Concise Proof of the J_{uv}-property

Pensieve header: Concise proof of the J_{uv} property.

```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\2013-04"];
<< CheatSheetJ-Verification.m;
$SeriesCompareDegree = 5;
```

{⟨t⟩, ⟨u⟩, ⟨v⟩, ⟨w⟩}

$$\mathrm{LS}\Big[-t-v,\ \frac{\overline{tu}}{2}-\frac{\overline{tv}}{2}-\overline{uv},\ -\frac{5}{6}\,\overline{t\,\overline{tu}}+\frac{1}{3}\,\overline{t\,\overline{tv}}+\overline{t\,\overline{uv}}+\frac{5}{3}\,\overline{u\,\overline{uv}}-\frac{2}{3}\,\overline{\overline{tv}\,u}-\frac{1}{6}\,\overline{\overline{tv}\,v}+\frac{2}{3}\,\overline{\overline{uv}\,v}\Big]$$

$$\mathrm{LS}\Big[-t+u-v,\ \frac{\overline{tu}}{2}+\overline{tv}-\overline{uv},\ \overline{t\,\overline{tu}}-\frac{11}{6}\,\overline{t\,\overline{tv}}+\frac{1}{2}\,\overline{t\,\overline{uv}}-\overline{u\,\overline{uv}}+\frac{1}{2}\,\overline{\overline{tu}\,u}+2\,\overline{\overline{tv}\,u}+\overline{\overline{tv}\,v}+\frac{2}{3}\,\overline{\overline{uv}\,v}\Big]$$

$$\mathrm{LS}\Big[-u+2v,\ 2\,\overline{tu}+\overline{tv}-\frac{3\,\overline{uv}}{2},\ -\frac{5}{3}\,\overline{t\,\overline{tu}}+\frac{11}{6}\,\overline{t\,\overline{tv}}+\frac{1}{6}\,\overline{u\,\overline{uv}}+\frac{1}{3}\,\overline{\overline{tu}\,u}+\frac{11}{6}\,\overline{\overline{tv}\,u}+\frac{1}{2}\,\overline{\overline{tv}\,v}+\overline{\overline{uv}\,v}\Big]$$

- The J_{uv} equation

```
J_u[α] + (β // RC_u[α] // J_v // CC_u[-α]) ≡ J_v[β] + (α // RC_v[β] // J_u // CC_v[-β])
```

True

- The radial α-variation equation

```
Congruent[Plus[
   α // RC_u[α] // div_u // CC_u[-α],
   β // RC_u[α] // ad_u[α // RC_u[α]] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β // RC_u[α]] //
       RC_v[β // RC_u[α]] // div_v // CC_v[-β // RC_u[α]] // CC_u[-α],
   β // RC_u[α] // J_v // ad_u[-α // RC_u[α]] // CC_u[-α]
  ],
 α // RC_v[β] // RC_u[α // RC_v[β]] // div_u // CC_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]]
```

True

- Simplify using $C_u\, C_v$ and $\mathrm{RC}_u\, \mathrm{RC}_v$ and cancel $\mathrm{CC}_u[-\alpha]$ on the right

```
{(γ // RC_v[β] // RC_u[α // RC_v[β]]) ≡ (γ // RC_u[α] // RC_v[β // RC_u[α]]),
 (γ // CC_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]) ≡ (γ // CC_v[-β // RC_u[α]] // CC_u[-α])}
```

{True, True}

```
Congruent[Plus[
  α // RC_u[α] // div_u,
  β // RC_u[α] // ad_u[α // RC_u[α]] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β // RC_u[α]] //
     RC_v[β // RC_u[α]] // div_v // CC_v[-β // RC_u[α]],
  β // RC_u[α] // J_v // ad_u[-α // RC_u[α]]
 ],
 α // RC_u[α] // RC_v[β // RC_u[α]] // div_u // CC_v[-β // RC_u[α]]]
```

True

- Rename α // $\mathrm{RC}_u[\alpha] \to \alpha$ and β // $\mathrm{RC}_u[\alpha] \to \beta$. The equation below is “**Equation Jad**” used also in tJ.nb.

```
Congruent[Plus[
  α // div_u,
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // J_v // ad_u[-α]
 ],
 α // RC_v[β] // div_u // CC_v[-β]]
```

True

- Now take the β-radial variation

$$D\left[\frac{1 - e^{-s\,ad}}{s\,ad}, s\right] \text{ /. } s \to 1 \text{ // Simplify}$$

$$\frac{e^{-ad}\,(1 + ad - e^{ad})}{ad}$$

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(ⅇ^-ad (1 + ad - ⅇ^ad))/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β] // ad_u[-α]
 ],
 Plus[
  α // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_u // CC_v[-β],
  α // RC_v[β] // div_u // ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

```
True
```

- Merge the first two terms and use div property uv on the last two terms

$$\frac{1-e^{-ad}}{ad}+\frac{e^{-ad}\left(1+ad-e^{ad}\right)}{ad}\ \text{// Simplify}$$

$$e^{-ad}$$

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^-ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β] // ad_u[-α]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

```
True
```

- The infinitesimal $C_u\, C_v$ property

```
(γ // CC_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β]) ≡ (γ // CC_v[β // RC_u[-α]] // CC_u[α])
```

True

```
Congruent[
 γ // ad_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β],
 Plus[γ // ad_v[β // ad_u[-α] // adSeries[(e^ad - 1)/ad, β] // RC_v[-β]] // CC_v[β],
  γ // CC_v[β] // ad_u[α]]]
```

True

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[e^-ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

True

- Cancel $\mathrm{CC}_v[-\beta]$ on the right and one repeating term

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^(-ad), β] // RC_v[β] // div_v,
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v,
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // RC_v[β]]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v,
  β // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]]
 ]
]
```

True

- Use div property vv on terms 2&3

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^(-ad), β] // RC_v[β] // div_v,
  β // RC_v[β] // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]] // div_v,
  -β // RC_v[β] // div_v // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]],
  b[β // RC_v[β], β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]] // div_v
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v,
  β // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]]
 ]
]
```

True

- Cancel terms 3&5, pull `RC_v[β]` out of the bracket in term 4

$$\text{Congruent}\Big[\text{Plus}\Big[\beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{adSeries}\big[e^{-\text{ad}}, \beta\big] \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{div}_v, \;\beta \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{ad}_v\Big[\beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{adSeries}\Big[\frac{1-e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \beta\Big] \,//\, \text{RC}_v[\beta]\Big] \,//\, \text{div}_v, \;\text{b}\Big[\beta, \beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{adSeries}\Big[\frac{1-e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \beta\Big]\Big] \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{div}_v\Big], \;\beta \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{ad}_u[\alpha \,//\, \text{RC}_v[\beta]] \,//\, \text{div}_v\Big]$$

```
True
```

- Collapse bracket in term 3 into the adSeries, parially cancel against term 1, undiv

$$\text{Congruent}\Big[\text{Plus}\Big[\beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{RC}_v[\beta], \;\beta \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{ad}_v\Big[\beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{adSeries}\Big[\frac{1-e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \beta\Big] \,//\, \text{RC}_v[\beta]\Big]\Big], \;\beta \,//\, \text{RC}_v[\beta] \,//\, \text{ad}_u[\alpha \,//\, \text{RC}_v[\beta]]\Big]$$

```
True
```

- Re-evaluate on γ // $\text{CC}_v[-\beta]$, post-compose with $\text{CC}_v[-\beta]$

$$\text{Congruent}\Big[\text{Plus}\Big[\gamma \,//\, \text{CC}_v[-\beta] \,//\, \text{ad}_u[\alpha], \;\gamma \,//\, \text{ad}_v\Big[\beta \,//\, \text{ad}_u[\alpha] \,//\, \text{adSeries}\Big[\frac{1-e^{-\text{ad}}}{\text{ad}}, \beta\Big] \,//\, \text{RC}_v[\beta]\Big] \,//\, \text{CC}_v[-\beta]\Big], \;\gamma \,//\, \text{ad}_u[\alpha \,//\, \text{RC}_v[\beta]] \,//\, \text{CC}_v[-\beta]\Big]$$

```
True
```

- Negate β

```
Congruent[Plus[
   γ // CC_v[β] // ad_u[α],
   -γ // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(e^ad - 1)/ad, β] // RC_v[-β]] // CC_v[β]
  ],
 γ // ad_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β]
]
```

```
True
```

- This is the infinitesimal $C_u\, C_v$ property!