Proof of the J_{uv}-property

Pensieve header: Proof of the \$J_{uv}\$ property.

```
SetDirectory["C:\\drorbn\\AcademicPensieve\\2013-04"];
<< CheatSheetJ-Verification.m;
$SeriesCompareDegree = 6;
```

{⟨t⟩, ⟨u⟩, ⟨v⟩, ⟨w⟩}

$$\mathrm{LS}\Big[-u+2\,v,\ -\frac{3\,\overline{t\,u}}{2}+2\,\overline{t\,v}-\frac{\overline{u\,v}}{2},\ -\overline{t\,\overline{t\,u}}+\frac{1}{6}\,\overline{t\,\overline{t\,v}}-2\,\overline{t\,\overline{u\,v}}+\frac{1}{2}\,\overline{u\,\overline{u\,v}}-\overline{\overline{t\,u}\,u}-\overline{\overline{t\,v}\,u}-\frac{5}{3}\,\overline{\overline{u\,v}\,v}\Big]$$

$$\mathrm{LS}\Big[-u+2\,v,\ -\frac{3\,\overline{t\,u}}{2}+\frac{3\,\overline{t\,v}}{2}+\frac{3\,\overline{u\,v}}{2},\ -\frac{1}{3}\,\overline{t\,\overline{t\,u}}+\frac{11}{6}\,\overline{t\,\overline{t\,v}}-\frac{1}{6}\,\overline{t\,\overline{u\,v}}-\frac{1}{3}\,\overline{u\,\overline{u\,v}}-\frac{5}{6}\,\overline{\overline{t\,u}\,u}-\frac{5}{6}\,\overline{\overline{t\,v}\,u}-2\,\overline{\overline{t\,v}\,v}+\frac{1}{3}\,\overline{\overline{u\,v}\,v}\Big]$$

$$\mathrm{LS}\Big[t-2\,u-v,\ -\frac{3\,\overline{t\,v}}{2}-2\,\overline{u\,v},\ \frac{11}{6}\,\overline{t\,\overline{t\,u}}+\frac{1}{6}\,\overline{t\,\overline{t\,v}}+\frac{7}{6}\,\overline{t\,\overline{u\,v}}+\frac{3}{2}\,\overline{u\,\overline{u\,v}}+\frac{1}{6}\,\overline{\overline{t\,u}\,u}-\frac{5}{3}\,\overline{\overline{t\,v}\,u}+\frac{2}{3}\,\overline{\overline{t\,v}\,v}-\frac{1}{3}\,\overline{\overline{u\,v}\,v}\Big]$$

- The J_{uv} equation

$$\mathbf{J_u[\alpha] + (\beta \;//\; RC_u[\alpha] \;//\; J_v \;//\; CC_u[-\alpha]) \equiv J_v[\beta] + (\alpha \;//\; RC_v[\beta] \;//\; J_u \;//\; CC_v[-\beta])}$$

True

- The radial α-variation of the J_{uv} equation

$$\mathbf{Congruent\Big[\frac{1}{\epsilon}\,(J_u[(1+\epsilon)\,\alpha] + (\beta \;//\; RC_u[(1+\epsilon)\,\alpha] \;//\; J_v \;//\; CC_u[-(1+\epsilon)\,\alpha]) - J_u[\alpha] - (\beta \;//\; RC_u[\alpha] \;//\; J_v \;//\; CC_u[-\alpha])),}$$
$$\mathbf{\frac{1}{\epsilon}\,(J_v[\beta] + ((1+\epsilon)\,\alpha \;//\; RC_v[\beta] \;//\; J_u \;//\; CC_v[-\beta]) - J_v[\beta] - (\alpha \;//\; RC_v[\beta] \;//\; J_u \;//\; CC_v[-\beta]))\Big]}$$

True

- The radial α-variation of the LHS

```
Congruent[
 1/ϵ (J_u[(1 + ϵ) α] + (β // RC_u[(1 + ϵ) α] // J_v // CC_u[-(1 + ϵ) α]) -
    J_u[α] - (β // RC_u[α] // J_v // CC_u[-α])),
 Plus[
  α // RC_u[α] // div_u // CC_u[-α],
  β // RC_u[α] // ad_u[α // RC_u[α]] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β // RC_u[α]] //
      RC_v[β // RC_u[α]] // div_v // CC_v[-β // RC_u[α]] // CC_u[-α],
  β // RC_u[α] // J_v // ad_u[-α // RC_u[α]] // CC_u[-α]
 ]
]
```

True

- The radial α-variation of the RHS

```
Congruent[
 1/ϵ (J_v[β] + ((1 + ϵ) α // RC_v[β] // J_u // CC_v[-β]) -
    J_v[β] - (α // RC_v[β] // J_u // CC_v[-β])),
 α // RC_v[β] // RC_u[α // RC_v[β]] // div_u // CC_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
]
```

True

- The radial α-variation equation

```
Congruent[Plus[
  α // RC_u[α] // div_u // CC_u[-α],
  β // RC_u[α] // ad_u[α // RC_u[α]] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β // RC_u[α]] //
      RC_v[β // RC_u[α]] // div_v // CC_v[-β // RC_u[α]] // CC_u[-α],
  β // RC_u[α] // J_v // ad_u[-α // RC_u[α]] // CC_u[-α]
 ],
 α // RC_v[β] // RC_u[α // RC_v[β]] // div_u // CC_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]]
```

True

- Simplify using $C_u\, C_v$ and $\mathrm{RC}_u\, \mathrm{RC}_v$ and cancel `CC_u[-α]` on the right

```
{(γ // RC_v[β] // RC_u[α // RC_v[β]]) ≡ (γ // RC_u[α] // RC_v[β // RC_u[α]]),
 (γ // CC_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]) ≡ (γ // CC_v[-β // RC_u[α]] // CC_u[-α])}
```

{True, True}

```
Congruent[Plus[
   α // RC_u[α] // div_u,
   β // RC_u[α] // ad_u[α // RC_u[α]] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β // RC_u[α]] //
      RC_v[β // RC_u[α]] // div_v // CC_v[-β // RC_u[α]],
   β // RC_u[α] // J_v // ad_u[-α // RC_u[α]]
  ],
 α // RC_u[α] // RC_v[β // RC_u[α]] // div_u // CC_v[-β // RC_u[α]]]
```

True

- Rename α // $\mathrm{RC}_u[\alpha] \to \alpha$ and β // $\mathrm{RC}_u[\alpha] \to \beta$. The equation below is "**Equation Jad**" used also in tJ.nb.

```
Congruent[Plus[
   α // div_u,
   β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
   β // J_v // ad_u[-α]
  ],
 α // RC_v[β] // div_u // CC_v[-β]]
```

True

- Now take the β-radial variation

```
Congruent[
 1/ϵ ((α // RC_v[(1 + ϵ) β] // div_u // CC_v[-(1 + ϵ) β]) -
     (α // RC_v[β] // div_u // CC_v[-β])),
 Plus[
  α // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_u // CC_v[-β],
  α // RC_v[β] // div_u // ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

True

```
D[(1 - ⅇ^(-s ad))/(s ad), s] /. s → 1 // Simplify
```

$$\frac{e^{-\mathrm{ad}}\,(1+\mathrm{ad}-e^{\mathrm{ad}})}{\mathrm{ad}}$$

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(ⅇ^-ad (1 + ad - ⅇ^ad))/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β] // ad_u[-α]
 ],
 Plus[
  α // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_u // CC_v[-β],
  α // RC_v[β] // div_u // ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

True

- Merge the first two terms

```
(1 - ⅇ^-ad)/ad + (ⅇ^-ad (1 + ad - ⅇ^ad))/ad // Simplify
```

e^{-ad}

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^-ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β] // ad_u[-α]
 ],
 Plus[
  α // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_u // CC_v[-β],
  α // RC_v[β] // div_u // ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

True

- Use div property uv on the last two terms

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^(-ad), β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
   CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
    ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β] // ad_u[-α]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

```
True
```

- The infinitesimal $C_u\,C_v$ property

```
(γ // CC_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β]) ≡ (γ // CC_v[β // RC_u[-α]] // CC_u[α])
```

```
True
```

```
Congruent[
 γ // ad_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β],
 Plus[γ // ad_v[β // ad_u[-α] // adSeries[(ⅇ^ad - 1)/ad, β] // RC_v[-β]] // CC_v[β],
  γ // CC_v[β] // ad_u[α]]]
```

```
True
```

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^-ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v //
    CC_v[-β],
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v //
     ad_v[-β // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β],
  β // RC_v[β] // div_v //
     ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β]] // CC_v[-β]
 ]
]
```

```
True
```

- Cancel `CC_v[-β]` on the right and one repeating term

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^-ad, β] // RC_v[β] // div_v,
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // ad_v[β // RC_v[β]] // div_v,
  β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // RC_v[β]]
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v,
  β // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^-ad)/ad, β] // RC_v[β]]
 ]
]
```

```
True
```

- Use div property vv on terms 2&3

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^(-ad), β] // RC_v[β] // div_v,
  β // RC_v[β] // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]] // div_v,
  -β // RC_v[β] // div_v // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]],
  b[β // RC_v[β], β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]] // div_v
 ],
 Plus[
  β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v,
  β // RC_v[β] // div_v // ad_v[-β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]]
 ]
]
```

True

- Cancel terms 3&5, pull $\mathrm{RC}_v[\beta]$ out of the bracket in term 4

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // adSeries[ⅇ^(-ad), β] // RC_v[β] // div_v,
  β // RC_v[β] // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]] // div_v,
  b[β, β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β]] // RC_v[β] // div_v
 ],
 β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]] // div_v
]
```

True

- Collapse bracket in term 3 into the adSeries, parially cancel against term 1, undiv

```
Congruent[Plus[
  β // ad_u[α] // RC_v[β],
  β // RC_v[β] // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - ⅇ^(-ad))/ad, β] // RC_v[β]]
 ],
 β // RC_v[β] // ad_u[α // RC_v[β]]
]
```

True

- Re-evaluate on γ // $\mathrm{CC}_v[-\beta]$, post-compose with $\mathrm{CC}_v[-\beta]$

```
Congruent[Plus[
   γ // CC_v[-β] // ad_u[α],
   γ // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β]] // CC_v[-β]
  ],
 γ // ad_u[α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
]
```

True

- Negate β

```
Congruent[Plus[
   γ // CC_v[β] // ad_u[α],
   -γ // ad_v[β // ad_u[α] // adSeries[(e^ad - 1)/ad, β] // RC_v[-β]] // CC_v[β]
  ],
 γ // ad_u[α // RC_v[-β]] // CC_v[β]
]
```

True

- This is the infinitesimal $C_u\, C_v$ property!

Recycling

```
(γ // CC_v[-β] // ad_u[-α]) ≡ (γ // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β])
```

$-3\langle tuu\rangle + 4\langle tvu\rangle + \langle uuv\rangle - 6\langle uvv\rangle == -3\langle tuu\rangle + 4\langle tvu\rangle + \langle uuv\rangle - 4\langle uvv\rangle$

```
β // RC_v[β] // div_v // ad_u[-α // RC_v[β]] // CC_v[-β]
```

CWS[0, 0, 0]

```
β ≡ (β // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β])
```

True

- Simplify `J_v // ad_u[α]`

```
(β // J_v // ad_u[α])
```

CWS[0, 0, 0]

```
(β // ad_u[α] // adSeries[(1 - e^-ad)/ad, β] // RC_v[β] // div_v // CC_v[-β]) ≡
 (β // ad_u[α] // J_v)
```

$3\,\mathrm{CW}[tuv] + 2\,\mathrm{CW}[tvu] - \frac{3\,\mathrm{CW}[uuv]}{2} + \mathrm{CW}[uvv] == 3\,\mathrm{CW}[tuv] + 2\,\mathrm{CW}[tvu] - \frac{\mathrm{CW}[uuv]}{2} + 3\,\mathrm{CW}[uvv]$

(β + (β // ad_u[α])) // J_v

$$\mathrm{CWS}\left[2\,\widehat{\mathrm{v}},\ \frac{3\,\widehat{\mathrm{tv}}}{2}+\frac{5\,\widehat{\mathrm{uv}}}{2},\ \frac{11\,\widehat{\mathrm{ttv}}}{6}+\frac{4\,\widehat{\mathrm{tuv}}}{3}+\frac{43\,\widehat{\mathrm{tvu}}}{12}+\frac{\widehat{\mathrm{tvv}}}{2}-\frac{9\,\widehat{\mathrm{uuv}}}{4}-\frac{\widehat{\mathrm{uvv}}}{6}\right]$$