Assaf on Differential Galois Theory

December-24-13 9:19 AM

מוטיבציה: תורת גלואה אלגברית: E/F,

$P\in F[x]$ פולינום ממעלה n, אי-פריק וספרבילי

$$E=F(\alpha_1,\dots\alpha_n)$$

$$P=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_0$$

הגדרה 1. שדה דיפרנציאלי F הוא שדה F

עם $D:F\to F$ כך ש:

$$D(a+b)=D(a)+D(b)$$

$$D(ab)=D(a)\cdot b+aD(b)$$

חוג דיפרנציאלי הוא כנ"ל, אבל עם חוג.

מעכשיו, השדות הם E,F, D הוא דיפרנציאל,
המציין הוא תמיד 0.

הגדרה 2 אופרטור לינארי הומוגני דיפרנציאלי
מסדר n הוא אופרטור מהצורה

$$L=D^n+a_{n-1}D^{n-1}+a_{n-2}D^{n-2}+\dots$$

a הוא פתרון אם $L(a)=0$.

הגדרה 3 הרחבת שדות E/F דיפרנציאלית

היא הרחבת שדות כך ש $D_E|_F=D_F$.

הגדרה $a\in F$ נקרא "קבוע" אם $D(a)=0$.

תרגיל הקבועים של שדה מהווים תת-שדה.

<u>תרגיל</u> הוכיחו את [illegible]

דוגמאות: 1. $\forall a\in F \quad D(a)=0$

2. בקיצור F, נסתכל על $F(x)$

$$F(x)=\left\{\frac{p(x)}{q(x)}\right\}$$

עם הנגזרת הרגילה כלומר: $Dx=1$

אם S קבוצה ו- F שדה ו- $E=F(S)$

אז מספיק להגדיר את D על S.

<u>למה</u> א. $D(1)=0$

ב. $D(a^n)=na^{n-1}D(a)$

ג. $D\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{-D(a)}{a^2}$

<u>הוכחה</u> א. $D(1)=D(1\cdot 1)=1D(1)+D(1)\cdot 1$

$$=2D(1)$$

ולכן $D(1)=0$.

ב. באינדוקציה...

$$D(a^{n+1})=D(a^n\cdot a)=aD(a^n)+a^nD(a)$$

$$=a\cdot n\cdot a^{n-1}D(a)+a^nD(a)$$

$$=(n+1)a^nD(a)$$

ג.

$$0=D(1)=D\left(a\cdot\frac{1}{a}\right)=\dots$$

משפט יהי L כנ"ל מעל שדה F אזי

ל-F קיימת הרחבה שלמה E/F רק

ל-F שמכיל פתרון ל-L.

הוכחה. נב' ר $E=F(t_0 \dots t_{n-1})$

נגדיר $D(t_i)=t_{i+1}$ $0 \le i < n$

ועבור $i=n-1$ $D(t_{n-1})=-\sum_{i=0}^{n-1} a_i t_i$