

Proof of the tJ-property

Pensieve header: Proof of the \$tJ\$ property.

```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\2013-04"];
<< CheatSheetJ-Verification.m;
$SeriesCompareDegree = 6;
```

```
{<t>, <u>, <v>, <w>}
```

$$\text{LS}\left[-2t + u - 2v, \frac{\overline{tu}}{2} - \frac{\overline{tv}}{2} - \frac{\overline{uv}}{2}, -\frac{1}{2}\overline{t\overline{tu}} + \frac{4}{3}\overline{t\overline{tv}} + \frac{1}{6}\overline{u\overline{uv}} + \frac{2}{3}\overline{t\overline{uu}} + \frac{11}{6}\overline{t\overline{vu}} + \overline{t\overline{vv}} - \frac{1}{3}\overline{u\overline{vv}}\right]$$

$$\text{LS}\left[-t + 2u + 2v, \overline{tu} + \overline{tv} + \overline{uv}, \frac{1}{3}\overline{t\overline{tu}} + \frac{1}{6}\overline{t\overline{tv}} + \frac{7}{6}\overline{t\overline{uv}} - \overline{u\overline{uv}} + \frac{11}{6}\overline{t\overline{uu}} + \frac{4}{3}\overline{t\overline{vu}} - \frac{1}{2}\overline{t\overline{vv}} + \frac{11}{6}\overline{u\overline{vv}}\right]$$

$$\text{LS}\left[-2t - 2u - v, -\frac{\overline{tu}}{2} - \frac{\overline{tv}}{2} - 2\overline{uv}, \frac{5}{3}\overline{t\overline{tv}} - \frac{7}{6}\overline{t\overline{uv}} + \overline{u\overline{uv}} + \frac{5}{3}\overline{t\overline{uu}} + \frac{5}{6}\overline{t\overline{vu}} - \frac{11}{6}\overline{t\overline{vv}} - \frac{7}{6}\overline{u\overline{vv}}\right]$$

■ The tJ equation

```
Congruent[
  γ // tm[u, v, w] // Jw,
  Plus[
    γ // Ju // tm[u, v, w],
    γ // RCu[γ] // Jv // CCu[-γ] // tm[u, v, w]
  ]
]
```

True

■ The radial variation of the tJ equation

The radial variation of the LHS

```
Congruent[
  ((1 + ε) γ // tm[u, v, w] // Jw) - (γ // tm[u, v, w] // Jw)
  / ε,
  γ // tm[u, v, w] // RCw[γ // tm[u, v, w]] // divw // CCw[-γ // tm[u, v, w]]
]
```

True

The radial variation of the RHS, part 1

```
Congruent[
  ((1 + ε) γ // Ju // tm[u, v, w]) - (γ // Ju // tm[u, v, w])
  / ε,
  γ // RCu[γ] // divu // CCu[-γ] // tm[u, v, w]
]
```

True

The radial variation of the RHS, part 2a

$$\text{Congruent} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(((1 + \epsilon) \gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w]) - (\gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w]) \right), \gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{RC}_v[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{div}_v // \text{CC}_v[-\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w] \right]$$

True

The radial variation of the RHS, part 2b

$$\text{Congruent} \left[\frac{1}{\epsilon} \left((\gamma // \text{RC}_u[(1 + \epsilon) \gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w]) - (\gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w]) \right), \gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{ad}_u[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{adSeries} \left[\frac{1 - e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \gamma // \text{RC}_u[\gamma] \right] // \text{RC}_v[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{div}_v // \text{CC}_v[-\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w] \right]$$

True

The radial variation of the RHS, part 2

$$\text{Congruent} \left[\frac{1}{\epsilon} \left(((1 + \epsilon) \gamma // \text{RC}_u[(1 + \epsilon) \gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-(1 + \epsilon) \gamma] // \text{tm}[u, v, w]) - (\gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{J}_v // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w]) \right), \text{Plus} \left[\gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{RC}_v[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{div}_v // \text{CC}_v[-\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w], \gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{ad}_u[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{adSeries} \left[\frac{1 - e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \gamma // \text{RC}_u[\gamma] \right] // \text{RC}_v[\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{div}_v // \text{CC}_v[-\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w], \gamma // \text{RC}_u[\gamma] // \text{J}_v // \text{ad}_u[-\gamma // \text{RC}_u[\gamma]] // \text{CC}_u[-\gamma] // \text{tm}[u, v, w] \right] \right]$$

True

```

Congruent[
  γ // tm[u, v, w] // RC_w[γ // tm[u, v, w]] // div_w // CC_w[-γ // tm[u, v, w]],
  Plus[
    γ // RC_u[γ] // div_u // CC_u[-γ] // tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // RC_v[γ // RC_u[γ]] // div_v // CC_v[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] //
      tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // ad_u[γ // RC_u[γ]] // adSeries[ $\frac{1 - e^{-ad}}{ad}$ , γ // RC_u[γ]] //
      RC_v[γ // RC_u[γ]] // div_v // CC_v[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] // tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // J_v // ad_u[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] // tm[u, v, w]
  ]
]
True

```

- Use RC equation t on first term

```

Congruent[
  γ // RC_u[γ] // RC_v[γ // RC_u[γ]] // tm[u, v, w] // div_w // CC_w[-γ // tm[u, v, w]],
  Plus[
    γ // RC_u[γ] // div_u // CC_u[-γ] // tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // RC_v[γ // RC_u[γ]] // div_v // CC_v[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] //
      tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // ad_u[γ // RC_u[γ]] // adSeries[ $\frac{1 - e^{-ad}}{ad}$ , γ // RC_u[γ]] //
      RC_v[γ // RC_u[γ]] // div_v // CC_v[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] // tm[u, v, w],
    γ // RC_u[γ] // J_v // ad_u[-γ // RC_u[γ]] // CC_u[-γ] // tm[u, v, w]
  ]
]
True

```

- Use div property t on first term

```

Congruent[
  Plus[
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_u // tm[u, v, w] // CC_w[-\gamma // tm[u, v, w]],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // tm[u, v, w] // CC_w[-\gamma // tm[u, v, w]]$ 
  ],
  Plus[
     $\gamma // RC_u[\gamma] // div_u // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] //$ 
     $tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // ad_u[\gamma // RC_u[\gamma]] // adSeries\left[\frac{1 - e^{-ad}}{ad}, \gamma // RC_u[\gamma]\right] //$ 
     $RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // J_v // ad_u[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w]$ 
  ]
]
True

```

- Use CC equation t on first two term

```

Congruent[
  Plus[
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_u // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] //$ 
     $tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] //$ 
     $tm[u, v, w]$ 
  ],
  Plus[
     $\gamma // RC_u[\gamma] // div_u // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] //$ 
     $tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // ad_u[\gamma // RC_u[\gamma]] // adSeries\left[\frac{1 - e^{-ad}}{ad}, \gamma // RC_u[\gamma]\right] //$ 
     $RC_v[\gamma // RC_u[\gamma]] // div_v // CC_v[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w],$ 
     $\gamma // RC_u[\gamma] // J_v // ad_u[-\gamma // RC_u[\gamma]] // CC_u[-\gamma] // tm[u, v, w]$ 
  ]
]
True

```

- Cancel all tm[u,v,w]'s, cancel term 2 with term 4

```

Congruent[
  γ // RCu[γ] // RCv[γ // RCu[γ]] // divu // CCv[-γ // RCu[γ]] // CCu[-γ],
  Plus[
    γ // RCu[γ] // divu // CCu[-γ],
    γ // RCu[γ] // adu[γ // RCu[γ]] // adSeries[ $\frac{1 - e^{-ad}}{ad}$ , γ // RCu[γ]] //
      RCv[γ // RCu[γ]] // divv // CCv[-γ // RCu[γ]] // CCu[-γ],
    γ // RCu[γ] // Jv // adu[-γ // RCu[γ]] // CCu[-γ]
  ]
]

```

True

- Cancel CC_u[-γ] on the right

```

Congruent[
  γ // RCu[γ] // RCv[γ // RCu[γ]] // divu // CCv[-γ // RCu[γ]],
  Plus[
    γ // RCu[γ] // divu,
    γ // RCu[γ] // adu[γ // RCu[γ]] // adSeries[ $\frac{1 - e^{-ad}}{ad}$ , γ // RCu[γ]] //
      RCv[γ // RCu[γ]] // divv // CCv[-γ // RCu[γ]],
    γ // RCu[γ] // Jv // adu[-γ // RCu[γ]]
  ]
]

```

True

- Replace γ // RC_u[γ] → γ

```

Congruent[
  γ // RCv[γ] // divu // CCv[-γ],
  Plus[
    γ // divu,
    γ // adu[γ] // adSeries[ $\frac{1 - e^{-ad}}{ad}$ , γ] // RCv[γ] // divv // CCv[-γ],
    γ // Jv // adu[-γ]
  ]
]

```

True

- The above is “Equation Jad” of Juv.nb!