The Free Leibniz Algebra

March-17-10
10:00 AM

From Loday's "Algèbres De Leibniz" paper:

$[x, [y, z]] - [[x, y], z] + [[x, z], y] = 0 \Rightarrow [x,[y,z]] = [[x,y],z] - [[x,z],y]$

this is exactly proj Q !

2.3. *Module tensoriel et algèbre de Leibniz libre* [L-P].

Soit V un k-module et $\bar{T}(V) = V \oplus V^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus V^{\otimes n} \oplus \ldots$ le module tensoriel sur V quotienté par la partie de degré 0 ($= k$). On peut montrer qu'il existe une et une seule structure d'algèbre de Leibniz sur $\bar{T}(V)$ vérifiant

$$[x, v] = x \otimes v, \quad \text{pour tout} \quad x \in \bar{T}(V),\ v \in V .$$

L'algèbre de Leibniz $\mathscr{L}(V)$ ainsi définie est en fait l'algèbre de Leibniz libre sur V, i.e. le foncteur $\mathscr{L}$ est adjoint à gauche du foncteur oubli des algèbres de Leibniz dans les k-modules.

Notons que $\mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est l'algèbre de Lie libre sur V. L'application canonique $\bar{T}(V) = \mathscr{L}(V) \to \mathscr{L}(V)_{\mathrm{Lie}}$ est induite par

$$x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mapsto [[\ldots[x_1, \ldots], x_{n-1}], x_n] .$$

[L-P] Loday, J.-L. and T. Pirashvili. Universal enveloping algebras of Leibniz algebras and cohomology. *Math. Annal.* *296* (1993), 139-158.

$[x, v] = x \otimes v$

$[x, v_1 v_2] = [x, [v_1, v_2]] = [[x, v_1], v_2] - [[x, v_2], v_1]$

$= x v_1 v_2 - x v_2 v_1$

$[[v_1, v_2], v_3] = v_1 v_2 v_3$

$[x, v_1 v_2 v_3] = [x, [[v_1 v_2], v_3]] = \ldots\ldots$

The homomorphic expansion:

$z(x \wedge y) = z(x) \wedge \exp z(y) = x e^y$

$z((x \wedge y) \wedge z) = x e^y e^z$

$z((x \wedge z) \wedge (y \wedge z)) = x e^z e^{y e^z}$

?

The global story:

$x \wedge (y \wedge z) = ((x \wedge (y \wedge z)) \wedge z^{-1}) \wedge z = ((x \wedge z^{-1}) \wedge y) \wedge z$

$\Longrightarrow$ The free quandle is probably the set of words in the free group that begin with a letter at power $+1$.