]}{\text{Log}[T_1]}}\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{1}{2}(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\right]}{\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2]}}\right)}{2(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{\text{Log}[T_1]}{2}\right]}{\text{Log}[T_1]}}\sqrt{\frac{\text{Sinh}\left[\frac{1}{2}(\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2])\right]}{\text{Log}[T_1]+\text{Log}[T_2]}}} & \frac{-\text{Log}[T_2]\sqrt{\frac{\text{Sinh}}{\text{Lo}}}}{} \\ \Sigma & 1 & \end{pmatrix}$$

```
{t1 = (V // A // dσ[1 → 2, 2 → 1]) ** (Vi // A), t1 // Γ}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} \frac{2\,e^{c_1+c_2}\,\text{Sinh}\left[\frac{c_1}{2}\right]-\text{Csch}\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2)\right]\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]+e^{c_1+c_2}\,\text{Csch}\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2)\right]\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]}{-e^{\frac{c_1}{2}}+e^{\frac{3c_1}{2}+c_2}} & \\ t[1] & \frac{-e^{\frac{c_2}{2}}\,\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]+e^{c_1+\frac{3c_2}{2}}\,\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]-2\,e^{c_1+c_2}\,\text{Sinh}\left[\frac{c_1}{2}\right]\text{Si}}{-\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]c_1+e^{c_1+c} \\ t[2] & \frac{\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]-e^{c_1+}}{-\text{Sinh}\left[\frac{c_2}{2}\right]c_2+e^{c_1+c}} \end{pmatrix}\right.$$

```
t2 = (t1 // Γ) /. {Sinh[x_] :> (e^x - e^-x)/2, Csch[x_] :> 2/(e^x - e^-x)} // ΓCollect
```

$$\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & \frac{\left(\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}\right)\sqrt{T_2}}{1+\sqrt{T_1}\,\sqrt{T_2}} & \frac{\left(-1+\sqrt{T_1}\right)\left(1+\sqrt{T_1}\right)\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}\left(1+\sqrt{T_1}\,\sqrt{T_2}\right)} \\ s_2 & -\frac{\left(-1+\sqrt{T_2}\right)\left(1+\sqrt{T_2}\right)}{1+\sqrt{T_1}\,\sqrt{T_2}} & \frac{\sqrt{T_1}+\sqrt{T_2}}{\sqrt{T_1}\left(1+\sqrt{T_1}\,\sqrt{T_2}\right)} \\ \Sigma & \sqrt{T_2} & \frac{1}{\sqrt{T_1}} \end{pmatrix}$$

```
(Xp[1, 2] // Γ)[A] // Eigensystem
```

$$\{\{1, T_1\}, \{\{1, 0\}, \{-1, 1\}\}\}$$

```
ΓSimp = Simplify;
{t2 ** (Xp[1, 2] // Γ) ** (t2 // dA[1] // dA[2] // dσ[1 → 2, 2 → 1]), Xp[2, 1] // Γ}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & T_2 & 0 \\ s_2 & 1-T_2 & 1 \\ \Sigma & T_2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & T_2 & 0 \\ s_2 & 1-T_2 & 1 \\ \Sigma & T_2 & 1 \end{pmatrix}\right\}$$

```
{t2 ** (Xm[2, 1] // Γ) ** (t2 // dA[1] // dA[2] // dσ[1 → 2, 2 → 1]), Xm[1, 2] // Γ}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & 1 & 1-\frac{1}{T_1} \\ s_2 & 0 & \frac{1}{T_1} \\ \Sigma & 1 & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & 1 & 1-\frac{1}{T_1} \\ s_2 & 0 & \frac{1}{T_1} \\ \Sigma & 1 & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}\right\}$$

```
ΓSimp = Simplify;
{(Xp[1, 2] // Γ) ** (Xp[2, 1] // Γ),
 t2 ** (Xp[1, 2] // Γ) ** (Xp[2, 1] // Γ) ** (t2 // dA[1] // dA[2]),
 (Xp[2, 1] // Γ) ** (Xp[1, 2] // Γ)}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & T_2 & -(-1+T_1)\,T_2 \\ s_2 & 1-T_2 & 1+(-1+T_1)\,T_2 \\ \Sigma & T_2 & T_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & 1+T_1\,(-1+T_2) & 1-T_1 \\ s_2 & -T_1\,(-1+T_2) & T_1 \\ \Sigma & T_2 & T_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & 1+T_1\,(-1+T_2) & 1-T_1 \\ s_2 & -T_1\,(-1+T_2) & T_1 \\ \Sigma & T_2 & T_1 \end{pmatrix}\right\}$$

```
ΓSimp = FullSimplify;
{(Xm[2, 1] // Γ) ** (Xm[1, 2] // Γ),
 t2 ** (Xm[2, 1] // Γ) ** (Xm[1, 2] // Γ) ** (t2 // dA[1] // dA[2]),
 (Xm[1, 2] // Γ) ** (Xm[2, 1] // Γ)}
```

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & 1+\frac{-1+\frac{1}{T_2}}{T_1} & 1-\frac{1}{T_1} \\ s_2 & \frac{1-\frac{1}{T_2}}{T_1} & \frac{1}{T_1} \\ \Sigma & \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & \frac{1}{T_2} & \frac{-1+T_1}{T_1\,T_2} \\ s_2 & 1-\frac{1}{T_2} & 1+\frac{-1+\frac{1}{T_1}}{T_2} \\ \Sigma & \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & s_1 & s_2 \\ s_1 & \frac{1}{T_2} & \frac{1-\frac{1}{T_1}}{T_2} \\ s_2 & 1-\frac{1}{T_2} & 1+\frac{-1+\frac{1}{T_1}}{T_2} \\ \Sigma & \frac{1}{T_2} & \frac{1}{T_1} \end{pmatrix}\right\}$$

```
Clear[α, β, γ, δ, ω];
γ0 = Γ[ω, h1 σ1 + h2 σ2, {t1, t2}.((α β; γ δ)).{h1, h2}];
t2 ** γ0 ** (t2 // dA[1] // dA[2] // dσ[1 → 2, 2 → 1])
```

$$\begin{pmatrix} \omega & s_1 \\ s_1 & -\frac{\sqrt{T_2}\left(\delta-\beta T_1-\delta T_1-\beta\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}+\gamma\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}-\alpha T_1^{3/2}\sqrt{T_2}-\gamma T_1^{3/2}\sqrt{T_2}+\gamma T_2-\delta T_2-2\alpha T_1 T_2+\beta T_1 T_2-\gamma T_1 T_2+\delta T_1 T_2-\alpha\sqrt{T_1}\,T_2^{3/2}+\beta\sqrt{T_1}\right)}{\sqrt{T_1}\left(1+\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}\right)^2} \\ s_2 & \frac{\beta\sqrt{T_1}+\delta\sqrt{T_1}+\delta\sqrt{T_2}+\alpha T_1\sqrt{T_2}+\gamma T_1\sqrt{T_2}+\alpha\sqrt{T_1}\,T_2-2\beta\sqrt{T_1}\,T_2+2\gamma\sqrt{T_1}\,T_2-\delta\sqrt{T_1}\,T_2+\gamma T_2^{3/2}-\delta T_2^{3/2}-\alpha T_1 T_2^{3/2}-\alpha\sqrt{T_1}\,T_2^2+\beta\sqrt{T_1}}{\sqrt{T_1}\left(1+\sqrt{T_1}\sqrt{T_2}\right)^2} \\ \Sigma & T_2\,\sigma_1 \end{pmatrix}$$

```
tt0 = (V // A // dσ[1 → 2, 2 → 3]) ** (V // A // dΔ[2, 2, 3])
```

$$\left(\frac{\sqrt{2}\left(\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}\right)^{1/4}\left(\frac{\sinh\left[\frac{c_2}{2}\right]}{c_2}\right)^{1/4}\left(\frac{\sinh\left[\frac{c_3}{2}\right]}{c_3}\right)^{1/4}}{\left(\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}\right)^{1/4}}\right.$$

$h[1]$

$t[1]$

$$\frac{-\sqrt{2}\,c_2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_2+c_3)\right]}{c_2+c_3}}-\sqrt{2}\,c_3\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_2+c_3)\right]}{c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{}}{2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_1^2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_1c_2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}}$$

$t[2]$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_2+c_3)\right]}{c_2+c_3}}-2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}}{2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_1\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}}$$

$t[3]$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_2+c_3)\right]}{c_2+c_3}}-2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}}{2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_1\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}\,c_2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{1}{2}(c_1+c_2+c_3)\right]}{c_1+c_2+c_3}}+2\sqrt{\frac{\sinh\left[\frac{c_1}{2}\right]}{c_1}}}$$

```
tt1 = (tt0 // dσ[1 → 3, 3 → 1]) ** (tt0 // dA[1] // dA[2] // dA[3])

tt1 // r
```